
 論 文

大韓造船學會誌
 第25卷 第4號 1988年 12月
 Journal of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 25, No. 4, December 1988

剛體要素法에 의한 補剛板의 崩壞解析

任尙鏞*, 張昌斗*, 金南哲**

Collapse Analysis of Stiffened Plates by Rigid Element Method

by

S.J. Yim, C.D. Jang and N.C. Kim

Abstract

A new discrete method using idealized rigid body-spring model is introduced. This rigid element method is known to be more efficient and accurate than the finite element method in the inelastic range of structural analysis owing to simplified stress-strain and strain-displacement relations.

This kind of physical concept using idealized rigid model has been already applied among structural engineers to some problems such as rigid-plastic analysis or plastic design considering rigid bodies and plastic hinges. However the most rigorous and systematic research has been recently performed by T. Kawai et al. [1].

In this paper, an attempt is made to analyze the collapse behavior of stiffened plates under lateral loading by some modification and expansion of Kawai's rigid element approach to the collapse of plates without stiffener.

Stiffened plates are treated as orthotropic plates which have equivalent bending rigidities. By employing Morley's plate element resubdivision technique, variety is given to mesh-division styles which have great effect on the accuracy of numerical results.

Some examples are shown to verify the validity of applying rigid element method to the ultimate strength analysis of stiffened plates. It is clarified that lateral deflections and detailed collapse patterns up to the ultimate state of stiffened plates can be easily obtained by the present approach.

1. 서 언

최근 에너지 절약형 선박에 대한 수요가 증가함에 따라 deadweight의 확보, 선속의 향상 및 운항 경비의

절감 등에 지대한 영향을 미치는 선체 중량의 경감이 중요한 문제로 대두되고 있다. 선체 구조의 최적설계를 위해서는 부재의 탄성 강도해석은 물론 최종붕괴강도를 구하여 보다 실질적인 안전율을 규정할 수 있는 효율적인 구조해석법이 필요하다. 현재에는 구조강도

接受日字：1987年 12月 29日，再接授日字：1988年 7月 28日

* 正會員，서울대학교 工科大学

** 正會員，韓國機械研究所 大德船舶分所

해석 방법으로써 유한요소법이 널리 이용되고 있으나 붕괴강도를 얻기 위한 탄소성 비선형 해석을 수행할 경우 이 방법은 많은 계산시간과 방대한 계산기 용량이 소요되어 비경제적이며 더구나 증분형 유한요소법은 수렴성에 대한 보장 여부, 최종 하중 부근에서의 해의 안정성 결여 및 붕괴강도의 과대평가 경향 등의 결점을 가지고 있다. 이러한 것을 극복하기 위하여 최근에는 연속체(continuum)를 강체와 스프링요소로 이산화하여 해석하는 강체요소법[1, 5, 6]을 이용한 탄소성 붕괴해석에 관한 연구가 시도되어왔다. 즉 종래의 유한요소법이 연속체를 유한개의 요소로 이산화하여 이들 요소내의 변형을 주로 고려하는데 반하여 강체요소법에서는 요소간의 변형만을 고려하고 있으므로 자유도를 크게 감소시킬 수 있으며 소성파괴의 mechanism을 효과적으로 나타낼 수 있다는 이점이 있다 [6].

강체요소를 이용하여 연속체를 간단한 모델로 이상화 시키려는 개념은 Prandtl, Hill, Hencky 등이 제안한 slip-line theory[2]로부터 시작되어 Lopez[3] 등을 거쳐, 최근에는 일본의 Kawai, Yamamoto 등의 신 이산화모델이론[1, 5, 6]이 소개되고 있으며, 탄소성 비선형 해석은 물론이고, 점성을 포함하는 거의 모든 영역의 정적해석과 심지어는 동적 응답해석에까지 그 적용범위를 넓혀가고 있다[8, 9].

본 논문에서는 Kawai[1]가 평판 붕괴해석에 사용했던 강체요소법을 보강판에 확장하여 적용함으로써 횡압을 받는 보강판의 붕괴 하중을 효율적으로 계산할 수 있음을 보였다.

일반적으로 보강판을 해석하는 방법에는 보와 평판의 복합체 그대로를 해석하는 방법, 평판 이론에 근거한 이방성판이나 유효폭 개념을 통한 보이론에 근거한 grillage로 치환하는 방법 등이 있다. 여기서는, 선체의 갑판이나 선저구조에서 보는 바와 같이 비교적 보강체가 조밀하게 배치된 경우를 상정하고 보강판을 이방성판으로 치환하는 방법을 채택하였다. 강체요소법의 요소강성을 나타내는 스프링 상수를 이방성판의 강성 즉 D_x, D_y 의 함수로 표시하여 방향성을 부여시킴으

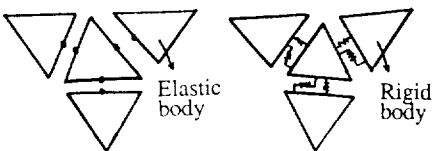


Fig. 1 Types of discrete element models

로써 얻어진 이방성판 굽힘 강체요소이론을 이용하여, 횡하중을 받는 보강판의 붕괴강도 해석을 수행했다. 그 결과로 최종강도에 이르기까지의 변형·붕괴 양식 및 그때의 하중크기를 구함으로써 본 해석법의 유용성을 입증하였다. 또 비탄성 해석에서는 요소분할 양식이 해의 정밀성에 큰 영향을 미치므로, 이를 해결하기 위해서 요소를 자동적으로 재분할하는 Moreley의 방법을 채택하여 요소수, 분할 양식 등을 효율적으로 변화시킴으로써 결과의 정확성을 도모했다.

2. 강체요소법의 일반 원리

강체요소법 이론은 보이론이나 판이론으로 구조물의 해석을 수행할 때 계산시간이나 컴퓨터 용량 등으로 인해 흔히 발생하는 어려움을 극복하기 위해 제안되었으며, 이론의 적용대상에 따라 보굽힘 강체요소, 판굽힘 강체요소, 박판보 강체요소 등[10] 그 적용범위가 매우 포괄적이다.

이 이론은 구조물이 탄성역을 지나 붕괴될 때 그 소성 거동이 요소간의 slip 현상이나 소성관절에 따른 link 기구로 이상화 될 수 있다는 사실에 기초하고 있다. 구체적인 예로써 횡하중을 받고 있는 보의 경우를 보면, 탄성역내에서의 변형은 보전체에 걸쳐서 일어나지만 하중이 차츰 증가함에 따라 하중의 작용점이나 또는 양 끝단으로 변형이 집중되기 시작하며 이러한 경향은 점점 더 가속화하여 마침내는 그 부분에 소성힌지가 발생하고, 그 이후에는 거의 모든 변형에너지가 이 소성힌지에서 흡수되어 마치 link 기구와 같이 된다. 이러한 현상은 비단 보 뿐만이 아니라, 평판은 물론 소성역내에 놓여 있는 모든 구조물에서 볼 수 있다.

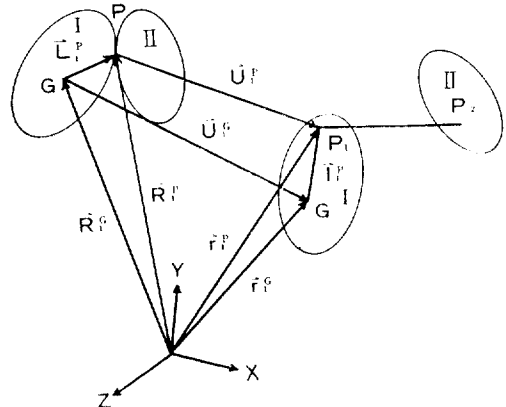


Fig. 2 Relative displacements of rigid element models

이러한 관점을 증시하면, 재료의 강도는 요소자체의 강도와 요소간의 강도로 구분되며, 일반적인 보이론이나 판이론 등은 요소간의 강도를 소홀히 다루고 있다고 분 수 있으며, 요소간의 미끄러짐(slip movement)에 의해 재료가 파괴된다고 가정하면 연속체(continum)가 아닌 다른 모델의 타당성을 시사해 준다[5]. 강제 요소법에서는 모델은 요소간의 강도를 재료의 강성의 함수로 표시되는 스프링 상수로 대체시키며, 하중에 따른 변형에너지를 스프링의 내부에너지로 치환하고 있다.

3차원 강제-스프링 요소는 강체와 그 사이를 연결하는 2종류의 스프링으로 구성되어 있으며, 스프링강성은 각각 수직방향 변위와 접선방향 변위를 지배하는 재료 강도를 표시한다.

Fig. 2에서 보듯이 P점에 인접하고 있던 강체 I, II는 하중이 작용함에 따라 P₁, P₂로 변형하며 그 상대 변위의 크기는 $\vec{P}_1\vec{P}_2$ 가 된다.

$$\begin{aligned} \vec{U}_1^P &= \vec{r}_1^P - \vec{R}_1^P \\ &= \vec{r}_1^G + \vec{l}_1^P - (\vec{R}_1^G + \vec{L}_1^P) \\ &= \vec{r}_1^G - \vec{R}_1^G + (\vec{l}_1^P - \vec{L}_1^P) \\ \vec{r}_1^G - \vec{R}_1^G &= \vec{U}_1^G \\ \vec{l}_1^P - \vec{L}_1^P &= \theta_1 \times \vec{l}_1^P \\ &= \theta_1 \times (\vec{r}_1^P - \vec{r}_1^G) \end{aligned}$$

그러므로, 강체 I 위의 점 P₁의 변위는 (1)식으로 표시된다.

$$\vec{U}_1^P = \vec{U}_1^G + \theta_1 \times (\vec{r}_1^P - \vec{r}_1^G) \quad (1)$$

같은 방법으로 강체 II 위의 점 P₂의 변위는 다음과 같다.

$$\vec{U}_2^P = \vec{U}_2^G + \theta_2 \times (\vec{r}_2^P - \vec{r}_2^G) \quad (2)$$

결국, 변형량 $\vec{P}_1\vec{P}_2$ 는 (1), (2)에서 구해진다.

$$\vec{P}_1\vec{P}_2 = \vec{U}_2^G - \vec{U}_1^G + \theta_2 \times (\vec{r}_2^P - \vec{r}_2^G) - \theta_1 \times (\vec{r}_1^P - \vec{r}_1^G) \quad (3)$$

접점 P에서 수직단위 벡터 \vec{n} 를 (l, m, n)라 하면 수직 방향변위 δ_d 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta_d &= \vec{P}_1\vec{P}_2 \cdot \vec{n} = \delta_x \cdot l + \delta_y \cdot m + \delta_z \cdot n \\ (\text{단, } \vec{P}_1\vec{P}_2 &= (\delta_x, \delta_y, \delta_z)) \end{aligned}$$

접선방향 변위 δ_s 는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \delta_s^2 &= |\vec{n} \times \vec{P}_1\vec{P}_2|^2 \\ &= (m \cdot \delta_x - n \cdot \delta_y)^2 + (l \cdot \delta_y - m \cdot \delta_z)^2 + (n \cdot \delta_x - l \cdot \delta_z)^2 \end{aligned}$$

접점 P의 상대변위는 (δ_d, δ_s)로 되며, 인접하는 면 전체에 걸친 변형에너지(strain energy) V는 그 면 위

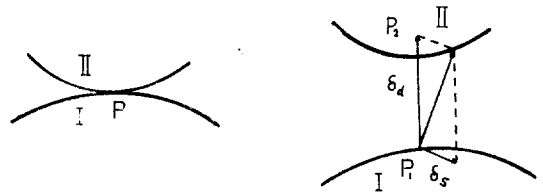


Fig. 3 Relative displacements of contact point

에 분포하는 스프링의 내부에너지의 형태로 다음과 같이 표시된다.

$$V = \frac{1}{2} \iint_S (K_d \cdot \delta_d^2 + K_s \cdot \delta_s^2) dS \quad (4)$$

여기서, K_d, K_s는 각각 재료의 탄성계수에 해당하는 스프링 상수이고, S는 접촉면을 의미한다. (4)식에 Castigliano의 정리를 적용하여 강성 matrix를 얻을 수 있다(부록 참조).

3. 보강판의 붕괴강도 해석

보강판의 비선형해석은 대변형해석[11, 12], 좌굴붕괴해석[14], 탄소성해석[12, 13] 등 여러 학자에 의해 수행되어 왔으며, 본 논문에서는 횡하중을 받고 있는 보강판이 탄성역을 지나 소성변형에 의해 어떻게 파괴되는가를 강제요소법을 이용하여 효율적으로 해석했다.

3-1. 직교 이방성판의 강제요소 모델

평판의 굽힘강성은 모멘트-곡률 관계를 이용하여 스프링 강성으로 치환된다. 등방성 평판의 굽힘강성은 일정한데 반해 이방성 판에서는 방향에 따라, 그 강성이 변하므로 스프링상수도 역시 방향의 함수이어야 한다. 여기서는 임의의 강성 D_x, D_y를 이미 알려진 굽힘강성 D_x, D_y의 함수로 표시하고, 이 D_s를 이용하여 임의의 방향의 스프링 강성 K_s를 얻었다.

이방성판의 비틀강성은 보강재의 평판에 대한 기하학적 관계에 따라 값이 변하며 본문에서는 해석의 난이성을 배제하고 정확성을 도모하기 위하여 비틀효과가 비교적 적은 모델을 선택하였다.

Fig. 4에서 미소변형후 요소 A, B의 평면에 수직단위 벡터 \vec{n}_A, \vec{n}_B 는 아래와 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \vec{n}_A &= \frac{\vec{V}_{10} \times \vec{V}_{21}}{|\vec{V}_{10} \times \vec{V}_{21}|} \\ \vec{n}_A &= \frac{\begin{vmatrix} y_{01}w_{01} & y_{12}w_{12} \\ y_{12}w_{12} & y_{01}w_{01} \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} w_{01}w_{12} & x_{01}x_{12} \\ x_{01}x_{12} & w_{01}w_{12} \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_{01}y_{01} & x_{12}y_{12} \\ x_{12}y_{12} & x_{01}y_{01} \end{vmatrix} \vec{k}}{\left(\begin{vmatrix} y_{01}w_{01} & y_{12}w_{12} \\ y_{12}w_{12} & y_{01}w_{01} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} w_{01}w_{12} & x_{01}x_{12} \\ x_{01}x_{12} & w_{01}w_{12} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_{01}y_{01} & x_{12}y_{12} \\ x_{12}y_{12} & x_{01}y_{01} \end{vmatrix}^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

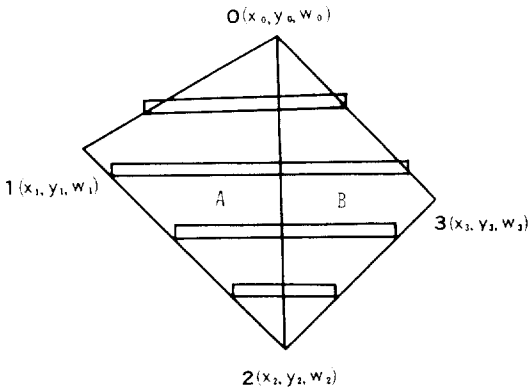


Fig. 4 Rigid element model of stiffened plate

단, $V_{ij} = V_i - V_j \quad i=0, 1, 2, 3$

$V_i = (x_i, y_i, w_i) \quad j=0, 1, 2, 3$

분자의 3항을 순서대로 D_{11}, D_{12}, D_{10} 라 하고 처짐 W 가 미소하므로 2차항을 무시하면 \vec{n}_A 는 다음과 같이 간략히 표현된다.

$$\vec{n}_A = \frac{D_{11}\vec{i} + D_{12}\vec{j} + D_{10}\vec{k}}{D_{10}} \tag{5}$$

같은 방법으로 요소 B에서의 수직단위벡터 \vec{n}_B 를 구하면 다음과 같다.

$$\vec{n}_B = \frac{\vec{V}_{32} \times \vec{V}_{03}}{|\vec{V}_{32} \times \vec{V}_{03}|}$$

$$\vec{n}_B = \frac{D_{21}\vec{i} + D_{22}\vec{j} + D_{20}\vec{k}}{D_{20}} \tag{6}$$

두요소 A, B의 접선방향의 단위벡터 \vec{i} 는 다음과 같이 표시된다.

$$\vec{i} = \frac{\vec{V}_{02}}{|\vec{V}_{02}|}$$

2차항을 무시하고 성분으로 표시하면

$$\vec{i} = \frac{x_{02}\vec{i} + y_{02}\vec{j} + w_{02}\vec{k}}{(x_{02}^2 + y_{02}^2)^{1/2}} \tag{7}$$

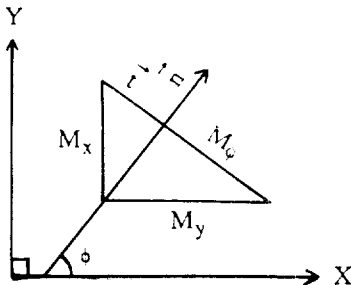


Fig. 5 Moment transformation due to coordinate rotation

관공함요소들의 상대변위는 사잇각 θ_{AB} 의 크기가 되며, θ_{AB} 는 (5), (6), (7)을 이용하여 구해진다.

$$\sin \theta_{AB} = |\vec{n}_A \times \vec{n}_B|$$

$$\vec{i} = (\vec{n}_A \times \vec{n}_B) / |\vec{n}_A \times \vec{n}_B|$$

미소변형이란 가정을 이용하면 $\sin \theta_{AB} = \theta_{AB}$ 이므로

$$\theta_{AB}^2 = (\vec{n}_A \times \vec{n}_B) \cdot (\vec{n}_A \times \vec{n}_B)$$

또는

$$\theta_{AB} = (\vec{n}_A \times \vec{n}_B) \cdot \vec{i} \tag{8}$$

(5), (6), (7), (8)식을 이용하여 유한요소법에서 흔히 사용되는 B matrix를 얻는다.

$$\theta_{AB} = -1/L_{AB}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{x_{02}x_{21} + y_{02}y_{21}}{D_{10}} + \frac{x_{20}x_{32} + y_{02}y_{32}}{D_{20}} \\ \frac{x_{02}^2 + y_{02}^2}{D_{10}} \\ \frac{x_{02}x_{10} + y_{02}y_{10}}{D_{10}} + \frac{x_{20}x_{03} + y_{02}y_{03}}{D_{20}} \\ \frac{x_{02}^2 + y_{02}^2}{D_{20}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = [B] \{w\}$$

3-2. 스프링 상수

스프링 상수는 모멘트-곡률 관계를 매개하여 굽힘강성의 함수로 표시된다. 이방성판의 x축 및 y축 방향의 모멘트-곡률 관계식은 다음과 같다.

$$M_x = D_x \cdot \gamma_x$$

$$M_y = D_y \cdot \gamma_y$$

여기서, M, D는 단위길이당 모멘트 및 굽힘강성이고 γ 는 곡률이다.

Fig. 5에서 보듯이 강체-스프링 모델에서 경사진 방향의 모멘트 M_ϕ 는 M_x, M_y 의 좌표 변환으로 표시된다.

$$M_\phi = M_x \cdot \cos^2\phi + M_y \cdot \sin^2\phi \tag{9}$$

곡률 γ_x, γ_y 와 $\gamma_{\phi x}, \gamma_{\phi y}$ 의 관계는 다음과 같다.

$$\gamma_{\phi n} = \gamma_x \cos^2\phi + \gamma_y \sin^2\phi$$

$$\gamma_{\phi t} = \gamma_x \sin^2\phi + \gamma_y \cos^2\phi \tag{10}$$

$\gamma_{\phi t} = 0$ 이므로 (10)식으로부터 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$\gamma_x = \frac{\cos^2\phi}{\cos^4\phi - \sin^4\phi} \gamma_{\phi n}$$

$$\gamma_y = \frac{-\sin^2\phi}{\cos^4\phi - \sin^4\phi} \gamma_{\phi n} \tag{11}$$

(9), (10), (11)식을 정리하면 임의의 방향의 모멘트-곡률관계를 얻을 수 있다.

$$M_\phi = D_x \cdot \gamma_x \cdot \cos^2\phi + D_y \cdot \gamma_y \cdot \sin^2\phi$$

또는

$$M_\phi = \frac{D_x \cdot \cos^4\phi - D_y \cdot \sin^4\phi}{\cos^4\phi - \sin^4\phi} \gamma_{\phi n} \tag{12}$$

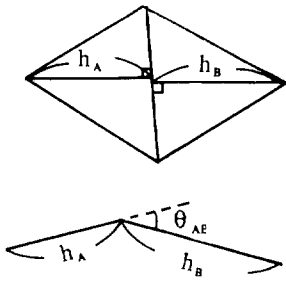


Fig. 6 Illustration of curvature

또는

$$M_\phi = D_\phi \cdot \gamma_{\phi n}$$

Fig. 6에서 곡률 $\gamma_{\phi n}$ 을 차분법을 통해 요소내 길이의 특성치와 사잇각으로 표시하고, 이 결과를 이용하여 모멘트-곡률관계식을 구한다.

$$\gamma_{\phi n} = \frac{\theta_{AB}}{1/2(h_A + h_B)}$$

$$M_\phi = \frac{2D_\phi}{h_A + h_B} \cdot \theta_{AB} \quad (13)$$

스프링 상수 K_{AB} 는 (13)식으로부터 $K_{AB} = 2D_\phi / (h_A + h_B)$ 로 됨을 알 수 있다. 결국, 이방성판의 강성에 대응되는 스프링 상수는 스프링이 인접면 전체에 걸쳐 분포하므로 점선길이 l_{AB} 를 곱하여 아래와 같이 표시 된다.

$$K_{AB} = \frac{2}{h_A + h_B} \cdot \frac{D_x \cos^4 \phi - D_y \sin^4 \phi}{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi} \cdot l_{AB} \quad (14)$$

강체요소법에서의 변형에너지는 θ_{AB} , K_{AB} 를 이용하여

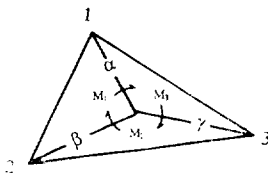


Fig. 7 Illustration of of sub-element

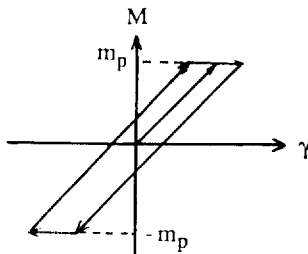


Fig. 8 Relation between moment and curvature

$V = \frac{1}{2} \theta_{AB}^T K_{AB} \theta_{AB}$ 가 되고, 여기에 가상일의 원리를 적용하면 $\delta V = \delta_w B^T K_{AB} B \cdot W$ 결국 강체 matrix는 $K_{AB} = B^T \cdot K_{AB} \cdot B$ 로 구해진다.

전술한 바와 같이 비탄성해석의 결과는 요소분할양식에 큰 영향을 받으므로 Fig. 7에서 처럼 한 요소안에 재분할요소를 만든다. 재분할하는 방법은 여러 사람에게 의해 제안되어 왔으며, 그 종류로는 Morley의 요소, Herrmann의 요소, CST 요소, LST 요소 등[13]이 있다. 본문에서는 요소내의 임의의 위치에 새로운 절점을 만들어 분할양식을 훨씬 다양화 시켰다. 재분할 요소의 강체 matrix는 각 절점선 α, β, γ 에 따라 각각의 강성 matrix $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma$ 를 만들고 이 셋을 절점별로 합침으로써 전체 강체 matrix K_G 를 얻을 수 있다.

$$K_G = K_\alpha + K_\beta + K_\gamma$$

(보강판의 치환)

보강판은 Huber가 직교이방성판으로 해석한 이래로 Pflüger, Gienke, Soper, Yamamoto 등 많은 사람이 해석해 왔다. Huber의 모델은 보강재가 평판의 위, 아래에 대칭으로 배열되어 있으므로 비대칭일 때에 흔히 문제가 되는 전단변형이 무시되었[15], W.G. Soper는 W.H. Hoppmann[11]의 실험치를 이용했고, Y. Yamamoto[13]와 A. Mansour[14]는 유효폭을 고려하여 D_x, D_y 를 추정했다.

3-3. 보강판의 항복조건 및 경계조건

강체-스프링 모델에서 항복의 판정 여부는 스프링에 작용하는 모멘트의 크기로 결정된다. 직교 이방성판의 완전소성모멘트 $M_{\phi n}$ 는 아래와 같이 직교하는 두 축의 완전소성모멘트의 좌표 변환으로 표시된다.

$$M_{\phi n} = M_{\phi x} \cos^2 \phi + M_{\phi y} \sin^2 \phi$$

$M_{\phi x}, M_{\phi y}$ 는 x 축, y 축 방향의 단위길이당 완전소성모멘트로서 다음 식을 채택하였다[16].

$$M_{\phi x} = 1/l_x \cdot (l_x t^2/m + 2d_1^2 b_1 + 2d_1 b_1 t - m d_1^2 b_1^2/l_x) \sigma_Y$$

$$M_{\phi y} = 1/l_y \cdot (l_y t^2/n + 2d_2^2 b_2 + 2d_2 b_2 t - n d_2^2 b_2^2/l_y) \sigma_Y$$

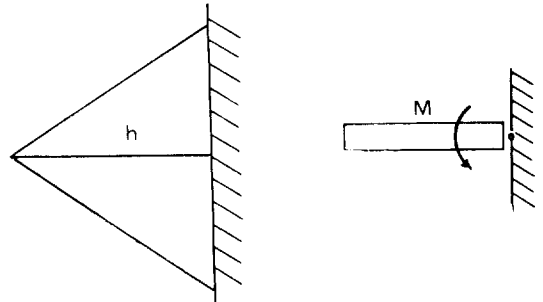


Fig. 9 Illustration of bandary conditions

Table 1 Stiffness matrix of rigid model for stiffened plate

	W_0	W_1	W_2	W_3
F_0	$\frac{D_{20}}{D_{10}}(y_{12}^2x + x_{12}^2)$ $+\frac{D_{10}}{D_{20}}(y_{23}^2 + x_{23}^2)$ $-2(y_{12}y_{23} + x_{12}x_{23})$	$\frac{D_{20}}{D_{10}}(y_{12}y_{20} + x_{12}x_{20})$ $-(y_{23}y_{20} + x_{23}x_{20})$	$\frac{D_{20}}{D_{10}}(y_{12}y_{01} + x_{12}x_{01})$ $+\frac{D_{10}}{D_{20}}(y_{23}y_{30} + x_{23}x_{30})$ $-(y_{12}y_{20} + y_{23}y_{01})$ $+x_{12}x_{30} + x_{23}x_{01})$	$\frac{D_{10}}{D_{20}}(y_{23}y_{02} + x_{23}x_{02})$ $-(y_{12}y_{02} + x_{12}x_{02})$
F_1		$\frac{D_{20}}{D_{10}}(y_{20}^2 + x_{20}^2)$	$\frac{D_{20}}{D_{10}}(y_{20}y_{01} + x_{20}x_{01})$ $-(y_{20}y_{30} + x_{20}x_{30})$	$y_{20}^2 + x_{20}^2$
F_2			$\frac{D_{20}}{D_{10}}(y_{01}^2 + x_{01}^2)$ $\frac{D_{10}}{D_{20}}(y_{30}^2 + x_{30}^2)$ $-2(y_{01}y_{30} + x_{01}x_{30})$	$\frac{D_{10}}{D_{20}}(y_{30}y_{02} + x_{30}x_{02})$ $-(y_{01}y_{02} + x_{01}x_{02})$
F_3	S. Y. M.			$\frac{D_{10}}{D_{20}}(y_{30}^2 + x_{30}^2)$

($\times \frac{K_{AB}}{D_{10}D_{20}}$)

Table 2 Bending rigidity of orthotropic plate

	Huber	Y. Yamamoto	W.G. Soper	A. Mansour
D_x	$\frac{Et^3}{12b_x(1-\nu^2)} + \frac{2}{b_x}$ $\left[\frac{b_1d_1^3}{3} + \frac{b_1d_1t}{4}(2d_1+t) \right]$	$D + \frac{EI}{b_x} + \frac{EtZ_x^2}{1-\nu^2}$	$\frac{h_b^3S_{22}}{12(S_{11}S_{22}-S_{12}^2)}$	$\frac{EI_x}{S_x(1-\nu^2)}$
D_y	$\frac{Et^3}{12b_y(1-\nu^2)} + \frac{2}{b_y}$ $\left[\frac{b_2d_2^3}{3} + \frac{b_2d_2t}{4}(2d_2+t) \right]$	$D + \frac{EI}{b_y} + \frac{EtZ_y^2}{1-\nu^2}$	$\frac{h_b^3S_{11}}{12(S_{11}S_{22}-S_{12}^2)}$	$\frac{EI_y}{S_y(1-\nu^2)}$
	t : 평판의 두께 b_1, b_2 : 보강재의 두께 d_1, d_2 : 보강재의 높이 b_x, b_y : 보강재간 거리	$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ I : 보강재의 2차모멘트 Z_x, Z_y : 유효폭을 고려한 평판중심과 T형 단면사이의 편심거리	참고문헌 (11) 참조	(14) 참조 I_x, I_y : 유효폭을 고려한 단면의 2차 모멘트

여기서,

$$l_x/mt \geq d_1b_1, l_y/nt \geq d_2b_2$$

l_x, l_y : x축 및 y축 방향 모델 길이

m, n : x축 및 y축 방향 보강재의 수

σ_y : 항복응력

모멘트-곡률관계는 변형경화와 Basuschinger효과를 무시하여 Fig. 8과 같이 이상화했다.

자유단의 경계조건은 유한요소법과 동일하며, 단순 지지와 완전고정은 경계면에 분포된 절점선의 스프링

강성의 크기로 표시된다.

모멘트-곡률 관계식은 $M_{\phi n} = D_{\phi} \cdot \gamma_{\phi n}$ 이고, 곡률 $\gamma_{\phi n}$ 은 그림에서 보듯이 $\gamma_{\phi n} = (2/h) \cdot \theta$ 이므로 스프링상수 K_b 는 $K_b = 2 \cdot D_{\phi} \cdot l/h$ 이다. 단순지지는 $K_b = 0$, 완전고정은 $K_b = 2 \cdot D_{\phi} \cdot l/h$ 이다.

4. 수치해석 결과 및 고찰

강제요소를 이용한 본 해석법의 유효성을 검증하기

위하여 전술한 이론에 따라 프로그램을 작성하여 Fig. 10과 같이 1축 및 2축 방향으로 보강된 판의 균일분포 하중하에서의 소성붕괴 거동을 수치해석하였다,

Fig. 11에 초기 입력시의 요소분할상태와 Morley의 요소를 이용한 요소의 재분할 메턴을 나타내었다. 요소 재분할 기법의 채택 결과 주변 단순지지의 평판에서는 약 7%, 보강판(Model 1)에서는 약 11%정도 결과의 정도가 향상됨을 확인할 수 있었다(Table 4 참조).

Fig. 12 및 Fig. 13은 단순지지된 보강판 model 1

Table 3 Material properties of model(kg/mm²)

Young's modulus	Shear modulus	Yield strength	Tensile strength
2.00×10^4	8.4×10^3	22	45

Table 4 Comparison of collapse loads

구 분	붕괴 하중 (kg/mm ²)		
	이 론 치	초기분할	재 분 할
평 판	0.872	0.933	0.876
보강판(Model 1)	1.510	1.700	1.530

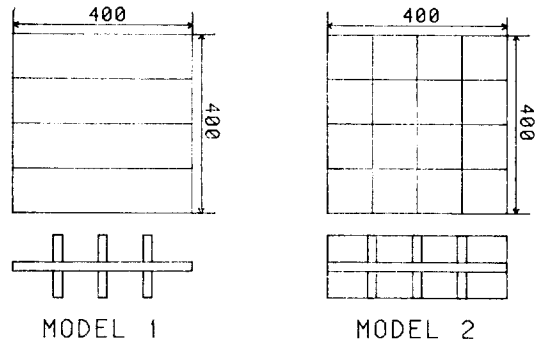


Fig. 10 Geometry of stiffened plates models

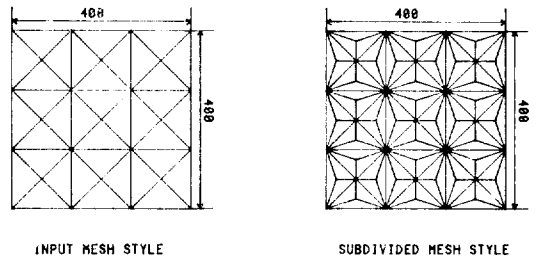


Fig. 11 Illustration of mesh subdivision

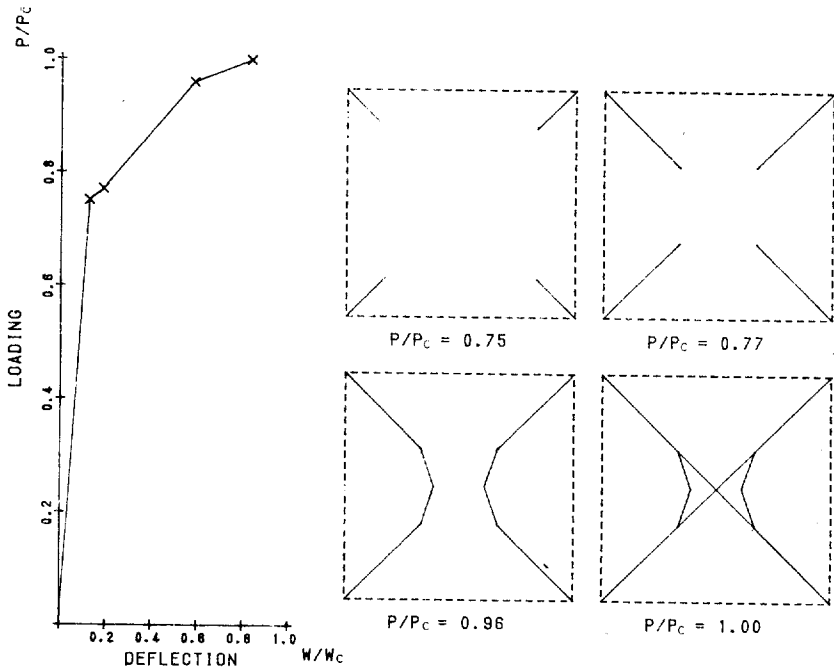


Fig. 12 Collapse behavior of simply supported stiffened plate under uniform lateral loading (Model 1) $P_c=1.53\text{kg/mm}^2$

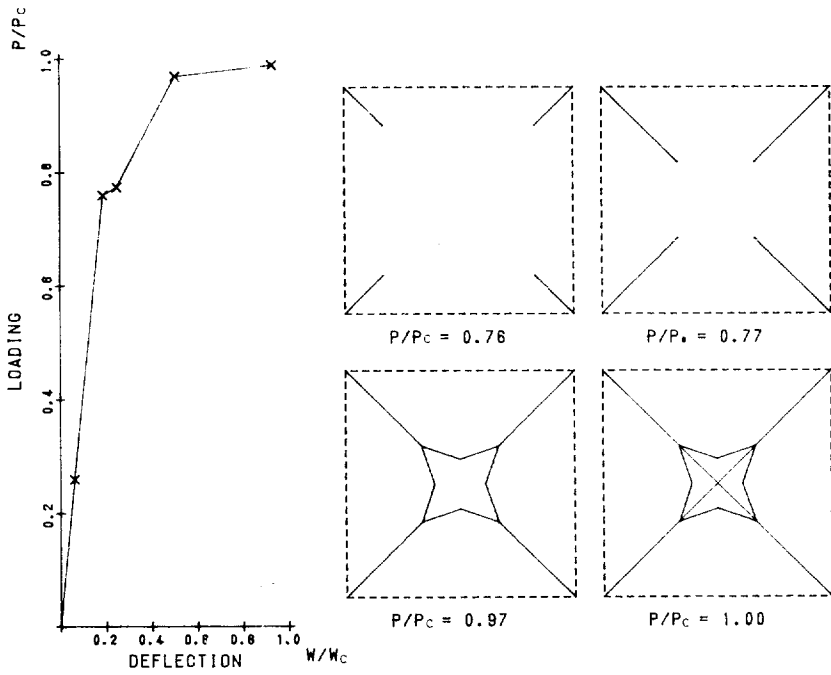


Fig. 13. Collapse behavior of simply supported stiffened plate under uniform lateral loading (Model 2) $P_c=2.19\text{kg/mm}^2$

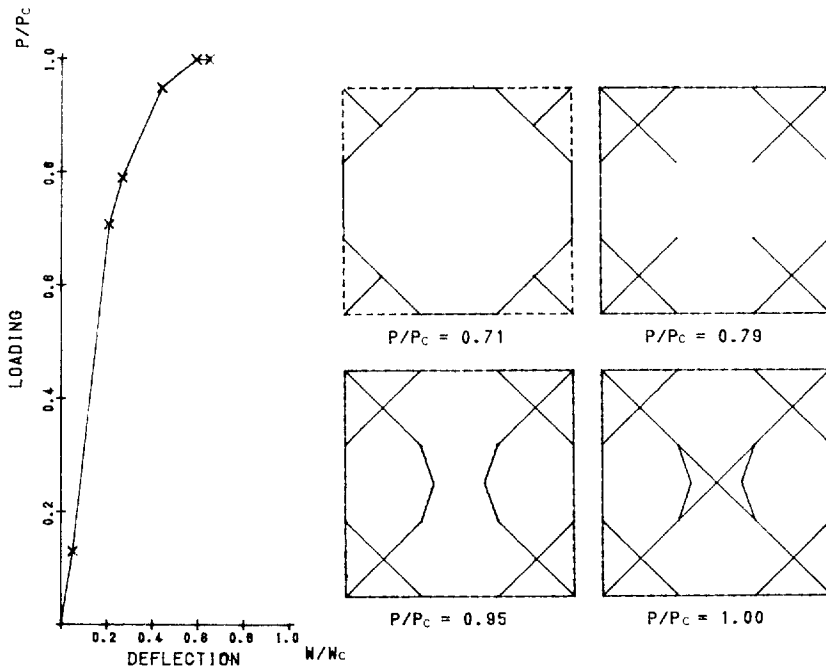


Fig. 14 Collapse behavior of clamped stiffened plate under uniform lateral loading (Model 1) $P_c=2.49\text{kg/mm}^2$

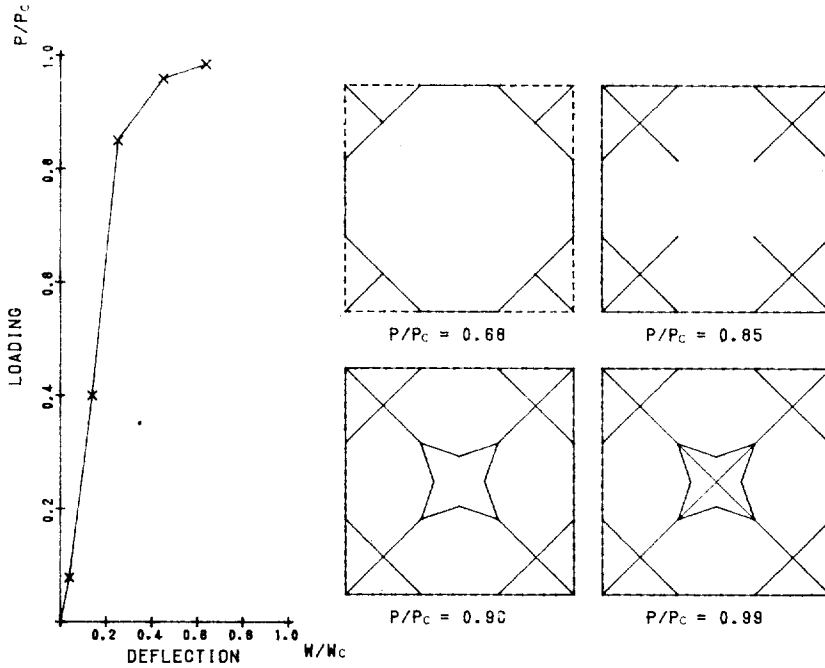


Fig. 15 Collapse behavior of clamped stiffened plate under uniform lateral loading (Model 2)
 $P_c=3.75\text{kg/mm}^2$

및 2의 균일분포하중에서의 소성붕괴거동을 하중을 증가시키면서 강제요소법을 이용하여 계산한 결과이다. 최종붕괴에 이르기까지 소성 hinge line의 발생 및 성장과정을 추적할 수 있어 붕괴하중, 붕괴 mode 및 변형까지 정확한 계산이 가능함을 알 수 있다. model 1과 Model 2의 붕괴 mode는 하중이 작을 때는 거의 비슷하나 붕괴하중에 가까와 오면 Model 1의 경우는 강성의 비대칭성(1축 보강) 때문에 2축 균등보강판인 Model 2에 비해 hinge line의 전파가 비대칭적으로 됨을 알 수 있다. 또 붕괴하중은 Model 2가 Model 1에 비해 약 40% 증가한 것은 2축 보강에 의한 당연한 결과라고 하겠다.

Fig. 14 및 Fig. 15에는 주변 고정인 보강판에 대한 결과를 도시하였다. 단순지지의 경우와는 상당히 다른 붕괴 pattern을 보이고 있으나 Model 1, 2 사이의 경향은 앞의 그림과 유사함을 알 수 있다.

5. 결 론

剛體 및 스프링 모델을 이용한 剛體要素法을 補剛板의 塑性崩壞強度解析에 확장하여 수치해석을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 평판의 소성해석에 이용되어 온 剛體-스프링 모델 이론을 확장하여 補剛板의 소성붕괴해석을 효과적으로 수행하는 해석법을 제안하였다. 즉,

(2) 종래 극한소성해석법(limit analysis)에서는 평판이나 보강판의 붕괴 mode를 가정하여 최고하중만을 근사적으로 구할 수 있었으나, 본 해석법에 의하면 소성붕괴에 이르는 전과정을 추적할 수 있어 붕괴 mode의 정확한 규명, 최고붕괴하중 및 붕괴할 때까지의 탄소성 변형을 계산할 수 있다.

(3) 절점의 처짐과 회전변형을 동시에 고려해야 하는 종래 유한요소법에 비하여, 절점의 처짐만을 고려하여 붕괴거동을 해석할 수 있어, 강성행렬의 자유도를 크게 줄일 수 있으므로 효율적인 계산의 수행이 가능하다.

(4) 종래 유한요소법은 요소내의 변형만을 고려하고 있어 판의 소성붕괴해석을 수행하면 극한소성해석에 의한 이론치보다 붕괴하중이 상당히 크게 나오는 것이 일반적으로 불가피하나, 본 해석법은 요소간 변형을 고려하고 있으므로 소성붕괴기구를 포함하도록 요소분할만 하면 극한해석에 의한 이론붕괴하중을 정확히 구할 수 있다.

(5) Morley요소를 도입하여 자동요소재분할 기법을

활용하여 붕괴 mode의 다양화와 개선을 통하여 초기의 적은 수의 분할로도 精度가 높은 해를 구할 수 있다.

참 고 문 헌

[1] 川井忠彦, 近藤一夫, “新し離散化モデルによる析の曲代崩壊解析”, 日本造船學會論文集, 142, pp.190-196, 1977.
 [2] R. Hill, “The Mathematical Theory of Plasticity”, Oxford University Press, 1971.
 [3] Leonard A. Lopez, Alfredo H.S. Ang., “Discrete Model Analysis of Elastic-Plastic Plates”, *Proceedings of the ASCE*, Engineering Mechanics Division, Feb. 1968.
 [4] W. Prager, “The General Theory of Limit Design,” *Proc. 8th Int. Cong. Appl. Mech.*, Istanbul, 1952.
 [5] T. Kawai, “New Element Models in Discrete Structural Analysis”, *J. Soc. Nav. Arch. Japan*, Vol. 141, 1977.
 [6] T. Kawai, “New Discrete Structural Models and Anaysis”, Int. Conf. Finite Element in Nonlinear Solid and Structural Mechanics, Oslo, Norway, 8.29~9.1, 1977.
 [7] Yutaka Toi, T. Kawai, “Transient Response Analysis of an Elasto-Viscoplastic Beam Subjec-

ted to Transverse Impact”, *Seisan Kenkyu*, Vol. 29, No. 12, 1977.
 [8] Yutaka Toi, T. Kawai, “A New Discrete Analysis on Dynamic Collapse of Structures”, *J. Soc. Nav. Arch. Japan*, Vol. 145, 1979.
 [9] T. Kawai, Norio Takeuchi, “A Discrete Method of Limit Analysis with Simplified Elements”, Conference Meeting of ASCE, 1981.
 [10] 장영식, “강체-스프링 모델에 의한 평판의 최종 강도해석”, 서울대학교 석사논문, 1981.
 [11] W.G. Super, “Large Deflection of Stiffened Plates”, *Transactions of ASME*, 1958.
 [12] 양영순, “Nonlinear Analysis of Ships Plating under Lateral Loads”, 서울대학교 공학박사 논문.
 [13] Y. Yamamoto, H. Ohtsubo, “Semi-Automatic Mesh-Generation Applied to Elasto-plasto Finite Element Analysis of Stiffened Plates”, *J. Soc. Nav. Arch. Japan*, Vol. 147, 1980.
 [14] A. Mansour, “Post-Buckling Behavior of Stiffened Plates with Small Initial Curvature under Combined Loads”, *J. of Ship Research*, 1969.
 [15] M.S. Troitsky, “Stiffened Plates”, Elsevier Scientific Publishing Company, 1976.
 [16] 秋田好雄, “防撓板の最小重量設計”, 日本造船學會誌 464號, 1967.2.

부록 3-D. 강체요소의 강성 matrix 유도

강성 matrix의 구체적인 모양은 요소의 geometry가 완전히 선정되어야 결정되나 여기서는 3-D 강체요소의 강성 matrix의 개념적인 계산을 소개하고자 한다[5, 6].

(3-D. 강체-스프링 모델의 강성 matrix)

$$V = \frac{1}{2} \iint_S (k_d \delta_x^2 + k_s \delta_y^2) dS \tag{A-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (k_d \delta_x^2 + k_s \delta_y^2) &= \frac{1}{2} [(k_d(l\delta_x + m\delta_y + n\delta_z))^2 + k_s \{(m\delta_x - n\delta_y)^2 + (n\delta_x - l\delta_y)^2 + (l\delta_y - m\delta_x)^2\}] \\ &= \frac{1}{2} [k_s(\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2) + (k_d - k_s)(l^2\delta_x^2 + m^2\delta_y^2 + n^2\delta_z^2 + 2lm\delta_x\delta_y + 2mn\delta_y\delta_z + 2nl\delta_x\delta_z)] \\ &= \frac{1}{2} [\delta_x, \delta_y, \delta_z] \cdot \begin{pmatrix} k_s & 0 & 0 \\ 0 & k_s & 0 \\ 0 & 0 & k_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{pmatrix} + \frac{1}{2} [\delta_x, \delta_y, \delta_z] \cdot \begin{pmatrix} (k_d - k_s)l^2 & (k_d - k_s)lm & (k_d - k_s)ln \\ (k_d - k_s)lm & (k_d - k_s)m^2 & (k_d - k_s)m \cdot n \\ (k_d - k_s)ln & (k_d - k_s)nm & (k_d - k_s)n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \{\delta\}^T [D] \{\delta\} \tag{A-2} \end{aligned}$$

그러므로,

$$[D] = \begin{pmatrix} k_d l^2 + k_s(1-l^2) & (k_d - k_s)lm & (k_d - k_s)nl \\ (k_d - k_s)lm & k_d m^2 + k_s(1-m^2) & (k_d - k_s)mn \\ (k_d - k_s)ln & (k_d - k_s)mn & k_d n^2 + k_s(1-n^2) \end{pmatrix} \quad (A-3)$$

(A-2)식에 의하면,

$$V = \frac{1}{2} \iint \{\delta\}^T [D] \{\delta\} dS = \frac{1}{2} \{\delta u\}^T [B]^T [K] [B] \{u\} dS = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} \quad (A-4)$$

(A-4)식에 의해,

$$[K] = \iint [B]^T [D] [B] dS \quad (A-5)$$

Castigliano의 정리에 의하면 강성방정식이 아래와 같이 표시된다.

$$R = \frac{\partial V}{\partial u} = [K] \{u\} \quad (A-6)$$

여기서, $R^T = [X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1; X_2, Y_2, L_2, M_2, N_2]$

윗식에서 보듯이 $[K]$ 는 (12×12) 대칭 matrix가 된다.

$$K = [K_{i,j}] \quad (i, j = 1, 2, \dots, 12)$$

X_1 의 강성계수를 구해보면,

$$X_1 = \frac{\partial V}{\partial u_1} = \int \left(k_d \delta_u \frac{\partial \delta_u}{\partial u_1} + k_s \delta_s \frac{\partial \delta_s}{\partial u_1} \right) dS \\ = k_{11}u_1 + k_{12}v_1 + k_{13}w_1 + k_{14}\theta_1 + k_{15}\phi_1 + k_{16}\chi_1 + k_{17}u_2 + k_{18}v_2 + k_{19}w_2 + k_{1,10}\theta_2 + k_{1,11}\phi_2 + k_{1,12}\chi_2$$

그러므로,

$$K_{11} = \int \{k_d l^2 + k_s(1-l^2)\} ds = -k_{17}$$

$$K_{12} = \int (k_d - k_s) l m ds = -k_{18}$$

$$K_{13} = \int (k_d - k_s) l n ds = -k_{19}$$

$$K_{14} = \int (k_d - k_s) l \{n(y-y_1) - m(z-z_1)\} ds$$

$$K_{15} = \int [k_d l \{l(z-z_1) - n(x-x_1)\} + k_s \{(1-l^2)(z-z_1) + l n(x-x_1)\}] ds$$

$$K_{16} = \int [k_d l \{m(z-z_1) - l(y-y_1)\} - k_s \{(1-l^2)(y-y_1) + l m(x-x_1)\}] ds$$

$$K_{1,10} = \int [k_d l \{m(z-z_2) - n(y-y_2)\} + k_s l \{-m(z-z_2) + n(y-y_2)\}] ds$$

$$K_{1,11} = \int [k_d l \{-l(z-z_2) + n(x-x_2)\} + k_s \{-(1-l^2)(z-z_2) + l m(x-x_2)\}] ds$$

$$K_{1,12} = \int [k_d l \{l(y-y_2) - m(x-x_2)\} + k_s \{(1-l^2)(y-y_2) + l m(x-x_2)\}] ds$$

같은 방법으로 $[K]$ 의 나머지 항도 구할 수 있다.