

論 文

大韓造船學會誌
第25卷 第4號 1988年 12月
Journal of the Society of
Naval Architects of Korea
Vol. 25, No. 4, December 1988

2차원 쇄파의 수치해석*

조 일 형**, 최 항 순***

Numerical Simulation of Two-dimensional Breaking Waves

by

Il H. Cho** and Hang S. Choi***

Abstract

In this paper two-dimensional breaking waves of plunger type are numerically simulated both on an even bottom and on a sinusoidally-varying bottom within the framework of potential theory. Based on the boundary integral method derived by Vinje and Brevig, fluid particles on the free surface are traced exactly by using semi-Lagrangian time-stepping. Numerical instability, in particular when the wave front becomes vertical, is discussed and the regridding method of nodal points has been found promising. Numerical accuracy is examined in terms of the wave energy and mass conservations. It is also found that the bottom topography affects significantly and the hydrostatic pressure contributes considerably to the nonoscillating force acting on the bottom, when waves are breaking.

1. 서 론

폭풍이 치는 해양이나 해안가에 발생하는 쇄파는 강한 비선형 자유표면 현상의 대표적인 예이다. 이러한 문제는 기존의 파 이론으로는 해석이 불가능하다. 근래에 들어 많은 학자들이 여러가지 방법들을 사용하여 쇄파를 해석하고자 노력하였지만, 아직까지 만족스런 결과가 나오지 못한 실정이다. 본 연구에서는 강한 비선형 현상 중의 하나인 plunger형의 2차원 쇄파를 포텐셜 유동이라는 가정하에서 경계 적분법(boundary integral method)을 이용하여 수치 해석하고자 한다. 이 방법은 자유표면상에 특이점을 분포시켜 시간에 따

라 쫓는 semi-Lagrangian time-stepping method를 이용한다. Semi-Lagrangian time-stepping method는 Longuet-Higgins & Cokelet(1976)이 소개한 이후 다양한 비선형 자유표면 문제의 해법 개발에 이용되어 왔다.

Longuet-Higgins & Cokelet(1976)는 이 방법을 이용하여 2차원 심해에 대한 쇄파를 실제의 평면에서 계산하지 않고 등각사상을 통한 사상 평면에서 운동방정식을 풀어 해석하였다. Faltinsen(1977)은 이 방법을 수정하여 직접 실제의 평면에서 2차원 부유체의 수치 운동에 적용하였다. 즉, 비선형의 내부해와 Rankine dipole로 표시된 외부해를 matching시켜 해를 구하였다. 이 방법의 단점은 바깥영역에는 파가 존재하지 않

接受日字: 1988년 5월 19일, 제집수일자: 1988년 7월 22일.

* 본 논문은 1988년도 대한조선학회 춘계 연구발표회에서 발표된 논문임.

** 학생회원, 서울대학교 대학원

*** 정회원, 서울대학교 공과대학 조선공학과

기 때문에 내부 계산영역이 시간에 따라 증가하지 않는다면 계산이 증진되는 점이다. Vinje & Brevig (1981a, b)는 Longuet-Higgins & Cokelet 방법을 수정하여 유한 수심에 대한 해파를 다루었다. 그들은 Cauchy integral theorem을 복소포텐셜에 적용하여 자유표면상에서는 유량함수를 그리고 바닥에서는 속도 포텐셜을 미지수로 택하여 제 2종 Fredholm 적분 방정식을 풀었다. 한편 Baker, Meiron & Orszag(1982)은 자유표면상에 다브릿을 분포시켜 제 2종 Fredholm 적분 방정식을 수치적으로 풀었으며, Dold & Peregrine (1986)는 2차원 해파에 대하여 위의 방법들을 적용하여 계산결과의 정확성과 계산시간을 비교 검토하였다. 본 논문에서는 Vinje & Brevig 방법을 채택하여 해저면 변화에 따른 파형의 변화와 해저면에 작용하는 압력의 분포 및 힘을 계산하였다.

2. 문제의 정식화

2.1. 경계적분 방정식

2차원 유체영역내에서 파는 x 축에 대해 주기적이며, 유체는 비점성, 비압축성으로 유동은 비회전성으로 가정하는 포텐셜 이론에 근거를 두고 표면장력은 무시하였다. 본 논문에서 사용한 좌표계는 Fig. 1과 같은 공간고정 좌표계이다. 자유표면상의 유체입자는 항상 자유표면상에 머물어 있어야 한다는 운동학적 자유표면 경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{Dz}{dt} = u + iv \equiv w^* \tag{1}$$

여기서 $z = x + iy$ 이며, *는 공액복소수를 뜻한다.

또한 자유표면상에서는 압력이 일정하므로 동역학적 자유표면 경계조건은

$$\frac{D\phi}{dt} = \frac{1}{2}ww^* - gy - P_s/\rho \tag{2}$$

가 된다. 여기서 P_s 는 자유표면상에 적용된 임의의 압력분포이다. 식 (1), (2)는 자유표면의 실제의 위치에 서 만족되어야 한다.

2.2. Cauchy integral theorem

기본가정에 따라 속도 포텐셜 ϕ 와 유량함수 ψ 는 유체영역내에서 Laplace 방정식을 만족한다. 따라서 복소 포텐셜 ($\beta = \phi + i\psi$)은 z 의 해석함수이다. 이 경우에 z_0 가 닫혀진 영역 C 밖에 있을 때 (Fig. 1 참조) Cauchy integral theorem의 결과는 아래와 같다,

$$\oint_C \frac{\phi + i\psi}{z - z_0} dz = 0 \tag{3}$$

복소포텐셜 β 가 다른 해석함수 $\frac{d}{dz}(\phi + i\psi)$ 또는 $\frac{\partial}{\partial t}(\phi + i\psi)$ 로 대체될 때도 (3)식은 그대로 성립한다. 경계면 C 가 C_ϕ 와 C_ψ 로 구성되었다고 하자. 여기서 C_ϕ 는 속도포텐셜 값이 주어진 경계면을, 그리고 C_ψ 는 유량함수 값이 주어진 경계면을 뜻한다.

i) z_0 가 바깥영역에서 경계면 C 에 접근할 때, (3)식을 이용하면 다음의 두가지 식을 유도할 수 있다.

$$\pi\phi(x_0, y_0; t) + Re\left\{ \int_C \frac{\phi + i\psi}{z - z_0} dz \right\} = 0 \tag{4}$$

for z_0 on C_ϕ

$$\pi\psi(x_0, y_0; t) + Re\left\{ i \int_C \frac{\phi + i\psi}{z - z_0} dz \right\} = 0 \tag{5}$$

for z_0 on C_ψ .

이 두 방정식은 C 상에서 제 2종 Fredholm 적분 방정식으로 나타난다. 이 방정식을 풀어서 경계면 C 상에서 복소 포텐셜을 구한다.

ii) z_0 가 경계면 내부에 있을 때

복소 포텐셜은 다음과 같다.

$$\beta(z_0; t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\beta(z; t)}{z - z_0} dz \tag{6}$$

속도 및 z 에 대한 미분값은

$$w(z_0; t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\beta(z; t)}{(z - z_0)^2} dz \tag{7}$$

$$\frac{dw(z_0; t)}{dz} = \frac{2}{2\pi i} \oint_C \frac{\beta(z; t)}{(z - z_0)^3} dz \tag{8}$$

가 된다. 식 (4), (5), (7), (8)을 이용하여 가속도는 다음과 같다.

$$a_x - ia_y = \frac{\partial w}{\partial t} + w \left(\frac{dw}{dz} \right)^* \tag{9}$$

압력은 Bernoulli 방정식을 이용하여 구한다.

$$-\frac{p(x, y; t)}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}ww^* + gy \tag{10}$$

3. 수치계산

3.1. 영향 함수

식 (4), (5)의 적분 방정식을 수치 계산하기 위하여 Fig. 1과 같이 경계면을 여러개의 선분으로 분할하여, β , $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ 는 C 상의 분할점들 사이에서 선형적으로 변한다고 가정한다. 따라서 분할점에서의 복소함수의 영향 함수는 다음과 같이 정의된다(부록 참조).

$$A_j(z) = \frac{z - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}}, \quad z_j \leq z \leq z_{j+1} \text{ on } C$$

$$A_j(z) = \frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}}, \quad z_{j-1} \leq z \leq z_j \text{ on } C \tag{11}$$

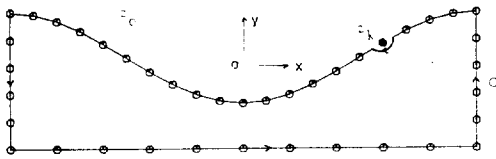


Fig. 1 Definition sketch

$A_j(z)=0$ elsewhere on C

A_i 를 (3)식에 적용하면, 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$\oint_C \frac{\phi + i\psi}{z - z_k} dz \cong \sum_j \Gamma_{k,j}(z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, z_k) \beta_j(z_j; t) = 0 \quad (12)$$

$$\oint_C \frac{\frac{\partial \phi}{\partial t} + i \frac{\partial \psi}{\partial t}}{z - z_k} dz \cong \sum_j \Gamma_{k,j}(z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, z_k) \cdot \frac{\partial \beta_j(z_j; t)}{\partial t} = 0 \quad (13)$$

여기서 $\Gamma_{k,j}$ 는 대수 방정식의 영향함수이다(부록 참조). 식 (12), (13)에서 z_k 가 경계면 C 의 어느 부분에 속해 있나에 따라 실수부 또는 허수부를 취하면 식 (4) 또는 (5)를 얻게 된다.

3.2. 수치 적분 방법

자유표면 경계조건 식 (1), (2)을 시간에 따라 적분하기 위해서 Hamming's 4th-order predictor/corrector 방법을 이용하였다. 그러나 이 방법은 최소한 4개의 시간 간격에서의 값을 알아야 하므로 처음 3번째 시간 간격까지는 4th-order Runge-Kutta 방법을 이용하였다. Hamming 방법은 대수방정식 식 (12), (13)을 각 시간에서 2번만 풀게 되므로 Runge-Kutta 방법에서 요구되는 4번의 계산에 비해 시간을 절약할 수 있다.

3.3. 수치적 불안정성

서론에서 언급한 수치적 불안정성은 계산시간간격 Δt 를 줄임으로써 어느 정도 피할 수 있지만, 불안정성이 심한 구간에서는 Δt 를 아무리 줄여도 수치적 불안정성 때문에 계산이 중지된다. 이 현상의 근본적인 원인은 Lagrangian 입자들이 속도가 큰 지역에 집중되어 계산이 정확하지 못한 점에 기인한다. 선형자유표면 경계조건에 대해 von Neumann식 안정성해석을 수행하여 안정성에 대한 Courant condition을 다음과 같이 유도할 수 있다(Dommermuth & Yue, 1985).

$$(\Delta t)^2 \leq \frac{8\Delta x}{\pi g} \quad (14)$$

여기서 Δt 는 시간간격이고, Δx 는 분할요소 간격의 특성길이를 의미한다. 고정된 Δt 에 대해 분할요소 간격이 적절히 조절되지 않는다면, 시간이 진행되면서 식

(14)에 제시한 조건을 만족하지 않기 때문에 수치적 불안정성을 피할 수 없게 된다. 따라서 regridding method을 사용하여 적절한 시간마다 Lagrangian 입자들의 간격이 일정하게 되도록 조절하였다. 그 결과 수치적 불안정성을 어느 정도 극복할 수 있었다. 이 방법의 잇점은 다음과 같이 요약할 수 있다.

i) 인위적인 구속력을 지니는 순정기법이 요구되지 않는다.

ii) 계산수행시 Lagrangian 입자를 첨가하거나 뺄 수가 있다.

iii) 계산시간을 절약할 수 있다.

3.4. 수치계산 결과의 검증

계산결과와 타당성을 살펴보기 위해 다음의 2가지 물리량을 검증하였다.

i) 에너지 보존

운동에너지는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E_k = \frac{\rho}{2} \iint_V (u^2 + v^2) dv \quad (15)$$

식 (15)에 Green theorem을 적용하면

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_C \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad (16)$$

로 표시되며 수치계산상의 편리를 위하여 윗식을 다시 변형하면

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_C \phi \frac{\partial \phi}{\partial s} ds \quad (17)$$

와 같이 된다.

한편 위치 에너지는 다음과 같다.

$$E_p = \frac{\rho g}{2} \int y^2 dx \quad (18)$$

따라서 전체에너지는 두 에너지의 합으로 표현된다.

$$E_T = E_k + E_p \quad (19)$$

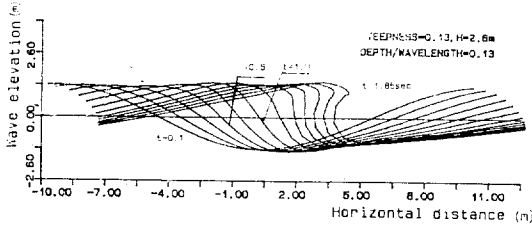
ii) 질량 보존

질량이 경계영역안에서 일정하게 보존하는가를 알아보기 위해서, 경계면 C 을 통하여 나가는 유량을 검증하였다.

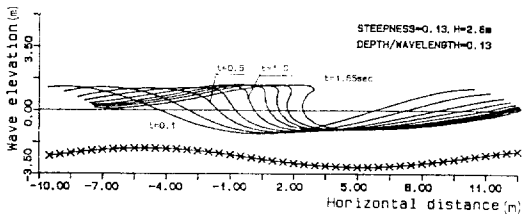
$$Q = \int_C \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = \int_C \frac{\partial \phi}{\partial s} ds \quad (20)$$

4. 계산 결과 및 고찰

자유표면의 초기조건으로 진폭이 큰(기울기=0.13) sine파를 택하였다. 선형이론을 이용하여 속도포텐셜을 계산하여 이를 자유표면에 유효한 초기 포텐셜로 사용하였다. 자유표면을 40개의 선분으로 균등하게 분할하였다. 시간간격 Δt 를 선정하는데 있어, 시간간격 Δt 가 큰 경우에는 수치계산이 불안정하게 되기 쉽고,



(a) even bottom ($t=0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.9, 1.0, 1.3, 1.45, 1.55, 1.65, 1.75, 1.85$ sec)



(b) sinusoidal bottom ($t=0.1, 0.3, 0.5, 0.9, 1.0, 1.3, 1.45, 1.55, 1.65$ sec)

Fig. 2 Time evolution of free surface

시간간격 Δt 가 너무 작으면 계산시간이 길어지게 되므로 적절히 선택하여야 한다. 본 계산에서는 $\Delta t=0.005$ sec로 택하였다.

Fig. 2는 천수에서 해저면이 일정한 경우와 해저면이 sine함수로 변하는 경우에 시간이 경과함에 따라 초기의 sine파에서 쇄파가 형성될 때까지 파형의 변화를 보여주고 있다. 파정이 수직이 되는 경우에 시간간

격 Δt 를 아무리 줄여도 수치적 불안정성 때문에 계산이 수행되지 않았다. 이 원인은 앞에서 설명했듯이 Lagrangian 입자의 집중에 기인하므로, 이 순간에서 cubic spline method를 이용하여 입자의 간격이 일정하게 되도록 조절하여 계산을 좀 더 진행시켰다. 해저면이 sine함수로 변하는 경우에는 파가 해저면의 영향을 받아 해저면이 일정할 때보다 파가 빨리 깨어지는 것을 볼 수 있다.

Fig. 3은 각 순간에서 파의 형태, 입자속도의 크기와 방향을 보여주고 있는데, 계산된 입자속도의 최대치가 선형이론에서의 위상속도(C_0)보다 대략 1.8배나 크다는 것을 알 수 있다. 이것이 쇄파의 대표적인 현상이라 할 수 있다.

Fig. 4는 횡축을 입자의 수평속도, 종축을 수직속도로 잡아 phase diagram을 그렸다. 그림에서 종축의 오른쪽 부분은 파정의 위상을 나타내며, 왼쪽 부분은 파저를 의미한다. 또한 타원의 윗부분은 파의 앞면이고 아랫부분이 파의 뒷면을 나타낸다. 계산이 진행함에 따라 파정에서 속도가 커지며 점차 아랫방향으로 진행하는 것을 볼 수 있다.

Fig. 5는 횡축을 계산시간, 종축을 $\frac{1}{4} \rho g \zeta^2$ 로 무차원시킨 파 에너지로 잡아 각 경우에 대해 운동에너지,

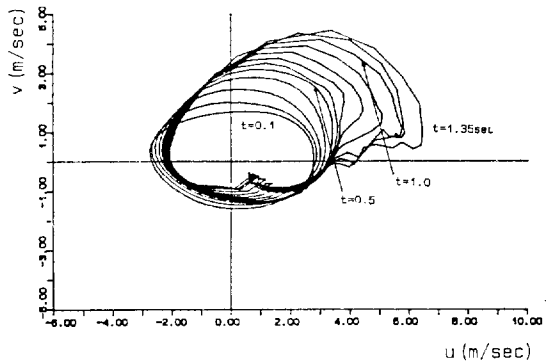


Fig. 4 Phase diagram for sinusoidal bottom

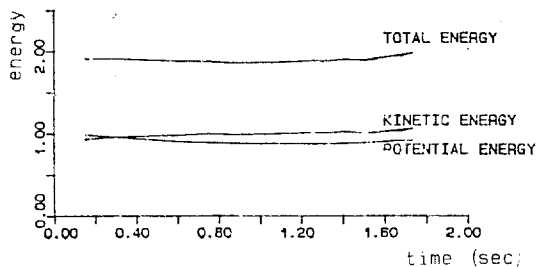


Fig. 5 Time evolution of wave energy in case of even bottom

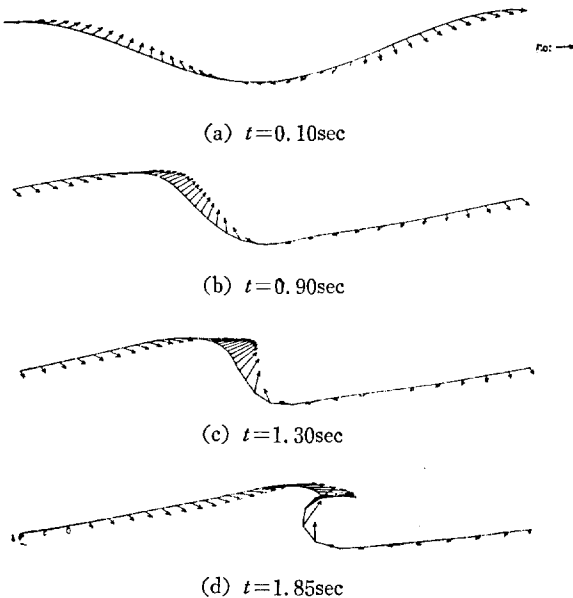


Fig. 3 Velocity fields on free surface for even bottom

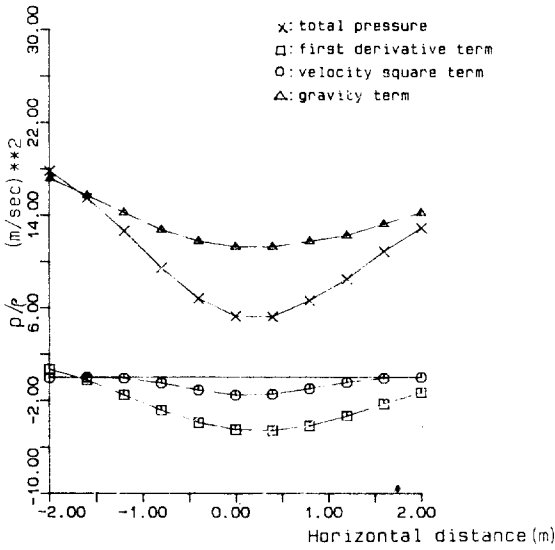


Fig. 6 Pressure distributions on even bottom ($t=0.1\text{sec}$)

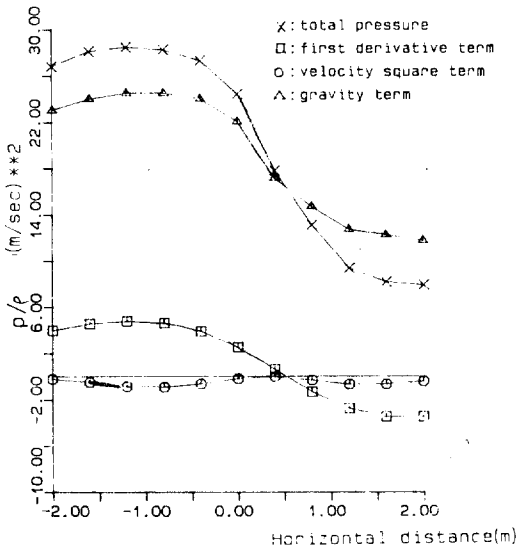


Fig. 7 Pressure distributions on even bottom ($t=0.8\text{sec}$)

위치에너지 그리고 전체에너지를 보이고 있다. 운동에너지와 위치에너지는 1.0에서 약간의 이탈을 보인 반면에 전체에너지는 2.0에서 일정하게 유지 되는 것으로 보아 계산결과의 타당성을 입증할 수가 있었다.

Fig. 6, 7, 8는 유한수심에서 해저면이 일정한 경우에 $t=0.1\text{초}$, $t=0.8\text{초}$, $t=1.06\text{초}$ 에 대해 동 압력의 각 성분값을 $x=-2.0\text{m}$ 에서 $x=2.0\text{m}$ 구간에서 걸쳐 그려

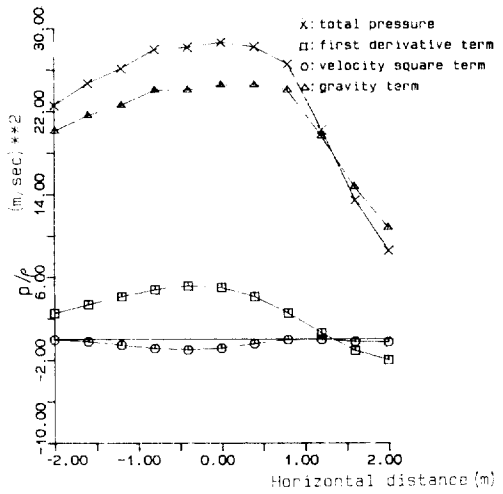


Fig. 8 Pressure distributions on even bottom ($t=1.06\text{sec}$)

다. 동압보다는 중력에 의한 정압이 지배적임을 알 수 있으며 파면이 직각을 이루어 쇄파에 진입하면 그에 따라 정압이 급격히 감소함을 보이고 있다.

5. 결 론

이상의 계산결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

- 1) Semi-Lagrangian time-stepping 방법을 이용한 경제적분법으로 2차원 비선형 자유표면을 수치해석할 수 있다.
 - 2) 파면이 수직을 이루어 쇄파가 되는 시점에 Lagrangian 입자가 이 부분에 집결하여 수치적 불안정성을 야기시키는데, 이에 대한 좀 더 엄밀한 수치해법의 개발이 요구된다.
 - 3) 해저면의 변화는 파의 불안정을 촉진시켜 해저면이 일정할 때보다 더욱 빨리 쇄파에 이르게 한다.
- 끝으로 본 연구는 한국과학재단 목적기초의 연구비를 수혜받아 수행하였음은 밝히며, 상기 재단에 심심한 사의를 표한다.

참 고 문 헌

[1] Baker, G.R., Meiron, D.I. & Orszag, S.A., "Generalized Vortex Methods for Free-surface Flow Problem", *J. Fluid Mech.* 123, 477-501, 1982.

- [2] Dold J.W. & Peregrine D.W., "Steep Unsteady Water Waves: An Efficient Computational Scheme", University of Bristol, School of Mathematics Report, 1984.
- [3] Douglas G. Dommermuth & Dick K.P. Yue, "Numerical Simulations of Nonlinear Axisymmetric Flows with Free Surface", *J. Fluid Mech.* 178, 195-219, 1985.
- [4] Longuet-Higgins, M.S. & Cokelet, E.D., "The Deformation of Steep Surface Waves on Water. I. a Numerical Method of Computation", *Proc. R. Soc. Lond. A350*, 1-26, 1976.
- [5] Faltinsen, O.M., "Numerical Solutions of Transient Nonlinear Free-surface Motion Outside or Inside Moving Bodies", *Proc. 2nd Intl. Conf. on Num. Ship Hydro*, 1977.
- [6] Vinje T. & Brevig P., "Numerical Simulation of Breaking Waves", *J. Adv. Water Resources*, June, 1981a.
- [7] Vinje T., Brevig P., "Nonlinear Ship Motion", *Proc. 3rd Intl. Conf. on Num. Ship Hydrodyn*, 1981b.

<부록> 경계면을 따른 입자에 대한 영향함수

복소포텐셜 β 와 시간에 대한 미분값 $\frac{\partial\beta(z)}{\partial t}$ 를 경계면에 놓인 절점에서 계산하고자 한다. 절점사이에서 $\beta(z)$, $\frac{\partial\beta(z)}{\partial t}$ 는 선형적으로 변한다고 가정하면, 이들은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\beta(z) = \sum_j A_j \beta_j$$

$$\frac{\partial\beta(z)}{\partial t} = \sum_j A_j \frac{\partial\beta_j}{\partial t} \quad (\text{A-1})$$

여기서 절점 z_i 에서의 영향함수 A_i 는

$$A_j(z) = \frac{z - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \text{ for } z_i \leq z \leq z_{i+1} \text{ on } C$$

$$A_j(z) = \frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \text{ for } z_{i-1} \leq z \leq z_i \text{ on } C \quad (\text{A-2})$$

$A_i(z) = 0$ elsewhere on C 가 되며 선적분은 다음과 같은 급수꼴로 표시된다.

$$\oint \frac{\beta(z)}{z - z_k} dz = \oint \frac{\sum A_j \beta_j}{z - z_k} dz = \sum_j (P_{k,j} + Q_{k,j}) \beta_j \quad (\text{A-3})$$

여기서

$$P_{k,j} = \int_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \cdot \frac{1}{z - z_k} dz$$

$$Q_{k,j} = \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{z - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \cdot \frac{1}{z - z_k} dz \quad (\text{A-4})$$

이러한 적분 계산을 수행하면

$$P_{k,j} = \frac{z_k - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \ln \frac{z_j - z_k}{z_{j-1} - z_k} + 1$$

$$Q_{k,j} = \frac{z_k - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \ln \frac{z_{j+1} - z_k}{z_j - z_k} - 1 \quad (\text{A-5})$$

이 된다.

따라서 영향함수 $\Gamma_{k,j}$ 는 다음과 같다.

$$\Gamma_{k,j} = P_{k,j} + Q_{k,j}$$

$$= \frac{z_k - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \ln \frac{z_j - z_k}{z_{j-1} - z_k}$$

$$+ \frac{z_k - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \ln \frac{z_{j+1} - z_k}{z_j - z_k} \quad (\text{A-6})$$

그러나 $k=j\pm 1$ 이나 $k=j$ 인 경우에는 다음과 같은 극한치를 사용하여야 한다.

$$k=j-1$$

$$\Gamma_{j-1,j} = \frac{z_j - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \ln \frac{z_{j+1} - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \quad (\text{A-7})$$

$$k=j+1$$

$$\Gamma_{j+1,j} = \frac{z_{j+1} - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \ln \frac{z_j - z_{j+1}}{z_{j-1} - z_{j+1}} \quad (\text{A-8})$$

$$k=j$$

$$\Gamma_{j,j} = \ln \frac{z_{j+1} - z_j}{z_{j-1} - z_j} \quad (\text{A-9})$$

한편 $\epsilon = \frac{z_{j-1} - z_j}{z_j - z_k}$ 와 $\delta = \frac{z_{j+1} - z_j}{z_j - z_k}$ 의 값이 작은 경우 \ln 함수의 급수 전개식을 이용하면 다음과 같은 근사식을 얻을 수 있으며

$$\Gamma_{k,j} = \frac{\delta - \epsilon}{2} - \frac{\delta^2 - \epsilon^2}{6} = \frac{\delta - \epsilon}{2} \left(1 - \frac{\delta + \epsilon}{3} \right) \quad (\text{A-10})$$

이를 사용하면 계산시간이 대폭 감소된다