
 論 文

大韓造船學會誌
 第25卷 第3號 1988年 9月
 Journal of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 25, No. 3, September 1988

항만내의 파도 응답에 관한 수치 계산

김 대 준*, 배 광 준**

Numerical Methods for Wave Response in Harbor

by

D.J. Kim* and K.J. Bai**

Abstract

A natural or an artificial harbor can exhibit frequency (or period) dependent water surface oscillations when excited by incident waves. Such oscillations in harbors can cause significant damage to moored ships and adjacent structures. This can also induce undesirable current in harbors. Many previous investigators have studied various aspects of harbor resonance problem.

In the present paper, both a localized finite element method (LFEM) which is based on the functional constructed by Chen & Mei (1974) and Bai & Yeung (1974) and an integral equation method which was used by Lee (1969) are applied to harbor resonance problem. The present method (LFEM) shows computationally more efficient than the integral equation method. Our test results show good agreement compared with other results. This enhanced computational efficiency is due to the fact that the present method gives a banded symmetric coefficient matrix and requires much less computational time in the calculation of the influence coefficients matrix than the integral equation method involved with Green's function. To test the present numerical scheme, two models are treated here. The present method (LFEM) can be extended to a fully three dimensional harbor problem with the similar computational advantage.

1. 서 언

대양으로부터의 입사파에 의한 항만내에서의 파도응답에 대한 지식의 필요성은 항만내에 정박중인 선박이나 기타 해양 구조물의 안전을 위해서 필수적으로 요구된다.

실제로 해상의 파도가 극심하게 되면 항만내에 정박

중인 선박 등에 큰 피해를 주게되는 사례들을 흔히 볼 수 있다.

따라서 항만내의 파도응답에 대한 합리적인 연구는 정박중인 선박의 운동과 항만내의 구조물 및 항만자체의 설계에 중요한 정보를 제공하게 되며 아울러, 항만의 지형 특성에 따른 항만의 공진현상(Harbor resonance)에 대해서도 필요한 지식을 얻을 수 있다.

지난 20여년동안 위의 문제와 관련, 항만의 공진문

본 논문은 대한조선학회 1987년도 춘계연구발표회에서 발표된 논문임

접수일자 : 1987년 12월 1일, 재접수일자 : 1988년 7월 11일

* 정회원, 진해기계장

** 정회원, 서울대학교 공과대학

제 및 파도응답에 대한 많은 연구가 수행되어 왔는데 몇가지 대표적인 예를 들어보면 첫째, 항만의 입구를 무시하고 밀폐된 항만(closed basin)으로 이상화하여 자유진동 문제에 대한 고유치문제로 해석하는 방법이 Kravtchenko & Mcnown¹⁾ 등에 의해 연구되었고, 둘째로, 해안선(coast line)이나 항만내 경계면 또는 항만입구에 특이점을 분포시키고 적분 방정식을 유도하여 수치계산을 통해 근사해를 구하는 방법이 Lee²⁾, Hwang & Tuck³⁾, Mattioli⁴⁾ 등에 의해 연구되었는데 이들은 임의의 항만지형에 대해서도 적용할 수 있다는 장점이 있으나 참고문헌^[2, 3]은 항만내의 수심이 일정한 경우에만 적용할 수 있고 참고문헌^[4]는 그렇지 않은 경우에도 적용이 가능하다.

마지막으로 유한요소법을 이용한 방법을 들 수 있고, 여기에는 Berkhoff^[5, 6], Chen & Mei^[7], Bettés & Zienkiewicz^[8] 등의 연구가 있는데, 이는 임의의 지형 및 항만내의 수심이 변하는 경우에도 적용할 수 있어 계산시간이 적게 소요된다는 점에서 전술한 방법들보다 유용하다고 할 수 있다.

이밖에도 많은 연구가 있으나 그 대부분이 특수한 지형(원형 또는 사각형)에 대해서만 적용할 수 있으므로 위에서 언급한 방법들이 항만내의 파도응답 계산에 적용할 수 있는 일반적인 예라 할 수 있다.

일반적으로 항만내의 파도응답문제는 수심이 일정하거나 그렇지 않은 경우에도 2차원 자유표면상 문제로 해석하고 있는데 본 논문에서는 Bai & Yeung^[9]과 Kil^[10]이 자유표면파 문제에서 사용한 국소유한요소법(localized finite element method)과 선형 천수이론(linearized shallow water theory)을 이용하여 임의의 형태와 깊이를 가진 항만 내에서의 파도응답을 추정, 계산할 수 있는 수치계산 프로그램개발을 목적으로 한다. 또한 이 프로그램을 이용하여 얻은 계산 결과를 전술한 여러 연구 결과와 비교 검토하였고 적분방정식에 의한 방법도 직접 계산하였다(4장 참조). 항만내의 파도응답 분포와 더불어 항만의 공진문제 및 Harbor Paradox 문제(Miles & Munk^[11])에 대해서도 검토하였다.

2. 문제의 정립

2.1. 선형천수이론

Fig. 1과 같이 깊이가 변화하는 해저지형을 가진 대양을 진행중인 파에 대해 깊이 변화가 완만하다는 가정 하에 다음과 같이 속도장 함수 $\phi(x, y)$ 에 대한 일반식을

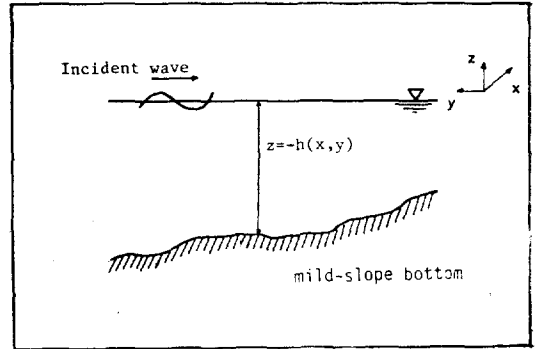


Fig. 1 Coordinate system and bottom topography

얻을 수 있다(Berkhoff^[5, 6] Mei^[12]).

$$\nabla \cdot (C \cdot C_g \nabla \phi) + \omega^2 \frac{C_g}{C} \phi = 0 \quad (1)$$

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (2)$$

여기서,

$$\omega \quad : \text{진동수}$$

$$C = \frac{\omega}{k} \quad : \text{위상속도}$$

$$C_g = nC \quad : \text{군속도}$$

단,

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$$

그리고 식 (1) 및 (2)에 선형화된 천수이론을 도입하면 아주 작은 kh 값 ($kh \ll 1$)에 대해 $n=1$ 이 되고 C 및 C_g 는

$$C = C_g = \sqrt{gh} \quad (3)$$

과 같이 되므로 식 (1) 및 (2)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\nabla \cdot (h \nabla \phi) + \frac{\omega^2}{g} \phi = 0 \quad (4)$$

$$\omega^2 = g k^2 h \quad (5)$$

만일, 깊이가 일정하다고 가정하면 식 (4)는 아래와 같은 2차원 Helmholtz 방정식(또는 Weber 방정식)을 얻을 수 있다.

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad (6)$$

$$\omega^2 = g k^2 h \quad (7)$$

2.2. 지배방정식 및 경계조건

본 논문에서 택하는 항만의 기하학적 형상과 좌표계는 Fig. 2와 같고 항만내 임의의점에서의 깊이를 $h(x, y)$ 라고 표시한다.

그리고 항만내의 경계면 및 해안선은 수직벽이고 입사파는 그곳에서 완전히 반사된다고 가정하며 유체는 비점성 및 비압축성이고, 유체유동은 비회전성이고

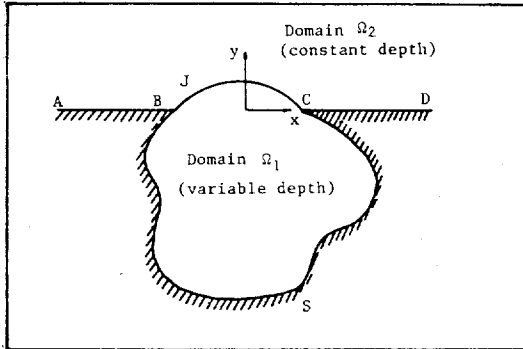


Fig. 2 Harbor model configuration

- Ω₁ : 항만내부 영역 (variable depth)
- Ω₂ : 항만외부 영역 (constant depth)
- S : 항만내 경계면 (solid boundary inside the harbor)
- J : 정합경계면 (matching boundary)
- AB & CD : 해안선 (coastline)

입사파와 같은 진동수로 시간조화라고 가정한다. 항만의 영역인 Ω₂에서의 수심은 일정하다고 가정한다.

그러면, 전술한 가정과 앞에서 언급한 식(4)~(7)에 의해 영역 Ω₁ 및 Ω₂ 그리고 정합경계면 J에서 속도장 함수 φ(x, y)에 대해 다음과 같은 경계치 문제가 성립한다.

내부영역 Ω₁에 대해

$$\nabla \cdot (\nabla \phi_1) + \frac{\omega^2}{g} \phi_1 = 0 \text{ in } \Omega_1 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = 0 \text{ on } S \quad (9)$$

외부영역 Ω₂에 대해

$$\nabla^2 \phi_2 + k^2 \phi_2 = 0 \text{ in } \Omega_2 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial n} = 0 \text{ on } AB \text{ and } CD \quad (11)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_2 \approx \phi_0 \quad (r^2 = x^2 + y^2) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \phi_0 + \phi_s \\ \phi_0 &= \phi_i + \phi_r \end{aligned} \quad (13)$$

여기서,

- φ_i : 입사파의 속도장 함수
- φ_r : 반사파의 속도장 함수로서 수직벽해안선 AB와 CD에 의한 완전 반사파
- φ_s : 항만 입구의 존재로 인한 산란파(scattered wave)의 속도장 함수로서 항구의 존재에 의한 영향을 나타내는 속도장 함수.

정합경계면 J에서

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (14)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \quad (15)$$

(단, 벡터 n의 방향은 Ω₁에서는 outward이고 Ω₂에서는 inward이다)

한편, 해안선 AB 및 CD에서 입사파 및 반사파의 합 φ₀에 대해

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial n} = \frac{\partial \phi_0}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

임을 고려하면 식 (10)~(13)은

$$\nabla^2 \phi_s + k^2 \phi_s = 0 \text{ in } \Omega_2 \quad (17)$$

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial n} = 0 \text{ on } AB \text{ and } CD \quad (18)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_s \approx 0 \quad (19)$$

와 같이 산란파(scattered wave)의 속도장 함수 φ_s에 대한 경계치문제를 바꾸어 쓸 수 있고 일반적으로 식 (17)~(19)를 만족하는 해석해는 $\frac{1}{2i} H_0^{(1)}(kr)$ 이며 H는 Hankel 함수이다.

2.3. 증폭비 (Amplification factor)

입사파에 대한 항만내의 파도응답을 합리적으로 표기하기 위해 매개변수로써 증폭비, R을 정의하게 되는데 이는 해안선 및 항만의 입구(단혀져 있다고 가정)에서 입사파와 반사파의 합으로 이루어진 정체파(standing wave) φ₀의 진폭에 대한 항만내 임의의 점에서의 φ₁의 진폭의 비율로 표현할 수 있고, 또는 다음과 같이 φ₁ 및 φ₂로서 정의되는 각영역에서의 wave elevation으로 표시된다.

$$R = \frac{|\eta_1(x, y, t)|_{\max}}{|\eta_i(x, y, t)|_{\max} + |\eta_r(x, y, t)|_{\max}} \quad (20)$$

여기서 파변위 η(x, y, t) 및 입사파와 반사파를 다음과 같이 적절하게 정의하면

$$\eta_1(x, y, t) = \text{Re}\{\eta_i(x, y)e^{-i\omega t}\} \quad (21)$$

$$\eta_i(x, y) = A e^{-ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \quad (22)$$

$$\eta_r(x, y) = \eta_i(x, -y) \quad (23)$$

A : 입사파의 진폭 (incident wave amplitude)

α : 입사파와 x축이 이루는 각

k : 파수 (wave number)

식 (20)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$R = \left| \frac{\eta_1(x, y)}{2A} \right| \quad (24)$$

3. 유한요소법을 이용한 해의 도출

국소유한요소법을 이용한 항만내 파도응답 계산 문제는 Ref[9, 10]에서와 같이 내부영역에 대해서는 변분법(variational principle)을 이용한 유한요소법을 외부

영역에 대해서는 우리가 이미 알고 있는 해석해를 이용하여 정합경계면에서의 정합조건을 만족하게 해서 근사해를 구하게 되는데 이 방법에서는 influence coefficient matrix 계산 시간이 월등히 단축되고 최종 matrix가 대칭이 되는 장점이 있어 수치계산면에 있어서 타 방법들보다 효율적이라 할 수 있다.

3.1. 변분법의 응용

앞서 2.1절에서 얻은 경계치 문제 (8)~(9) 및 (14)~(15)에 대해 Bai & Yeung[9]과 Kil[10] 및 Mei[12]에서와 같이 변분법을 적용하면 범함수(functional) F 를 다음과 같이 정의할 수가 있다.

$$F(\phi_1, \phi_2) = \iint_{\Omega_1} \frac{1}{2} [h(\nabla\phi_1)^2 - \frac{\omega^2}{g}\phi_1^2] dx dy + \int_J h \left[\left(\frac{1}{2} \phi_2 - \phi_1 \right) \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right] ds \quad (25)$$

이 범함수 $F(\phi_1, \phi_2)$ 와 관련하여

$$\delta F(\phi_1, \phi_2) = 0 \quad (26)$$

의 해를 구하는 것이 앞서 얻은 경계치 문제 (8)~(9) 및 (14)~(15)를 푸는 것과 동일함을 보이기 위해 식 (25)를 (26)에 대입하면 다음과 같다.

$$\delta F(\phi_1, \phi_2) = \iint_{\Omega_1} [h\nabla\phi_1 \nabla\delta\phi_1 - \frac{\omega^2}{g}\phi_1\delta\phi_1] dx dy + \int_J h \left[\left(\frac{1}{2} \delta\phi_2 - \delta\phi_1 \right) \frac{\partial \delta\phi_2}{\partial n} + \left(\frac{1}{2} \phi_2 - \phi_1 \right) \frac{\partial \delta\phi_2}{\partial n} \right] ds \quad (27)$$

Gauss 정리와 부분적분을 이용하면 식 (27)의 첫번째 항은

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_1} h\nabla\phi_1 \nabla\delta\phi_1 dx dy \\ &= \iint_{\Omega_1} [\nabla \cdot (h\delta\phi_1 \nabla\phi_1) - \delta\phi_1 \nabla \cdot (h\nabla\phi_1)] dx dy \\ &= - \iint_{\Omega_1} \delta\phi_1 \nabla \cdot (h\nabla\phi_1) dx dy + \int_J h\delta\phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} ds \\ &+ \int_J h\delta\phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (28)$$

과 같이 되고 ϕ_0 는 이미 알고 있는 함수로서 변분이 영임을 고려하면

$$\delta\phi_s = \delta\phi_2 \quad (29)$$

가 되어 식 (27)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta F(\phi_1, \phi_2) &= - \iint_{\Omega_1} \delta\phi_1 [\nabla \cdot (h\nabla\phi_1) + \frac{\omega^2}{g}\phi_1] dx dy \\ &+ \int_J h \left[\delta\phi_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right) - \frac{\partial \delta\phi_2}{\partial n} (\phi_1 - \phi_2) \right] ds \\ &+ \int_J h\delta\phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (30)$$

식 (30)을 유도하는데 다음의 관계식 (31)과 (32)를 이용하였다.

외부영역 Ω_2 에서의 ϕ_2 와 $\delta\phi_2$ 에 대해 Green 정리를 적용하면

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_2} [\delta\phi_2 \nabla^2 \phi_2 + \frac{\omega^2}{gh} \phi_2 - \phi_2 \nabla^2 \phi_2 + \frac{\omega^2}{gh} \phi_2] ds \\ &= \int_{\partial\Omega_2} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial n} \delta\phi_2 - \phi_2 \frac{\partial}{\partial n} \delta\phi_2 \right) ds = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

여기서 $\partial\Omega_2$ 는 영역 Ω_2 의 닫혀진 전경계면으로서, $\partial\Omega_2 = J + AB + CD + C_R$ 이고, C_R 은 $y > 0$ 일 때의 원점을 중심으로한 무한 반경 ($r \rightarrow \infty$)을 가진 반원을 표시한다. 그러던 식 (11), (12), (13), (18), (19)을 이용하던 다음 관계식을 얻는다.

$$\int_J \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial n} \delta\phi_2 - \phi_2 \frac{\partial}{\partial n} \delta\phi_2 \right) ds = 0 \quad (32)$$

함안의부 무한영역 Ω_2 에서 ϕ_s 는 식 (17)과 정합경계면 J 를 제외한 모든 경계조건을 만족하는 일반해로서 Green 함수인 Hankel 함수로 표시한다.

따라서 변분 $\delta\phi_1$, $\delta\phi_2$ 및 $\delta\phi_{2n}$ 은 임의의 값을 가지므로 식 (30)에 의하면 식 (26)을 이용하여 얻은해 ϕ_1 및 ϕ_2 는 앞에서 언급한 경계치 문제를 만족하는 엄밀해가 됨을 알 수 있다.

3.2. 내부영역에 대한 해의 근사화

앞서 언급한 바와 같이 유한요소법이 적용되는 내부영역 Ω_1 에 대해 변분법을 적용하면 다음과 같은 범함수(functional) F 를 얻을 수 있음을 알았다.

$$F(\phi_1, \phi_2) = \iint_{\Omega_1} \frac{1}{2} [h(\nabla\phi_1)^2 - \frac{\omega^2}{g}\phi_1^2] dx dy + \int_J h \left[\left(\frac{1}{2} \phi_2 - \phi_1 \right) \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right] ds \quad (33)$$

따라서 경계치 문제 (8)~(9)와 (14)~(15)의 해를 구하는 것은 범함수 $F(\phi_1, \phi_2)$ 에 대해 정류치를 갖게(stationary)하는 조건 즉,

$$\delta F(\phi_1, \phi_2) = 0 \quad (34)$$

의 해를 구하는 것과 동등하게 된다.

그리고 이러한 변분법을 이용하는 경우 범함수를 구하는 과정에서 부분 적분을 사용하므로 속도장함수 ϕ_F 에 대한 2차 도함수가 나타나지 않기 때문에 본래의 미분방정식 보다 더 완화된 조건에서 근사해를 구할 수 있는 잇점이 있다.

즉, 근사해가 갖추어야 할 조건은 범함수 F 에서 보듯이 함수와 일차함수의 적분값이 존재하면 되므로 속도장 함수 ϕ_1 의 근사해로서 일차함수가 부분 연속인 함수를 이용할 수 있음을 뜻한다.

내부영역 Ω_1 을 Fig. 3과 같이 사각형요소로 분할하

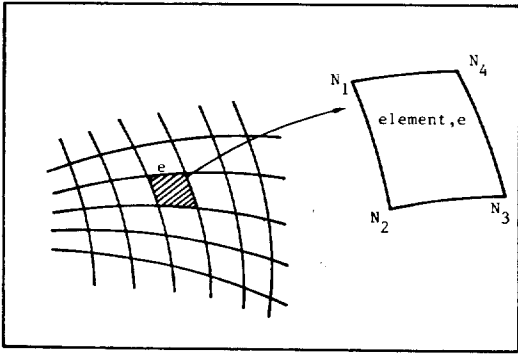


Fig. 3 Finite element subdivisions

고 각 요소에 대해 trial function basis로서 $N_i^e(x, y)$, ($i=1, \dots, 4$)을 도입하면 속도장함수 $\phi_1(x, y)$ 는 각 절점에서의 ϕ_1 값을 계수로 갖는 합으로 나타낼 수 있다. 따라서 각 요소에서의 속도장 함수 ϕ_1 를 다음의 근사식으로 나타낼 수 있다.

$$\phi_1 = [N]^e \{\phi_1\}^e \quad (35)$$

이때 $[N]^e$ 과 $\{\phi_1\}^e$ 는 trial function basis와 각 절점(node)에서의 ϕ_1 값으로 다음과 같은 행렬식을 뜻하고

$$[N]^e = [N_1^e, N_2^e, N_3^e, N_4^e]$$

$$\{\phi_1\}^e = [\phi_{11}^e, \phi_{12}^e, \phi_{13}^e, \phi_{14}^e]$$

trial function basis는 판원요소가 아니라면 0의 값을 가진다. 따라서 전 유체영역 Ω_1 을 고려한 속도장 함수 ϕ_1 은 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \sum_{e=1}^E [N]^e \{\phi_1\}^e \\ &= \sum_{i=1}^N \phi_{1i} N_i(x, y) \end{aligned} \quad (33)$$

(단, E, N 은 총요소수와 총 절점수이고 이때의 $N_i(x, y)$ 는 global basis function이다.)

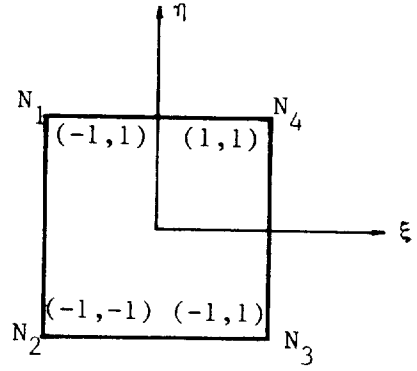
참고로 본 논문에서 사용한 4개의 절점을 갖는 선형 isoparametric 요소에 대한 $N_i(x, y)$ 는 다음과 같다.

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$



Master element (trial function basis)

3.3. 외부영역에 대한 해의 근사화

외부영역 Ω_2 에서 식 (17)~(19)를 만족시키는 해석은 앞의 2.1절에서 언급한 것처럼 Hankel function으로 알려져 있는데 본 논문에서는 Ref[12]에서 사용하고 있는 Fourier-Bessel expansion(eigenfunction)을 사용하지 않고 아래에서 언급하는 Green 함수를 trial function으로 사용하기로 한다.

Fig. 4와 같이 항단의 입구에 있는 점을 $q(x', y')$ 그리고 정합면 J 상에 있는 점을 $p(x, y)$ 라고 한다.

그러면 점 $q(x', y')$ 에 놓인 단위세기의 pulsating source로 인한 $p(x, y)$ 에서 식 (19)를 만족하는 Green 함수는 다음과 같다(Ref[13, 14]).

$$\begin{aligned} G(p, q) &= \frac{1}{2i} H_0^{(1)}(kr) \\ &= -\frac{1}{2}(Y_0 - iJ_0) \end{aligned} \quad (37)$$

여기서,

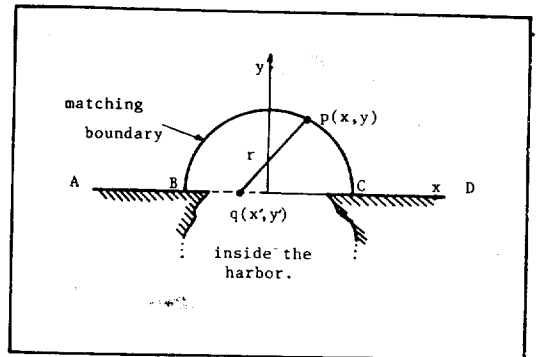


Fig. 4 Matching boundary & source distribution

J_0 : Bessel function of first kind
 Y_0 : Bessel function of second kind

$$r = \{(x-x')^2 + (y-y')^2\}^{\frac{1}{2}}$$

따라서 외부영역 Ω_2 에서 속도장 함수 ϕ_2 는 BC상에 세기 $\mu(q)$ 를 갖는 Green함수를 분포시키므로써 표시할 수 있는데 입사파와 반사파를 고려하면 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_2(p) &= \phi_i(p) + \phi_r(p) + \phi_s(p) \\ &= \phi_i(p) + \phi_r(p) + \int_{BC} \mu(q)G(p : q)ds \end{aligned} \quad (38)$$

그리고 ϕ_s 를 경계면 \overline{BC} 에 분포된 점에서 일정세기 μ_{2i} 를 갖는 응출점의 함으로 근사시키면 (38)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi_2 = \phi_i + \phi_r + \sum_{i=1}^M \mu_{2i} \Psi_i(x, y) \quad (39)$$

단, M : 분포된 소오수의 갯수

Ψ_i : i 번째 점에서의 Green 함수 $G(p : q)$

3.4. 수치 계산

3.2절 및 3.3절에서 ϕ_1 과 ϕ_2 에 대한 근사식 (36)과 (39)를 (34)에 적용한다.

즉 범함수 F 의 값을 stationary되게 하기 위하여 변분을 가질 수 있는 ϕ_{1i} 와 μ_{2i} 를 감안하여 다음 관계를 얻을 수 있게 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\phi_1, \phi_2)}{\partial \phi_{1i}} &= 0 \quad i=1, \dots, N \\ \frac{\partial F(\phi_1, \phi_2)}{\partial \mu_{2i}} &= 0 \quad i=1, \dots, M \end{aligned} \quad (40)$$

식 (40)에서 얻은 대수방정식의 계수행렬은 대칭이고, 적절하게 절점 번호를 정해두면 띠 행렬(banded matrix)이 되며 각 행렬의 요소들은 면적 적분에 대해서는 4개의 절점을 갖는 선형 isoparametric 요소에 대해 정사각형 요소로 사상(mapping) 한 후 Gauss 적분 공식을 이용하여 계산하였고 선적분에 대해서는 적분 함수를 직선구간내에서 선형으로 근사하여 수치적분하였다.

상세한 수치해석 과정은 김[16]에서 찾을 수 있다.

4. 수치계산 결과 및 고찰

본 논문에 적용된 항만의 지형은 Fig. 5과 같으며 각 model에 대해서 국소유한요소법 및 Green 정리를 이용한 적분 방정식(Lee[2])에 의해 수직 ($\alpha=90^\circ$)으로 입사하는 입사파에 대해 항만의 특성 길이 L 로 무차원화된 파수 KL (wave number)에 대한 증폭비 (R)를

계산하였다.

그리고 이 계산결과를 Lee[2], Hwang & Tuck[3], Mattioli[4], Mei[7] 등의 결과와 비교했는데 model 1에 대해서는 깊이 변화 및 방파제(breakwater)가 있는 경우에도 계산하였고 model 2에 대해서는 일정수심일 경우에만 계산하였으며 model 2는 인천시 항동 근처의 소항구와 거의 유사한 지형을 택하여 계산하였다.

4.1. 두방법에 의한 수치계산 결과 및 비교

국소유한요소법의 경우 KL 의 값이 적은 범위 내에서는 적은수의 요소(element)로 좋은 결과를 얻을 수 있었고 KL 값이 큰 범위내에서는 요소수를 늘림으로써 좋은 결과를 얻을 수가 있었다.

Fig. 6 및 Fig. 7은 model 1에 대해서 항만내 수심이 일정할 경우에 대해서 본 방법과 다른 방법들을 비교한 것인데 공진점 근처에서 약간의 오차의외엔 잘 일치함을 보여준다.

Model 1과 같이 단순지형인 항만에서는 입사파의 파장이 작을때($KL > 5$), 공진 현상이 나타나지 않는 것

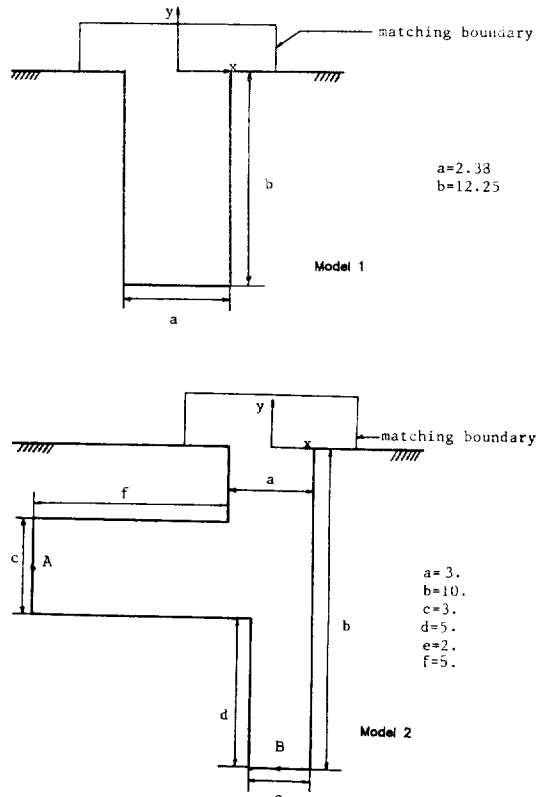


Fig. 5 Two harbor models

이 확인되었다.

그러나 model 2와 같은 지형에서는 파장이 작을 때에도 여러개의 공진점이 존재하는 것을 알 수 있다 (Fig. 15, Fig. 16).

Fig. 8은 항만내 수심이 선형적으로 변하는 경우에 대해서 계산한 것인데 수심의 기울기가 커지면(항만내의 부피가 감소하면) 공진현상이 일어나는 파수가 줄어들고 증폭비도 상대적으로 증가함을 보여준다.

4.2. 방파제가 있는 경우

Fig. 9 및 Fig. 10은 항만입구 양쪽에 $\frac{a}{4}$ 크기의 방파제가 있는 경우(Fig. 10)와 없는 경우(Fig. 9) A점 및 B점에서의 R을 계산한 것인데 방파제가 있을 때 R값이 크게 나타나는 것을 알 수 있다.

실제로 전술한 것과 반대현상(R이 감소)이 일어나는 것으로 생각되어지기 때문에 이런 현상을 Harbor paradox라고 한다(Miles and Munk[11], Mei[12]). 이와 같은 현상이 일어나는 이유는 방파제(breakwater)로 인해 항만의 유입구(harbor entrance)가 작아지게

되면 항만내에 유입된 입사파의 에너지가 밖으로의 유출이 어려워져(trapping) 일어난다.

그리고 Fig. 11은 항만의 중간에 같은 크기의 방파제가 하나 더 있을 경우인데 한개인 경우보다 더 큰 영향이 있음을 알 수 있다.

참고로 Fig. 13 및 Fig. 14은 위의 두 경우에 대해 공진점 근처의 KL에서 y축에 따른 R값을 보여주며 Fig. 9와 Fig. 10과 같은 경우이다. 이 두 그림을 비교하면 방파제가 있는 경우의 R값이 상대적으로 크고 입구 근처에서 약간에 변화(fluctuation)가 있음을 알 수 있다.

Fig. 15와 Fig. 16은 인천시 항동근처의 소항구를 모델로한 Fig. 5에 있는 Model 2에서 A와 B점에서의 증폭비 R을 보여준다.

4.3. 수렴정도의 고찰

극소유한요소법이나 적분방정식을 이용하여 항만내의 파도응답을 계산할때 입사파의 파장이 계산시간이나

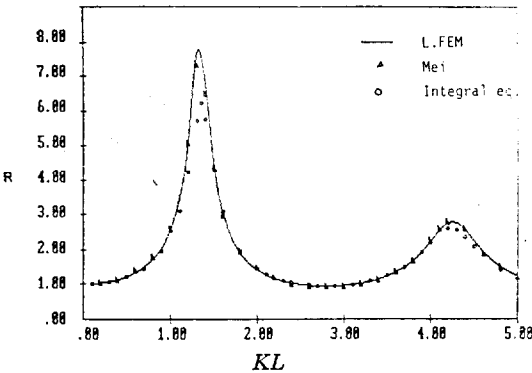
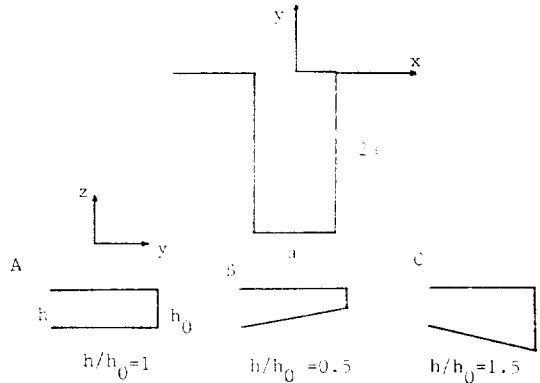


Fig. 6 [R] for constant bottom



*Configuration of variable depth

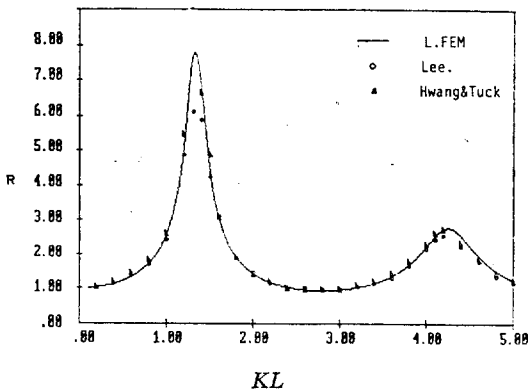


Fig. 7 [R] for constant bottom

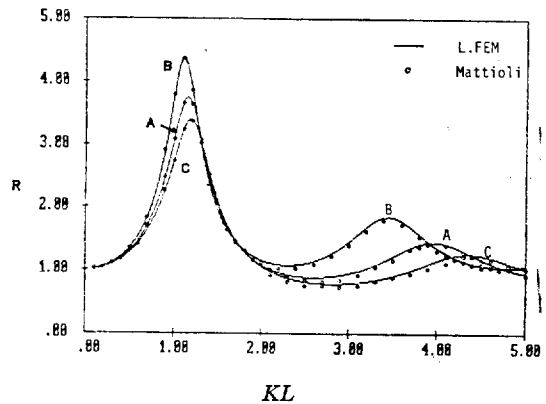


Fig. 8 [R] for linearly varying bottom

Table 1 Comparison of computation time (MV8000 사용시)

	method	요소수 or segments 수	정합 경계 수	source의 갯수	C.P.U time
Model 1	LFEM	80	14	5	6sec
	I.E.M	48	5	—	38sec
Model 2	LFEM	216	22	5	23sec
	I.E.M	69	5	—	75sec

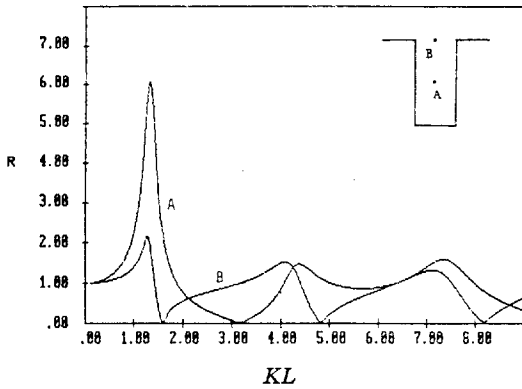


Fig. 9 [R] at point A & B

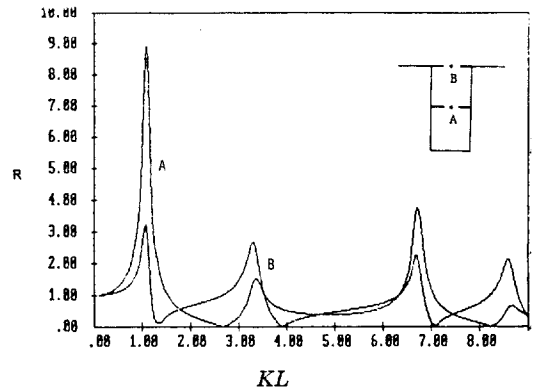


Fig. 11 [R] at point A & B with two breakwaters

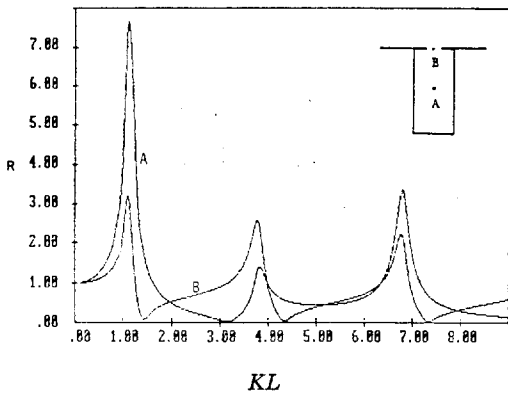


Fig. 10 [R] at point A & B (with breakwater)

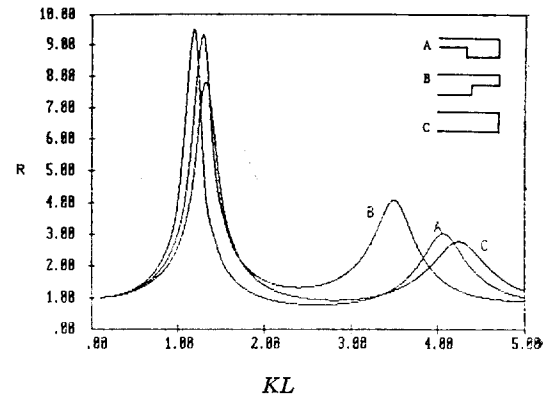


Fig. 12 [R] for stepped bottom

결과에 대해 중요한 인자가 된다.

본 논문에서 계산한 결과에 의하면 입사파의 파장이 짧아지면 그에 비해 요소의 수나 segment의 수도 많게 해야 좋은 결과를 얻을 수가 있었다.

일반적으로 요소길이나 segment의 길이가 입사파의 파장의 1/10 보다 작을때 계산결과가 수렴하는 것을 알 수 있었다.

한편 국소유한요소법을 이용하는 경우 항단의 입구에 적은수(3~7개)의 특이점 분포로도 Mei(12)의 결과(Fig. 6)와 거의 같은 값을 얻을 수 있었지만 특이점

수가 정합 경계면 수에 비해 많을 경우(계산 결과에 의하면 정합경계면수의 0.8배 이상)에는 계산 결과의 오차가 커짐을 알 수가 있었는데 이는 본 논문에서 택하고 있는 방법에서 그 원인을 추정할 수가 있다. 즉 한 정된 정보(정합경계면의 정합수)에 대해 이를 이용하여 구해야 되는 미지수의 갯수(분포된 특이점의 세기)가 늘어나게 되는데 이때 정합경계면에서의 적분을 근사적으로(선형적으로) 취했기 때문이라 생각된다.

참고로 두 방법에 의한 수치계산에 사용된 요소수 혹은 segments수 및 계산시간 등을 Table 1에 수록하

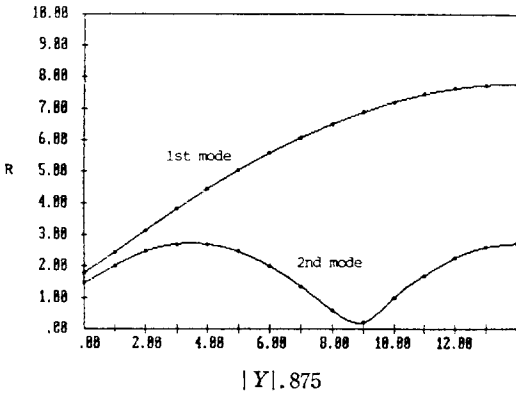


Fig. 13 [R] along the Y-axis (for the case of Fig. 9 without breakwater)

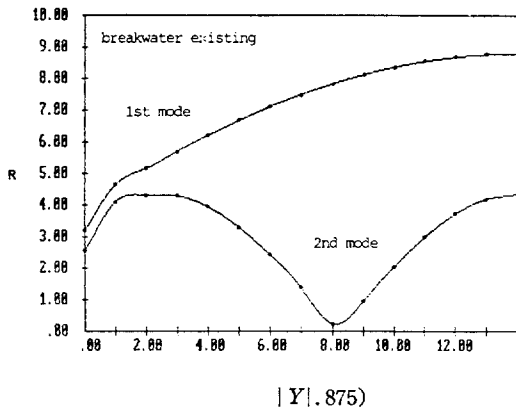


Fig. 14 [R] along the Y-axis with a breakwater (for the case of Fig. 10)

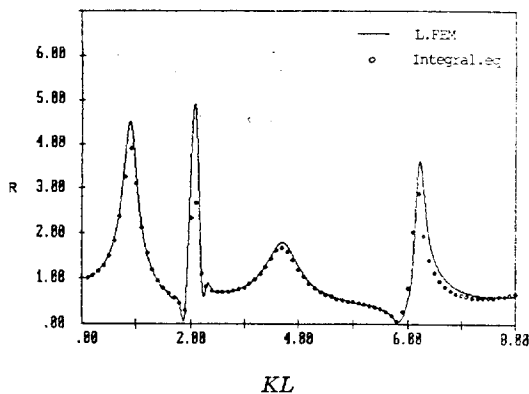


Fig. 15 [R] at point A, model 2.

였다. 본 논문의 모델에 대한 계산에 소요된 시간(CPU time)은 적분 방정식에 의한 방법이 국소유한요소법의 경우보다 4~15배 정도 더 많음을 알 수 있다.

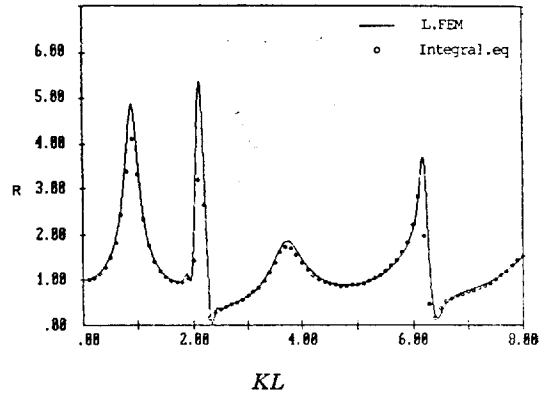


Fig. 16 [R] at point B, model 2.

5. 결 언

본 논문에서 사용하고 있는 국소유한요소법을 이용한 항만내 파도응답계산 프로그램은 소형 컴퓨터(IBM-PC XT & AT)로도 비교적 빠른 시간내에 계산 결과를 얻을 수가 있으며 종래의 다른 방법(적분방정식을 이용한 방법등)에서 얻은 결과들과도 잘 일치함을 알 수 있었다.

또한, 항만의 파도응답문제 이외에도 섬(island)이나 해양 구조물에 대한 reflection 및 diffraction 문제에도 본 방법을 적용하면(이때 Green 함수대신 고유함수를 이용) 더 효과적이다.

나아가 2차원 문제로 생각하고 있는 현방법을 3차원 문제로 확장한다면 항만내 정박중인 선박의 운동계산에 필요한 기진력 및 구조물에 작용하는 파력계산에 직접 응용할 수 있고 선형천수이론등의 가정을 도입하지 않고 실제로 복잡한 항만지형 및 해저지형을 그대로 적용할 수 있기 때문에 현 방법보다 더 향상된 정보를 얻을 수 있으리라 생각된다.

Reference

- [1] Kravtchenko, J. & Mcnown, J.S., "Seiche in rectangular port", *Quart. Appl. Math.* 13, 19-26, 1955.
- [2] Lee, J.J., "Wave-induced oscillations in harbors of arbitrary shape", Ph.D. thesis, Cal. Inst. Tech, 1969.
- [3] Hwang, L.S. & Tuck, E.O., "On the oscillations of harbors of arbitrary shape", *J. Fluid Mech.* 42, 447-464, 1970.

- [4] Mattioli, F., "Wave-induced oscillations in harbors of variable depth", *Computers and Fluids*, 6, 161-172, 1978.
- [5] Berkhoff, J.C.W., "Computation of combined refraction-diffraction", *Proc. 13th Int. Conf. Coastal Engineering Vancouver, Canada*, 1972.
- [6] Berkhoff, J.C.W., "Mathematical models for simple harmonic linear water waves—Wave Diffraction and Refraction", *Report on mathematical investigation, Delft Hydraulics Laboratory*, W163, 1976.
- [7] Chen, H.S. & Mei, C.C., "Oscillations and wave forces in a man-made harbor in the open sea", *10th Naval Hydrodynamics Symposium*, 1974.
- [8] Bettes, P. & Zienkiewicz, O.C., "Diffraction and Refraction of surface waves using finite and infinite elements", *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, 1271-1290, 1977.
- [9] Bai, K.J. & Yeung, R., "Numerical solutions of free-surface flow problems", *Proc. 10th Symp. Naval Hydrodynamics*, Office of Naval Research, 1974.
- [10] Kil, H.K., "국소유한요소법을 이용한 자유표면파 문제의 수치계산", *서울대학교 석사학위논문*, 1985.
- [11] Miles, J. & Munk, W., "Harbor paradox. *Journal of Waterways and Harbors Division*", ASCE, No. 2888, 1961.
- [12] Mei, C.C., "The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves", *John Wiley & Sons*, 1982.
- [13] Baker, B.B. & Copson, E.T., "The Mathematical Theory of Huygen's Principle", *Oxford University Press*, 1950.
- [14] Banaugh, R.P. & Goldsmith, W., "Diffraction of steady acoustic waves by surfaces of arbitrary shape", *J. Acoust. Soc. Am.* 35, 1590-1601, 1963.
- [15] Becker, E.B., Carey, G.F. & Oden, J.T., "Finite Elements", *Prentice-Hall, Inc.* 1981.
- [16] 김대준, "항만내의 파도응답에 관한 수치계산", *서울대학교 석사학위논문*, 1987.