

Delaunay's 삼각화를 이용한 3 차원 자동요소분할

Automatic Three Dimensional Mesh Generation using Delaunay's Triangulation

金 炯 碩* · 鄭 炫 教** · 李 基 植[§] · 韓 松 曄^{§§}
(Hyeong-Seok Kim · Hyun-Kyo Jung · Ki-Sik Lee · Song-Yop Hahn)

요 약

유한요소법의 적용에 있어 가장 어려운 문제중의 하나가 해석영역의 요소분할이다. 본 논문에서는 Delaunay 삼각화 기법을 이용한 3 차원 자동요소분할 알고리즘에 대하여 연구하였다. 먼저 계산하려는 영역의 경계면에 질점을 주고 이 점들만으로 사면체를 생성한다. 다음에 각 사면체의 질을 판단하여 질이 나쁜 사면체 근방에 내부점을 발생시키 보다 질이 좋은 사면체를 생성하여 가는 방법을 연구하였다. 요소가 밀집되어야 하는 부분은 경계면에 질점을 줄때 밀집되게 하면 되고 매질이 다른 영역에 대하여는 각각 분리하여 요소를 발생하였다. 사면체가 올바르게 생성되었는지를 각 사면체의 체적의 합과 실제체적을 비교하여 확인하였고 평등전계중에 놓인 유전체구의 문제를 본 방법에 의하여 생성된 요소망으로 계산하여 만족할만한 결과를 얻었다.

Abstract- A method of three-dimensional finite element mesh generation is presented in this paper. This method is based on the Delaunay's triangulation whose dual is Voronoi's diagram. A set of points is given on the boundary surface of the concerning domain and the initial tetrahedra are generated by the given set of points. Then, the quality of every tetrahedron is investigated and the interior points are generated near the tetrahedra which are inferior in quality and the tetrahedra of good quality can be generated with the boundary and the interior points. The density of tetrahedra can be controlled by the density of the initial boundary points. Regions with different material constant can be refined in tetrahedra respectively. To confirm the effectiveness of this algorithm, the total volume of tetrahedra was compared to the true volume and this mesh generator was applied to a three-dimensional electrostatic problem.

1. 서 론

전자장문제를 유한요소법으로 해석하려는 시도는 1970년대 초반부터였다. 1980년대 초반까지는

유한요소법을 적용하기 위한 이론연구에 치중하였으며 중반부터는 실제문제 해결에 필요한 응용연구가 활발하게 진행되고 있다.

유한요소법을 전자장 문제해석에 적용하는데 있어 가장 어려운 문제중의 하나가 요소망을 간편하게 발생시키는 것이다. 이와같은 목적으로 2 차원 문제에 대한 자동요소분할^{1,2} 및 적응요소분할^{3,4} 알고리즘들이 많이 연구되었으나, 3 차원 문제에 대한 요소발생연구는 별로 없는 실정이다.

지금까지 알려진 가장 최적의 요소발생 이론은

*正 會 員 : 서울대 工大 電氣工學科 博士課程
**正 會 員 : 江原대 工大 電氣工學科 助教授 · 工博
§ 正 會 員 : 增國대 工大 電氣工學科 副教授 · 工博
§§ 正 會 員 : 서울대 工大 電氣工學科 教授 · 工博
接受日 字 : 1988年 8月 19日
1次 修 正 : 1988年 10月 15日

Delaunay의 삼각화(triangularization)⁸⁾이며 2차원의 경우는 이미 많은 계산알고리즘이 발표되었다.

본 연구에서는 이 삼각화 이론에 입각하여 3차원 4면체 요소를 발생하는 알고리즘을 다루고 사례를 통하여 요소가 적절히 발생되었는지 확인하기로 한다.

2. Voronoi의 다면체

n개의 점 $x_i, i=1, 2, \dots, n$ 가 있을때

$$V_i = \{x : d(x, x_i) \leq d(x, x_j), \forall j \neq i\} \quad (2.1)$$

를 점 x_i 에 대한 Voronoi 다면체⁹⁾라 한다. 여기서 $d(x, x_k)$ 는 점 x 와 점 x_k 사이의 거리이다. 그림 1은 3차원 공간에 7개의 점이 있는 경우의 Voronoi 다면체이다. 예를 들어보면 면 $c_1 c_2 c_3 c_4$ 는 $d(x, x_3) = d(x, x_7)$ 인 평면이고 면 $c_2 c_3 d_3 d_2$ 는 $d(x, x_3) = d(x, x_2)$ 인 평면이다.

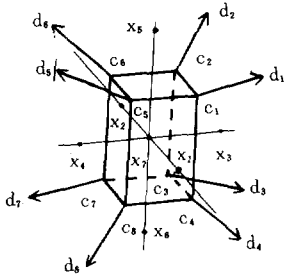


그림 1 3차원 공간에 7개의 점이 있는 경우 Voronoi 다면체

Fig. 1 Voronoi's polyhedra with seven points in a three dimensional space.

그리고 x_7 에 대한 Voronoi 다면체는 육면체 $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 c_7 c_8$ 이고 점 x_3 에 대한 Voronoi 다면체는 반무한 육면체 $c_1 c_2 c_3 c_4 d_1 d_2 d_3 d_4$ 이다. 이러한 다면체를 각각 타일(tile)이라고 한다. 이 그림을 보면 4개의 타일이 만나는 곳마다 하나의 정점이 생기게 되는데 그림 1에서는 각각 c_1, c_2, \dots, c_8 이다. 이들의 각점에서는 가장 가까운 같은 거리에 있는 4점이 존재하게 되는데 이 4점으로 사면체를 형성한다. 이 사면체를 Delaunay 사면체라 한다. 예를들면 정점 c_1 에서 가장 가까운 같은 거리에 있는 점들은 x_1, x_2, x_6, x_7 이고 이 정점 c_1 은 이 4점으로 이루어지는 사면체의 외접구의 중심이 된다. 그러므로 그림 1에서는 8개의 사면체가 형성된다. 그림 2는 그림 1에 의하여 얻어진 Delaunay

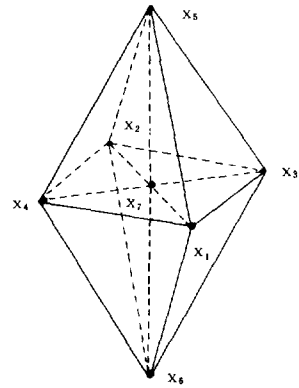


그림 2 그림 1의 Voronoi 다면체로부터 얻은 Delaunay 사면체

Fig. 2 Delaunay's tetrahedra obtained from Voronoi's polyhedra of Fig. 1.

사면체들이다.

위에서와 같이 Voronoi 다면체로부터 주어진 공간을 사면체로 나누어가는 방법을 Delaunay 삼각화(triangulation)라 한다. 이상의 예로부터 다음의 사실을 유추할수 있다.

- (1) Voronoi 다면체의 정점은 형성된 Delaunay 사면체의 외접구의 중심이 된다.
- (2) 하나의 외접구는 Delaunay 사면체를 만드는 점외에 어떤 다른점도 내포하지 않는다.
- (3) Delaunay 사면체는 다른 형성가능한 사면체보다 사면체의 가장 큰 내입체각을 최소화한다. 이 Delaunay 삼각화법으로 사면체를 생성하면 주어진 정점들에 대하여 가장 질이 좋은 사면체가 생성된다는 것이 증명되어 있다? 여기서 질이 좋다함은 4개의 내입체각이 비슷한것을 의미한다.

3. Delaunay 삼각화 과정

3차원 공간에 점 x_1, x_2, \dots, x_n 이 주어지면 우선 4개의 점을 이용하여 4면체를 만들고 이것을 기준으로 하여 다음 점을 하나씩 추가하면서 4면체들을 형성하여 간다.

3.1 초기 4면체

Delaunay 삼각화과정을 쉽게 설명하기 위하여 아래와 같이 몇가지 정의의를 하자.

$$(정의 1) K = x_i x_j x_k x_l \quad (3.1)$$

점 x_i, x_j, x_k 및 x_l 로 이루어지는 4면체

(정의 2) $Det(K) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k & x_l \\ y_i & y_j & y_k & y_l \\ z_i & z_j & z_k & z_l \end{vmatrix}$ (3.2)

4 면체 K의 체적은 $|Det(K)|/6$ 이 된다

초기의 4 면체를 구성하기 위하여 $K=x_1 x_2 x_3 x_4$ 로 정의하고 $Det(K) > 0$ 이 되도록 x_1, x_2, x_3, x_4 를 재배열한다. 만일 $Det(K) = 0$ 이면 이것은 x_1, x_2, x_3, x_4 가 동일평면에 있음을 뜻하고 $Det(K) \neq 0$ 되는 다른 4 점을 선택한다.

3.2 새로운점 추가시의 사면체 생성

(정의 3) C_m : m개의 점으로 Delanuay 사면체를 만들었을때 이들의 집합

(정의 4) β_m : C_m 의 원소 즉 4 면체들에 외접한 구들의 집합

새로운 점을 x_{m+1} 이라할때 이점의 위치는 다음의 세가지 경우중 하나가 된다.

- (1) $x_{m+1} \in \bigcup_{K \in C_m} K$
 - (2) $x_{m+1} \notin \bigcup_{K \in C_m} K$ and $x_{m+1} \in \bigcup_{B \in \beta_m} B$
 - (3) $x_{m+1} \notin \bigcup_{B \in \beta_m} B$
- (3.3)

위의 세경우를 하나의 4 면체가 있는 경우에 나타내면 그림 3 과 같이 각각 점a, b, c에 해당된다. 즉 (1)의 경우는 점 x_{m+1} 이 사면체 내부에, (2)의 경우는 사면체와 외접구 사이에, (3)의 경우는 외접구 밖에 있는 경우가 된다. 각 경우에 대한 사면체 생성과정은 아래와 같다.

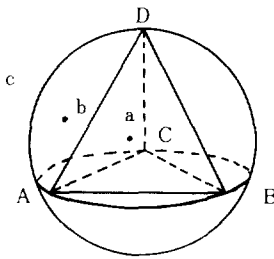


그림 3 한개의 사면체와 추가점의 위치

Fig. 3 A tetrahedron and the place of an added point.

우선 (1)의 경우는 그림 4와 같이 기존의 사면

체 $K=ABCD$ 는 없어지고 새로운 4개의 사면체 $K=ABCa, BCDA, CADa$ 및 $ABDa$ 가 생긴다. 이때 새로 발생한 4개의 4면체에 외접하는 구들은 각각 그 4면체를 이루는 4개의 점외에 다른점은 포함하지 않는다. 다음에 (2)의 경우는 그림 5-(a)와 같이 사면체 $K=CADb$ 를 생성할 수 있으나 점 b가 사면체 $K=ABCD$ 의 외접구내에 포함되므로 Delaunay 삼각화이론에 벗어난다. 그러므로 그림

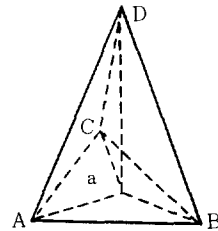


그림 4 추가점이 사면체 내부에 발생한 경우의 사면체 발생

Fig. 4 Generation of tetrahedra in case of adding a point inside tetrahedron

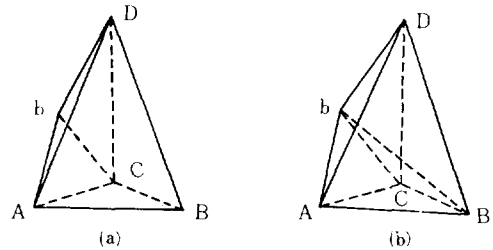


그림 5 추가점이 사면체 외부와 외접원사이에 발생한 경우의 사면체 발생

Fig. 5 Generation of tetrahedra in case of adding a point between circumsphere and outside of tetrahedron.

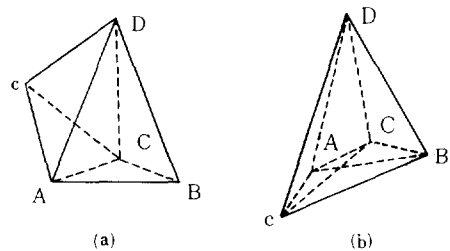


그림 6 추가점이 사면체의 외접원 밖에 발생한 경우의 사면체 발생

Fig. 6 Generation of tetrahedron in case of adding a point outside circumsphere.

5-(b) 와 같이 3 개의 사면체 $K=ABCD, BCDB$ 및 $ABDb$ 를 생성한다. 물론 새로 생성된 3 개의 사면체의 외접구는 다른점을 내포하지 않는다.

다음에 (3) 의 경우는 기존의 사면체 $K=ABcD$ 는 그대로 있고 새로운 사면체만 추가되는데 그림 6-(a) 의 경우는 사면체 $K=CADc$ 가 생성되고 그림 6-(b) 의 경우는 3 개의 사면체 $K=CADC, ABCc$ 및 $ABDc$ 가 생성된다.

4. 유한요소해석영역의 이산화

3 차원 유한요소해석영역을 사면체요소로 이산화 하는데는 크게 두단계를 거친다. 우선 해석영역의 표면에 정점을 주고 이 표면정점만으로 Delaunay 사면체를 생성한다. 다음에 이렇게 생성된 사면체 중에는 질이 좋지 않은 사면체들이 많으므로 이들 사면체내에 내부점을 발생시키 질이 좋은 새로운 사면체를 발생하게 된다.

4.1 표면정점에 의한 사면체 발생

해석영역의 표면에 정점을 준다. 이 정점을 줄때 는 요소가 밀집되어야 하는곳에 정점들이 밀집되도록 준다. 일단 표면정점이 결정되면 앞절에서 설명한 Delaunay 삼각화기법을 적용하여 사면체를 생성하여 간다.

그림 7 은 6 면체 영역의 이산화 결과를 보여준다. 우측면에는 12개의 정점, 좌측면에는 4개의 정점, 상면 및 하면에는 각각 6개의 정점, 전면 및 후면에는 각각 5개의 정점이 있는 경우인데 현재 27개의 사면체가 형성되어 있다.

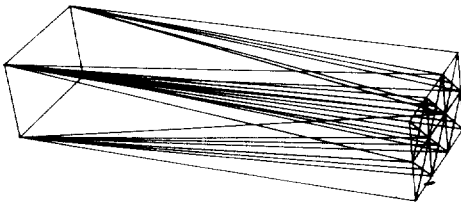


그림 7 6 면체를 표면의 정점만으로 사면체요소로 분할한 경우

Fig. 7 Division of hexahedron only with a set of points on surfaces.

4.2 사면체의 질 및 내부점 발생

앞절에서 본바와 같이 표면의 정점만으로 생성된 질이 좋지않은 사면체들이 많이 있다. 이들의 질을

개선하려면 내부점을 발생하여 사면체의 수를 늘리 면된다. 앞에서 설명한바와 같이 질이 좋은 사면체 리함은 4 개의 내입체각이 비슷한 사면체인데 다시 말하면 각 모서리의 길이기 비슷한 사면체라고도 할 수 있다. 그러므로 이 모서리의 길이로부터 사면체의 질을 판단할 수 있고 내부점도 이를 고려하여 그 위치를 설정한다.

(정의 5) $P(x)$: 표면의 점 x 와 연결된 모서리들의 길이의 산술평균

지금 임의의 사면체 $K=x_1 x_2 x_3 x_4$ 에 대하여

$$V(K) = [\pi^{1/3} P(x_i)]^3 \tag{4.1}$$

리 하면 사면체 K 부근에 위치하는 사면체들의 바람직한 체적은 $(V(K))^3/6$ 과 같다. 그런데 이 사면체 K 의 체적이 희망값보다 크면 이 사면체는 세분 되어야 한다.

$$\text{즉 } Det(K) > (V(K))^3 \tag{4.2}$$

인 모든 사면체에는 내부점을 발생시키는데 그 좌표 x_k 는

$$x_k = \frac{\sum_{i=1}^4 \left[\sum_{j=1, j \neq i}^4 x_j P(x_i) \right]}{3 \sum_{i=1}^4 P(x_i)} \tag{4.3}$$

이다.

식 (4.1) 에서 $V(K)$ 는 $P(x_i)$ 의 기하평균을 취 하였는데 그외에도 즉

$$V(K) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 P(x_i) \tag{4.4}$$

$$V(K) = \frac{4}{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{P(x_i)}} \tag{4.5}$$

와 같이 $V(K)$ 를 산술평균 또는 조화평균을 취 하여 식(4.2) 를 이용할 수 있다.

4.3 내부점에 의한 사면체 발생

내부점이 발생되면 이점과 그 주위의 점들에 의해 새로운 사면체를 발생시켜야 하는데 이 경우는 3.2절에서 설명한 (1) 의 경우에 해당된다. 즉 이 내부점을 포함하는 모든 기존 사면체의 외접구를 구하고 이 외접구에 포함되는 사면체의 정점들

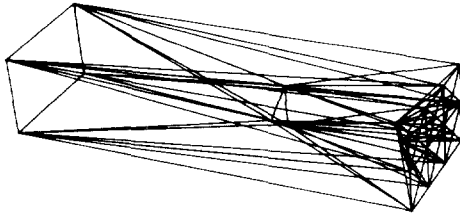


그림 8 그림 7의 경우에 내부점을 발생한다음 사면체요소로 분할한 결과

Fig. 8 Division by tetrahedra after generating interior points in case of Fig. 7.

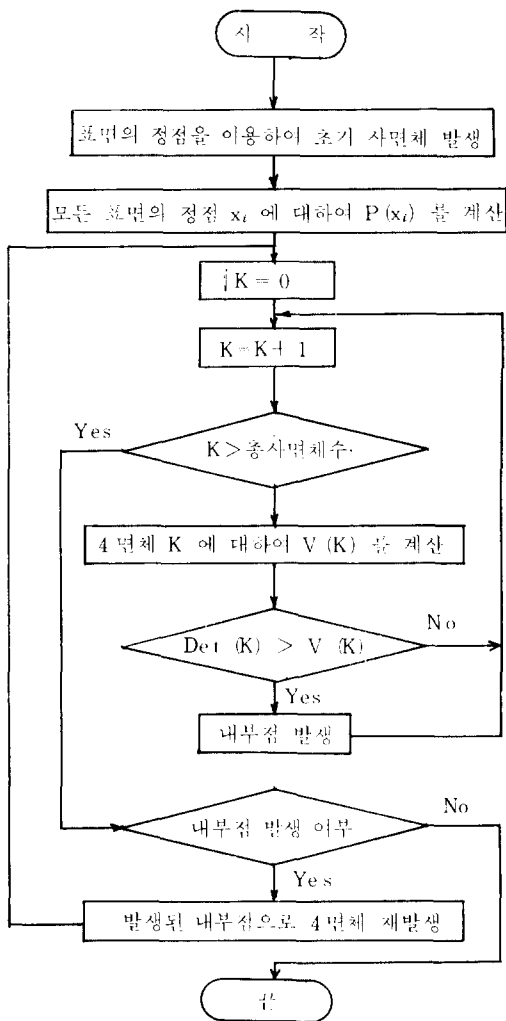


그림 9 흐름도
Fig. 9 Flowchart.

과 이 내부점으로 사면체를 발생시키면 된다.

그림 8은 그림 7의 경우에 식(4.1)과 식(4.2)를 적용하여 내부점을 발생하고 사면체를 생성한 경우이다. 5개의 내부점이 발생하였고 사면체는 71개로 증가하였다.

이상의 과정을 정리하여 요약하면 그림 9와 같다.

5. 응용사례

보다 실제적인 예로서 진공중의 평등전계속에 놓인 유전체구의 문제를 다루어본다. 대칭성을 고려하여 1/8공간만 이산화하면 된다. 이 경우 발생된 사면체가 매집이 서로 다른 영역을 공유하면 안되므로 유전체구와 진공부분을 나누어 각각에 대하여 이산화 한다. 그림 10은 두 영역의 경계부분에 36개의 정점을 포함하여 구의 표면에 73개, 진공부분은 151개의 정점을 주고 사면체를 발생한 그림이다. 구에는 164개의 사면체, 진공부분에는 395개의 사면체가 발생하였다.

그림 11은 사면체의 질을 판단하여 내부점을 발생한 경우의 사면체요소망인데 구내부에는 45개의

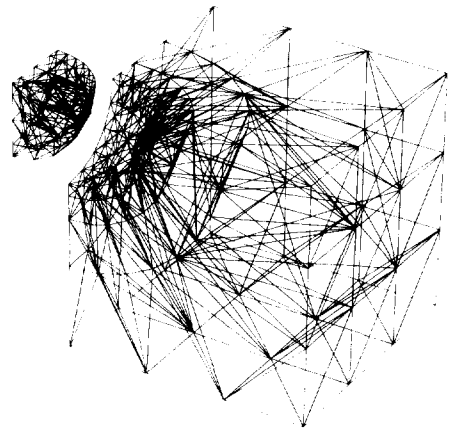


그림 10 1/8구와 그 주위공간을 표면정점만으로 4면체요소분할을 한 요소망

Fig. 10 Mesh generation of an eighth of a sphere and its near space only with a set of points on the boundary surfaces.

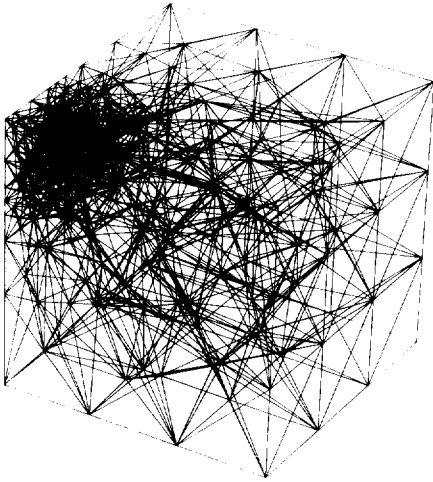


그림 11 그림 10의 경우에 내부점을 형성한 다음 사면체요소분할을 한 요소망
Fig. 11 Mesh generation after generating interior points in case of Fig. 10.

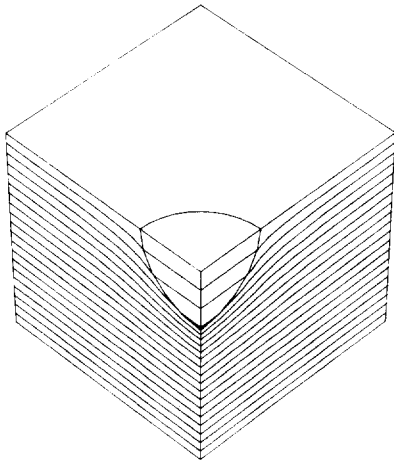


그림 12 두 Neumann 경계면에서의 등전위 분포
Fig. 12 Distribution of equipotential line on two Neumann boundary surfaces.

내부점이 발생하여 사면체가 465개로 증가하였고 진공부분은 95개의 내부점이 발생하여 사면체가 1045개로 증가하였다.

사면체들이 올바르게 생성되었는지 확인하기 위하여 우선 전체 사면체의 체적의 합을 구하여 본 결과 진치와 완전히 일치하였다.

다음으로 이 요소망을 이용하여 유한요소해석을 시도하였다. 구의 반경은 0.3m, 평등전계의 세기는 1 [V/m], 경계면은 구의 반경의 3.3배, 구의 비유전율은 4로 하였다. 전체 정점수는 328개 있는데 전위를 계산한 결과 이론치*와 5% 이내의 오차로 일치하였으며 두개의 Neumann 경계면에 대한 등전위 분포를 그려본 결과 그림 12를 얻었다. 양면에서 동일한 전위분포를 얻었고 그 분포가 합리적임을 알 수 있다.

6. 결 론

Delaunay 삼각화법에 의하여 3 차원에서 사면체를 발생시키는 알고리즘을 연구하였다. 본 연구를 통하여 얻어진 결과를 요약하면 아래와 같다.

- (1) 해석하려고 하는 영역의 경계면에만 정점을 주면 이것을 이용하여 사면체를 발생하고 각 사면체에 대하여 그질을 판단한다. 품질이 좋지 않은 사면체에는 내부점을 발생하여 질이 좋은 사면체를 자동으로 발생한다.
- (2) 유한요소해석에 이용할 때는 전계 또는 자체의 변화가 심한 곳에는 요소가 밀집되어야 하는데 이것은 그 부분의 경계에 정점을 줄때 밀집되도록 주기만하면 된다.
- (3) 매질이 다른 영역이 있는 경우는 동시에 포함하는 경우가 생기지 않는다.
- (4) 본 연구에서는 IBM PC 모델 386을 이용하였는데 1045개의 사면체를 발생시키는데 약 15시간이 소요되었다. 그러므로 수천개 정도의 사면체를 다루는 3 차원 문제에서는 10mips 차원의 컴퓨터가 실용적이라 하겠다.

끝으로 본 연구는 1987년도 한국과학재단의 목적 기초연구비에 의하여 이루어졌음을 알려드립니다.

참 고 문 헌

- 1) W.C. Thacker, "A brief review of technique for generating irregular computation grids", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, pp. 1335-1341, 1980.
- 2) Dennis A. Lindholm, "Automatic triangular mesh generation on surfaces of polyhedra", *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. MAG-1, no.6, pp. 594-598, Nov.,

- 1983.
- 3) Z.J. Cendes and D.N. Shenton, "Adaptive mesh refinement in the finite element computation of magnetic field", IEEE Trans. on Magnetics, vol. MAG-21, no.5, pp. 1811-1816, Sep., 1985.
 - 4) Song-yop Hahn et al, "A posteriori error estimate for adaptive finite element mesh generation", IEEE Trans. on Magnetics, vol. MAG-24, no.1, pp. 315-317, Jan., 1988.
 - 5) F. Hermeline, "Triangulation automatique d'un polyedre en dimension N", R.A.I.R.O. Analyse Numerique, vol.16, no.3, pp.211-242, 1982.
 - 6) Witold Browstow and Jean-pierre Dussault, "Construction of Voronoi polyhedra", Journal of Computational Physics, vol.29, pp.81-92, 1978.
 - 7) R.Sibson, "Locally equiangular triangulations", The Computer Journal, vol.21, no.3, pp.243-245, 1978.
 - 8) J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, 2nd edn, Wiley, New York, 1975, pp. 149-151.
-