

C-1 有限要素法에 의한 磁界解析에 관한 研究

論文

37~1~3

A Study on the Magnetic Field Analysis by C-1 Finite Element Method

任 達 鎬* · 金 生 洙** · 金 奎 卓**

(Dal-Ho Im, Saeng-Soo Kim · Gyu-Tak Kim)

ABSTRACT

Up to date, C-0 Finite Element Method which is the means for analyzing electric machinery can not be got the precision magnetic flux density because the magnetic flux density has the discontinuity in the interelement.

To supplement this defect, we propose the C-1 finite element method of 9 D.O.F. in this paper. In this method, the vector potential and the magnetic flux density are continuous on the interelement and direction derivative of potential would be an unknown value. We developed the algorithm to apply this method.

For examining the utility, we applied this method to analytic model and compared with the result of C-0 Finite Element Method using linear element.

1. 序 論

電氣機器의 磁界解析에 有限要素法이 도입된 이래 國內에서도 많은 研究가 있었으나 지금까지의 解析方法은 要素의 境界上에서 벡터 포텐셜 A 만을 연속으로 하는 C-0 有限要素法으로 解析하였다.^{2), 12)}

C-0 有限要素法중 線型要素는 數式展開 및 컴퓨터 프로그램이 간단하기 때문에 널리 使用되고 있으나 電氣機器 解析 및 設計時 重要定數인 磁束密度는 벡터 포텐셜의 微分演算으로 계산되기 때문에 정확도가 매우 떨어져며 均一 媒質일지라도 要素의 境界上에서 不連續이 된다.^{3), 3)-5), 8), 10)} 그러므로 C-0 有限要素法에서 磁束密度를 連續으로 하려면 최소한 要素내의 節點數가 21개인 Quintic 要素 이상으로 補間 次數를 높여야 한다.^{3), 4)} 이 경우 數式展開 및 컴퓨터 프로그램이 매우 복잡하며 要素内部 및 境界上에 節點이 존재하여 Condensation이 필요하게 된다.

⁹⁾⁻¹¹⁾ 더 나아가 기존의 C-0 有限要素法에서 磁束密度는 Gaussian積分點에서 계산되므로 구하고자 하는 節點의 磁束密度는 정확도가 더욱 떨어져 高에너지密度의 電氣機器 解析時 問題點이 많았다.^{2), 5)-10), 12)}

이러한 問題點을 해결하기 위하여, 本 論文에서는 要素의 境界上에서 벡터 포텐셜 A 와 그 1階導函數 成分이 連續이며, 벡터 포텐셜의 方向 導函數를 基本 方程式의 未知數로 하는 C-1 有限要素法을 導入하였다.^{3), 6)} 이러한 C-1 有限要素法에서는 磁束密度 B 를 시스템 方程式으로 부터 직접 구할 수 있다.

本 研究의 有用性을 究明하기 위하여 解析의 인 모델에 本 方法을 適用하였으며, 線型要素를 利用한 C-0 有限要素法의 結果와 比較, 檢討하였다.

2. 基本方程式과 有限要素法 適用

2.1 基本方程式과 界變數의 近似化

그림 1 과 같은 解析모델의 磁束分布를 2次元의 으로 解析하기 위하여 다음과 같은 假定을 두었다.

1) 人力電流 密度는 z 方向 成分만 存在하며 z 方向 變化는 없다.

*正 會 員: 漢陽大 工大 電氣工學科 教授 · 工博

**正 會 員: 漢陽大 大學院 電氣工學科 博士過程

接受日字: 1987年 7月 23日

1次修正: 1987年 9月22日

2次修正: 1987年 12月30日

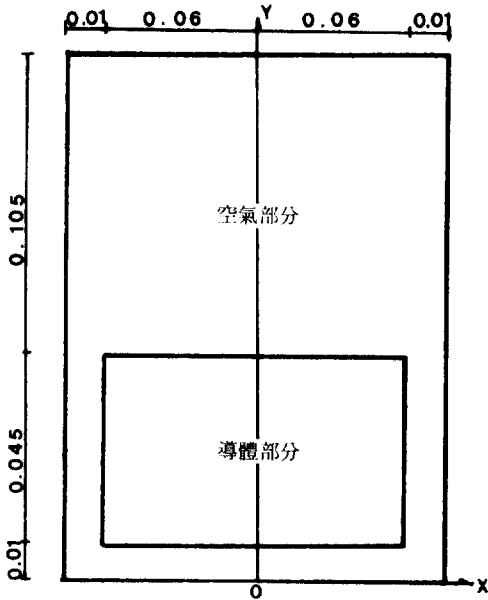


그림1. 解析 모델
Fig.1. Analyzing Model

- 2) 導體의 渦流 및 表皮效果는 無示한다.
 - 3) 磁界는 準定常磁界로서 變位電流是 무시한다.
- 이상과 같은 가정하에서 Maxwell의 電磁方程式을 적용하여 支配方程式(Governing Equation)을 誘導하면 式(1)과 같은 벡터 포텐셜에 대한 Poisson 方程式이 된다.

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{J} \quad (1)$$

여기서 \mathbf{A} 및 \mathbf{J} 는 벡터 포텐셜 (Wb/m) 및 電流密度 (A/m^2)이며 μ 는 透磁率(H/m)이다. 또한 \mathbf{J} 는 z 方向 成分뿐이므로 式(1)을 $X-Y$ 座標系에서 二次元的으로 표현하면

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) = -J_z \quad (2)$$

이 된다. 式(2)에 有限要素法을 適用하기 위하여 解析領域을 그림 2와 같이 9개의 D. O. F. (Degree of Freedom)를 갖는 三角要素로 分割하면 各節點의 界變數는 다음과 같다.

$$\{A_p\} = [A_1, A_{1x}, A_{1y}, A_2, A_{2x}, A_{2y}, A_3, A_{3x}, A_{3y}]^T \quad (3)$$

여기서 A_i 는 i 節點의 벡터 포텐셜이며 A_{ix}, A_{iy} 는 各

各 i 節點에서의 벡터 포텐셜의 x, y 方向 1階導函數이다. 이 경우 要素 内部의 界變數 變化는 한 要素당 9개의 D. O. F.를 취하므로 Pascal의 3차 完 全 多項式으로 近似化된다. 이 경우 C-0 有限要素法에서와 같이 독립변수 x, y 로 近似化시키면 10개의 未知數가 존재한다. 그러므로 未知數는 10개이나 節點值가 9개이므로 부정이 되어 한 項을 소거시켜야 하는데 소거시키는 方法으로는 幾何學的 等 方性을 利用하는 方法과 中心節點을 設定하여 演算 과정에서 Condensation을 利用하는 方法이 있으나 이 方法들은 要素의 形狀이 直角 三角形인 경우 解가 Singularity를 갖거나 收斂하지 않을 수 있으므로 面積座標系의 導入이 필연적이다.^{3),4)} 따라서 要素 内部의 界變數 變化를 面積座標系를 利用하여 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{A}_z = & \alpha_1 L_1^3 + \alpha_2 L_2^3 + \alpha_3 L_3^3 + \alpha_4 L_1 L_2 + \alpha_5 L_1^2 L_3 + \\ & \alpha_6 L_2^2 L_3 + \alpha_7 L_2^2 L_1 + \alpha_8 L_3^2 L_1 + \alpha_9 L_3^2 L_2 + \alpha_{10} L_1 L_2 L_3 \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 위에서 言及한 이유에 의해 한 項을 소거시켜야 하는데 L_i^3 項은 各 節點에서 벡터 포텐셜을 規定하는 項이며, $L_i^2 L_j$ 項은 各 節點의 벡터 포텐셜에는 影響을 미치지 않으나 포텐셜의 微分値, 즉 磁束密度의 x, y 成分을 결정하는 項이다.

마지막 項 $L_1 L_2 L_3$ 는 各 節點의 포텐셜 및 導函數에는 影響을 주지 않고 단지 要素 内部의 變化만을 나타낸다. 그러나 이 項을 除去하면 要素 内部의 포텐셜 및 그 微分値의 近似에 相當한 誤差를 수반하며 要素의 境界에서 微分値가 不連續이 되는 點이 발생하게 되어, 本 研究에서는 $L_i^2 L_j$ 項에 加重 值로 考慮하여 解의 精確도를 높였다.⁵⁾ 그림 2와 같

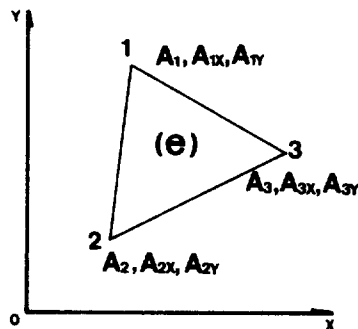


그림2. 9개의 D. O. F를 갖는 三角要素
Fig.2. Triangular Element of 9 D. O. F.

은 要素에서 各 節點의 벡터 포텐셜을 規定하는 D. O. F.는 3으로 포텐셜은 線型的인 變化를 하므로 要素內 임의의 점에서의 벡터 포텐셜 \$A_z\$는 다음과 같이 近似化 된다.

$$\tilde{A}_z = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 (L_1^2 L_2 + D) + \alpha_5 (L_1^2 L_3 + D) + \alpha_6 (L_2^2 L_3 + D) + \alpha_7 (L_2^2 L_1 + D) + \alpha_8 (L_3^2 L_1 + D) + \alpha_9 (L_3^2 L_2 + D) \quad (5)$$

여기서 \$L_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta\$로 表現되는 面積座標이며 \$a_i = x_j y_k - x_k y_j\$, \$b_i = y_j - y_k\$, \$c_i = x_k - x_j\$로 주어지는 循環數이다. 한편 \$\Delta\$는 三角要素의 面積이며 \$D = \omega L_1 L_2 L_3\$로 \$\omega\$는 0~1사이의 값을 갖는 常數이다.

이 近似化된 界變數 \$\tilde{A}_z\$를 各 節點值 \$|A_p|\$로 표현하면

$$\tilde{A}_z = [L][C]|A_p| \quad (6)$$

이다. 여기서 \$[C]\$는 常數 Matrix로 다음 式으로 주어진다. (부록참조)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & c_k & -b_k & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -c_j & b_j & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c_i & -b_i & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -c_k & b_k & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_j & -b_j \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (7)$$

2.2 系 方程式(System equation)

式 (2)의 支配方程式으로부터 解析領域의 Energy 汎函數를 誘導하면 다음과 같다.

$$\chi = \sum_{e=1}^q \int_{\Delta} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right)^2 - 2\mu_0 J_z A_z \right\} dx dy \quad (8)$$

q=총 요소수

式 (6)으로 近似化된 界變數를 式 (8)에 代入하여 정리하면

$$\chi = \sum_{e=1}^q \left[\int_{\Delta} \frac{1}{2} |A_p|^T [C] \begin{Bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} \end{Bmatrix} [C] |A_p| dx dy - \int_{\Delta} \mu_0 J_z [L][C] |A_p| dx dy \right] \quad (9)$$

이다. 式 (2)의 Poisson方程式의 解를 구하는 것은 式 (9)의 Energy汎函數가 最小化되는 \$|A_p|\$를 구하는 것과 等價이다.^{2), 4), 12)}

$$\text{즉, } \frac{\partial \chi}{\partial |A_p|} = \sum_{e=1}^q \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial |A_p|} = 0 \quad (10)$$

p=1, 2, 3, ... 총 D. O. F. 수

을 만족하는 \$|A_p|\$가 式 (2)의 解이다. 이를 行列로 표현하면

$$\frac{\partial \chi}{\partial |A_p|} = [S] |A_p| - \{F\} = 0 \quad (11)$$

이다. 여기서

$$[S] = \sum_{e=1}^q \int_{\Delta} [C]^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} \end{Bmatrix} [C] dx dy$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^q \int_{\Delta} [C]^T [L]^T \mu_0 J_z dx dy \quad (12)$$

이다.

3. 適用例 및 結果 考察

3.1 解析 모델

本 論文에서는 C-0 有限要素와 C-1 有限要素로 解析時 精確도를 비교하기 위하여 Poisson 方程式이 성립하는 解析의 모델을 택하였다.^{6), 7)}

그림 1과 같은 解析모델에 대하여 電氣, 磁氣의 對稱性을 고려하여 우측 部分만을 解析領域으로 設定하였다. 境界條件으로는 x軸, y軸에 접하는 部分과 x=a(0.07m)에서는 自然境界條件을, 導體 部分과 충분한 거리를 둔 y=b(0.16m)에서는 Dirichlet 境界條件을 만족시키므로서 電氣機械의 Slot 領域 解析時와 유사한 모델을 設定하여 그림 3과 같이 要素分割하였다. 그림 3.a)는 節點數 60개, 要素數 90개이며, C-1 有限要素의 총 D. O. F.는 180개이고 未知 D. O. F.는 144개이다. 그림 3.b)는 총 D. O. F.가 같은 경우 C-0 解와 C-1 解의 精確도를 比較하기 위하여 節點數 209, 要素數 360개로 分割한 경우로 未知 節點數는 198개이다. 이 때의 解析解는 二重 Fourier級數法인 Roth Method에 의해 다음 式으로 주어진다.⁶⁾⁻⁷⁾

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} \cos m_i x \cos n_j y$$

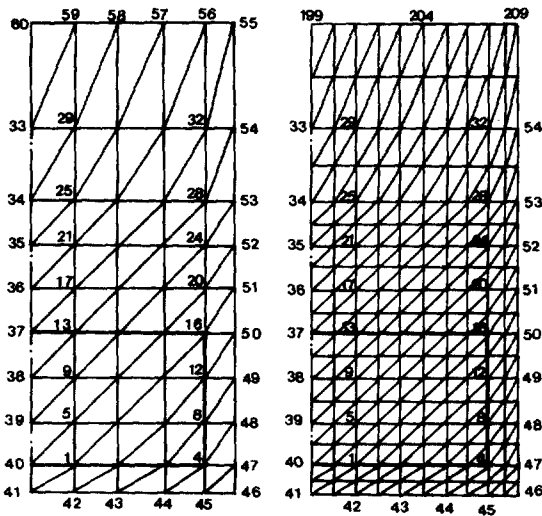


그림3. 요소分割圖

a) 60절점 b) 209절점

Fig.3. Finite Element Mesh

a) 60 node b) 209 node

$$A_{i,j} = -\frac{4\mu_0 J \sin n_i a_1 (\sin n_j b_2 - \sin n_j b_1)}{m_i n_j (m_i^2 + n_j^2) ab} \quad i \neq j \text{ 일 때}$$

$$A_{i,i} = -\frac{2a_1 \mu_0 J (\sin n_i b_2 - \sin n_i b_1)}{n_j^2 \cdot ab} \quad i = j \text{ 일 때}$$

$$m_i = \frac{(i-1)\pi}{a}, \quad n_j = \frac{(2j-1)\pi}{2b} \quad (13)$$

3.2 解析結果 및 檢討

C-0, C-1 有限要素法에 의해 구한 解를式 (13)의 解析解와 비교하여 표1, 2, 3에 나타내었으며 式 (5)의 加重值 ω 의 變化에 따른 誤差를 그림 4에 도시하였다. 또한 本 論文에 사용한 電算 program의 flow Chart를 그림 5에 나타내었으며 C-0, C-1 有限要素法으로 解析한 경우의 計算時間, 使用容量等을 비교하여 표 4에 나타내었다. 本 論文에 사용된 計算機 機種은 IBM PC-AT이다.

이상의 結果로 부터 다음과 같은 사실을 알 수 있었다.

1) C-0 有限要素法으로 解析한 경우 Potential 값은 60 D. O. F. 인 경우 0.05%, 209 D. O. F. 인 경우 0.01%로 만족스러운 結果를 얻었으나 節點數를 增加시킨 경우(3 배이상) 計算容量의 증가(12배)에 비해 精確도는 거의 改善되지 않았다. 이는 두 경우 모두 誤差가 Truncation error에 기인한 것으로 생각된다.

2) 電氣機器의 重要定數인 磁束密度는 C-0 有限要素法에서 그 誤差가 各各 9.73%, 3.18%로 나타나 그 誤差가 매우 小을 알 수 있었으며 容量增加에 비해 精確도는 크게 改善되지 않았음을 알 수 있었다.

3) 要素의 境界上에서 磁束密度의 連續性을 만족하는 C-1 有限要素法은 磁束密度를 시스템 방정

표 1. Vector Potential 비교

Table 1. Comparison of Vector potential

N	ANALYTIC	C-0(209)	C-0(60)	C-1(180)
5	.12288E-01	.12290E-01	.12297E-01	.12286E-01
6	.12212E-01	.12213E-01	.12215E-01	.12210E-01
7	.12077E-01	.12076E-01	.12074E-01	.12075E-01
8	.11857E-01	.11857E-01	.11854E-01	.11856E-01
9	.11549E-01	.11549E-01	.11547E-01	.11547E-01
10	.11481E-01	.11481E-01	.11481E-01	.11479E-01
11	.11355E-01	.11356E-01	.11358E-01	.11354E-01
12	.11145E-01	.11148E-01	.11157E-01	.11143E-01
13	.10291E-01	.10288E-01	.10280E-01	.10290E-01
14	.10238E-01	.10238E-01	.10237E-01	.10237E-01
15	.10147E-01	.10149E-01	.10155E-01	.10145E-01
16	.10013E-01	.10020E-01	.10038E-01	.10014E-01
17	.87846E-02	.87829E-02	.87781E-02	.87844E-02
18	.87500E-02	.87501E-02	.87503E-02	.87498E-02
19	.86977E-02	.86995E-02	.87040E-02	.86976E-02
20	.86457E-02	.86476E-02	.86534E-02	.86453E-02
21	.73019E-02	.73010E-02	.72986E-02	.73018E-02
22	.72818E-02	.72818E-02	.72820E-02	.72817E-02
23	.72546E-02	.72546E-02	.72576E-02	.72546E-02
24	.72320E-02	.72327E-02	.72350E-02	.72319E-02
25	.58326E-02	.58320E-02	.58307E-02	.58325E-02
26	.58217E-02	.58216E-02	.58215E-02	.58216E-02
27	.58080E-02	.58082E-02	.58092E-02	.58078E-02
28	.57973E-02	.57977E-02	.57991E-02	.57972E-02
29	.33979E-02	.33978E-02	.33975E-02	.33980E-02
30	.33943E-02	.33944E-02	.33944E-02	.33944E-02
31	.33900E-02	.33902E-02	.33905E-02	.33901E-02
MEAN ERRORR (%)		.01201	.04574	.00728

표 2. 磁束密度의 비교(x-방향 성분)

Table 2. Comparison of flux density(x-component)

N	ANALYTIC	C-0(209)	C-0(60)	C-1(180)
5	-.33106E-02	-.34172E-02	-.38472E-02	-.32901E-02
6	-.69209E-02	-.70199E-02	-.73387E-02	-.67872E-02
7	-.11428E-01	-.11533E-01	-.11806E-01	-.11275E-01
8	-.17838E-01	-.14836E-01	-.11510E-01	-.17718E-01
9	-.29785E-02	-.28887E-02	-.27039E-02	-.29773E-02
10	-.63122E-02	-.62309E-02	-.60332E-02	-.62608E-02
11	-.10732E-01	-.10580E-01	-.10060E-01	-.10297E-01
12	-.17413E-01	-.14359E-01	-.10772E-01	-.17322E-01
13	-.25308E-02	-.20507E-02	-.13392E-02	-.24126E-02
14	-.47722E-02	-.45729E-02	-.40298E-02	-.49033E-02
15	-.74481E-02	-.71141E-02	-.63554E-02	-.77942E-02
16	-.10135E-01	-.86792E-02	-.69655E-02	-.10249E-01
17	-.15738E-02	-.14101E-02	-.86114E-03	-.15928E-02
18	-.29890E-02	-.28303E-02	-.23911E-02	-.30001E-02
19	-.38076E-02	-.36720E-02	-.33162E-02	-.37912E-02
20	-.25666E-02	-.28589E-02	-.30066E-02	-.27160E-02
21	-.94736E-03	-.87256E-03	-.64397E-03	-.96038E-03
22	-.16681E-02	-.15879E-02	-.13571E-02	-.16751E-02
23	-.18243E-02	-.17918E-02	-.16707E-02	-.18362E-02
24	-.10150E-02	-.11248E-02	-.12767E-02	-.11151E-02
25	-.52744E-03	-.47655E-03	-.36592E-03	-.53751E-03
26	-.88130E-03	-.82125E-03	-.70510E-03	-.89764E-03
27	-.88760E-03	-.85279E-03	-.80336E-03	-.89439E-03
28	-.47681E-03	-.48890E-03	-.53938E-03	-.48828E-03
29	-.17602E-03	-.16237E-03	-.13020E-03	-.17022E-03
30	-.28189E-03	-.27268E-03	-.25697E-03	-.28298E-03
31	-.26816E-03	-.27012E-03	-.28870E-03	-.28102E-03
MEAN ERRORR (%)		6.34554	19.38027	2.09019

식으로 부터 직접 구할 수 있었으며 벡터 포텐셜 및 磁束密度的 誤차는 各各 0.007%, 1.06% ($\omega = 0.6$)로 C-0 有限要素法과 比較할 때 매우 만족스러운 結果를 얻었다.

4) C-0 有限要素法으로는 精確한 磁束分布 樣相

표 3. 磁束密度的 비교(y-방향성분)

Table 3. Comparison of flux density (y-component)

N	ANALYTIC	C-0(209)	C-0(60)	C-1(180)
5	-.31939E-01	-.32267E-01	-.32942E-01	-.32253E-01
6	-.31760E-01	-.31900E-01	-.31944E-01	-.31978E-01
7	-.31911E-01	-.31821E-01	-.31266E-01	-.32236E-01
8	-.33084E-01	-.32650E-01	-.31426E-01	-.33770E-01
9	-.66638E-01	-.66653E-01	-.67116E-01	-.66411E-01
10	-.65842E-01	-.65679E-01	-.65648E-01	-.65533E-01
11	-.64290E-01	-.63936E-01	-.63233E-01	-.63828E-01
12	-.61859E-01	-.61416E-01	-.60396E-01	-.62339E-01
13	-.10003E+00	-.96790E-01	-.92401E-01	-.10073E+00
14	-.98801E-01	-.95490E-01	-.90874E-01	-.99440E-01
15	-.96024E-01	-.92689E-01	-.88172E-01	-.96643E-01
16	-.87911E-01	-.86477E-01	-.83918E-01	-.88601E-01
17	-.99659E-01	-.99421E-01	-.99128E-01	-.99342E-01
18	-.98518E-01	-.98377E-01	-.98426E-01	-.98193E-01
19	-.96336E-01	-.96322E-01	-.96664E-01	-.96019E-01
20	-.93186E-01	-.93411E-01	-.94058E-01	-.92687E-01
21	-.98206E-01	-.98283E-01	-.98167E-01	-.98268E-01
22	-.97425E-01	-.97561E-01	-.97615E-01	-.97484E-01
23	-.96208E-01	-.96400E-01	-.96599E-01	-.96235E-01
24	-.95074E-01	-.95211E-01	-.95423E-01	-.95028E-01
25	-.97730E-01	-.97623E-01	-.97575E-01	-.97613E-01
26	-.97269E-01	-.97210E-01	-.97252E-01	-.97163E-01
27	-.96641E-01	-.96628E-01	-.96740E-01	-.96556E-01
28	-.96086E-01	-.96123E-01	-.96223E-01	-.96068E-01
29	-.97197E-01	-.97187E-01	-.97199E-01	-.97132E-01
30	-.97026E-01	-.97027E-01	-.97056E-01	-.96991E-01
31	-.96816E-01	-.96821E-01	-.96852E-01	-.96799E-01
MEAN ERROR (%)		.65647	1.76069	.44379

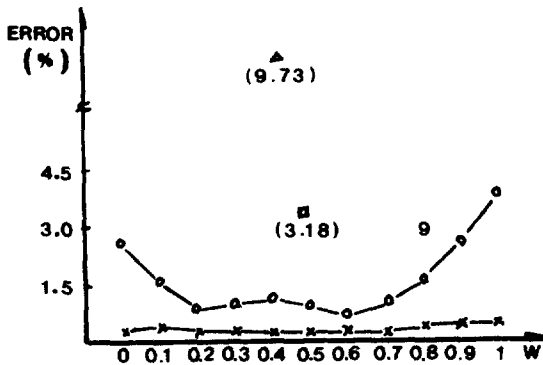


그림4. 加重值 ω 의 변화에 따른 誤差

- : C-1 有限要素의 磁束密度的 誤差
- × : C-1 有限要素의 potential 誤差
- △ : C-0 有限要素의 磁束密度 誤差(60절점)
- : C-0 有限要素의 磁束密度 誤差(209절점)

Fig.4. Error of varying ω

- : Error of flux density in C-1 F. E.
- × : Error of Potential in C-1 F. E.
- △ : Error of flux density in C-0 F. E. (60Node)
- : Error of flux density in C-0 F. E. (209Node)

은 볼 수 있으나 電氣機器의 重要定數인 磁束密度는 誤차가 매우 커 高 Energy密度的 電氣機器 解析時 C-1 有限要素法의 도입이 필수적임을 알았다.

5) L_1, L_2, L_3 를 補正하여 주는 加重值 ω 는 potential의 精確도에는 거의 영향을 미치지 않으나 磁束密度 計算시 $\omega = 0$ 인 경우, 즉 加重值를 考慮하지 않은 경우 그 誤차가 2.74%로 나타났다. ω 의 증

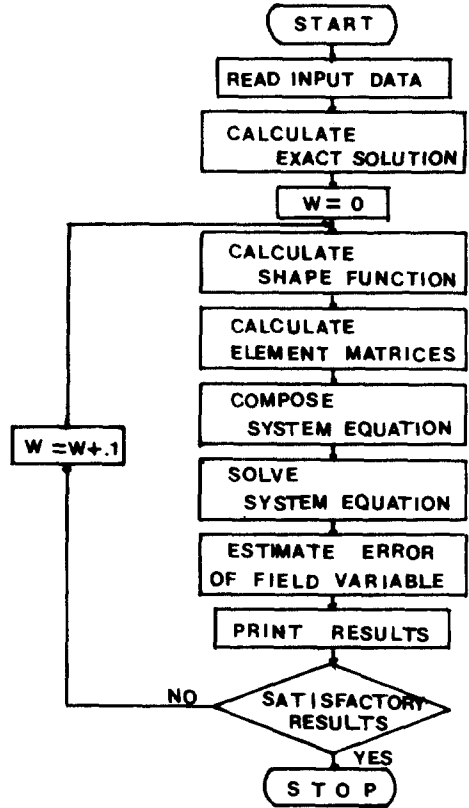


Fig.5. Flow chart

표 4. 計算時間, 使用 容量비교표

Table 4. Comparison of computation time and used region

IBM PC-AT		C-0(60)	C-0(209)	C-1(180)
COMPUTATION TIME		16 MIN.	37 MIN.	34 MIN.
		87.01SEC.	69.29SEC.	85.86SEC.
SIZE (KB)	PROGRAM	59.289	66.518	65.808
	MEMORY	13.066	105.454	84.553
	TOTAL	72.355	171.975	150.361

가에 따라 그 誤差가 점진적으로 減少하여 $\omega=0.5$ 부근에서 最小로 되며 $\omega=0.7$ 이상에서는 다시 誤差가 增加하여 $\omega=1$ 인 경우, 즉 過多補正인 경우 3.92%로 나타났다. 本研究에서는 $\omega=0.6$ 인 경우 誤差가 1.06%로 最小가 되었다. 따라서 磁束密度를 精確하게 計算하려면 L_1, L_2, L_3 項의 適切한補正이 필요불가결하다.

6) 총 D.O.F.수가 같은 경우 C-1 有限要素法의 基지값이 C-0 有限要素法의 基지값보다 훨씬 많으므로 실제 機器解析時 計算容量을 크게 節減할 수 있다.

7) Dirichlet境界條件이 주어진 境界의 隣接節點의 誤差는 相對적으로 크게 나타났으나 이는 人爲的인 強制境界條件을 設定한 것에 基因하므로 실제 電氣機器에 適用할 때는 문제되지 않는다.

4. 結 論

高 에너지 密度의 電氣機器 特性解析에 있어서 磁束密度 算出은 기존의 C-0 有限要素法으로는 問題點이 많아 本研究에서는 要素의 境界上에서 磁束密度의 連續性을 만족하며, 支配方程式으로부터 직접 구할 수 있는 새로운 有限要素法을 提案하였다.

C-1 有限要素法은 解析領域을 상대적으로 크게 分割하여도 높은 精確도를 갖는 磁束密度를 구할 수 있으므로 電氣機器에 대한 特性解析 및 開發, 設計時 渦流 및 表皮效果를 考慮하여 本方法을 適用하면 精確한 磁束密度 算出이 가능하여 인덕턴스 및 토-크에 대한 정도높은 究明이 가능하리라 본다.

부 록

式 (5)로 近似化된 界變數 \bar{A}_2 에 대하여 各節點值를 代入하면

$$A_1 = \alpha_1$$

$$A_{1x} = \frac{\partial A_1}{\partial x} = \alpha_1 \frac{b_1}{2\Delta} + \alpha_2 \frac{b_2}{2\Delta} + \alpha_3 \frac{b_3}{2\Delta} + \alpha_4 \frac{b_2}{2\Delta} + \alpha_5 \frac{b_3}{2\Delta}$$

$$A_{1y} = \frac{\partial A_1}{\partial y} = \alpha_1 \frac{c_1}{2\Delta} + \alpha_2 \frac{c_2}{2\Delta} + \alpha_3 \frac{c_3}{2\Delta} + \alpha_4 \frac{c_2}{2\Delta} + \alpha_5 \frac{c_3}{2\Delta}$$

이다. 같은 方法으로 $A_2, A_{2x}, A_{2y}, A_3, A_{3x}, A_{3y}$ 을 代入하여 Matrix로 표현하면

$$\{A_p\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_{1x} \\ A_{1y} \\ A_2 \\ A_{2x} \\ A_{2y} \\ A_3 \\ A_{3x} \\ A_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b_1}{2\Delta} & \frac{b_2}{2\Delta} & \frac{b_3}{2\Delta} & \frac{b_2}{2\Delta} & \frac{b_1}{2\Delta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c_1}{2\Delta} & \frac{c_2}{2\Delta} & \frac{c_3}{2\Delta} & \frac{c_2}{2\Delta} & \frac{c_3}{2\Delta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b_1}{2\Delta} & \frac{b_2}{2\Delta} & \frac{b_3}{2\Delta} & 0 & 0 & \frac{b_2}{2\Delta} & \frac{b_1}{2\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{c_1}{2\Delta} & \frac{c_2}{2\Delta} & \frac{c_3}{2\Delta} & 0 & 0 & \frac{c_2}{2\Delta} & \frac{c_1}{2\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b_1}{2\Delta} & \frac{b_2}{2\Delta} & \frac{b_3}{2\Delta} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_1}{2\Delta} & \frac{b_2}{2\Delta} \\ \frac{c_1}{2\Delta} & \frac{c_2}{2\Delta} & \frac{c_3}{2\Delta} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_1}{2\Delta} & \frac{c_2}{2\Delta} \end{bmatrix} \{\alpha\}$$

$$= [Q] \{\alpha\}$$

이다. 여기서 $\{\alpha\}$ 를 구하면 $\{\alpha\} = [Q]^{-1} \{A_p\}$ 에서 matrix $[C]$ 는 式 (7)로 주어진다.

REFERENCE

- 1) Koshi Itaka, Mikio Kaji, Takashi Hara, "New Finite Element Field Calculation Technique in which Continuity of Electric Flux is Satisfied.", IEEE Trans. PAS-99, No. 6, pp. 2102-2112, 1980.
- 2) 任達鎬, "電氣系の有限要素法", 東明社, 1987.
- 3) D.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method.", 3rd ed., McGraw-Hill Book Co. pp. 226-244, New York, 1977.
- 4) Kenneth H. Huebner, "The Finite Element Method for Engineering." 2nd ed, pp. 172-178, John Wiley & Sons, 1982.
- 5) Erh-Rong Wu, "A cubic Triangular Element With Local Continuity - An Application in Potential Flow.", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 17, pp. 1147-1159, 1981.
- 6) K. G. Binns, P.J. Lawrenson, "Analysis and Com-

- putation Electric and Magnetic Field Problems.", 2nd ed., Pergamon Press, 1973.
- 7) B. Hague, "The Principle of Electromagnetism.", 2nd ed., Dover Publications, Inc., New York, 1969.
- 8) D.G. Harrison, Y.L. Cheung, "A Higher Order Triangular Finite Element For The Solution of Field problems in Orthotropic Media.", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 7, pp. 287-295, 1973.
- 9) P.Percell, M.F. Wheeler, "A C^1 Finite Element Collocation Method for Elliptic Equations.", SIAM J. Num. Anal., Vol. 17, No. 5, pp. 605-622, 1980.
- 10) P. Bartholomew, "Comment on Hybrid Finite Elements.", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 9, pp. 968-973, 1975.
- 11) J.L. Batoz, K.J. Bathe, Lee-Wing Ho, "A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements.", Int. J. Num. Meth. Engng., 1980.
- 12) 任 達鎮, "重電機設計에 따른 電界, 磁界分布 特性 解析을 위한 基本理論의 適用方法.", 大韓電氣協會 調查研究論文, Vol. 6, pp. 1-73, 1983.
-