

Pontryagin 최소 원리를 이용한 최적접종에 관한 연구

정형환* · 주수원* · 이광우**

= Abstract =

A Study of on the Optimal Vaccination using Pontryagin's Minimum Principle

Hyeng-Hwan Chŏng*, Soo-Won Joo*, Kwang-Woo Lee**

The optimum control theory has been applied to the problem of finding the most economic use of active and passive immunization controls. Application of Pontryagin's Minimum Principle to this case, involving functions of delayed control has been demonstrated and a procedure has been developed for the numerical solution of the resulting control problem.

Using the numerical procedure, optimum control strategies have been obtained for different values of reported case cost.

1. 서 론

세계도처 유행병이 넓게 퍼지는 것을 막기위한 보건구의 철야적인 노력은 많은 비용이 필요하게 되었으며, 이 비용을 줄이기 위한 유행병 관리 절차를 연구하기 시작하였다^{1~3)}.

최근에 와서 필자가 유행병의 유행상태를 현대 제어공학에서 이용되고 있는 상태공간법을 사용하여 선형 시스템 기법에 의한 결정론적 모델과 통계학 과정에서 마르코프 과정에 의한 이산시간 시스템 기법으로 모델을 제시하여 전자계산기로 해석함으로 정량적인 연구가 되고 있다^{4~6)}. 이 결정론적 관리의 유행병 수학적 모델이 위

에 제시한 보건기구의 비용절감 목적을 연구하는데 직접적으로 공헌된다.

그래서 본 연구에서는 유행병 관리의 결정론적 모델에 현대 제어공학에서 이용되고 있는 최적 제어이론의 적용에 대한 과정을 나타내고 있으며, 전자계산기로 구한 최적접종 연구는 만족스러웠다.

2. 문제의 정식화

2-1 최적연구에 적합한 모델

상태방정식으로 표시된 유행병 관리모델을^{4,5)} 중심으로 최적화 문제를 연구하기 위하여 모델을 적절히 고치면 식(2-1)~(2-4)같이 표시된다.

$$\dot{x}_1 = -\beta x_1(t) x_2(t) - u_1(t - \tau) x_1(t) - u_2(t) x_1(t) \dots \dots \dots (2-1)$$

$$\dot{x}_2 = \beta x_1(t) x_2(t) - \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} \sum_{n=0}^{2n} \left[\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mu - n\tau_0)^2\right\} \right] x_1(t - n\tau_0) x_2(t - \tau_0 - u_2(t) x_2(t) \dots \dots \dots (2-2)$$

< 접수 : 1988년 6월 15일 >
 * 동아대학교 전기공학과
 Dept. of Electrical Eng., Dong-A University
 ** 부산외국어대학 전산학과
 Dept. of Computer Eng., Busan College of Foreign Studies

$$\dot{x}_3 = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} \sum_{n=0}^{2\mu} \left[\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mu - n\tau_0)^2\right\} \right] x_1 (t - n\tau_0) x_2(t - n\tau_0) \dots\dots\dots (2-3)$$

$$\dot{x}_4 = Au_1(t) + Bu_2(t) + Cu_2(t) + Du_2^2(t) \quad (2-4)$$

여기서 x_1, x_2 및 x_3 는 감염가능자, 잠복기에 있는자 및 환자의 수로써, 전체인구를 표준화시킨 아-집단(sub-populations)을 나타낸다. x_4 는 단위법으로 나타낸 예방접종의 값이며, β 는 유효접촉율, u_1 와 u_2 는 능동과 수동면역 접종의 제어벡터, τ_0 는 날짜로 표시되는 지연을 말하고, τ_0 는 하루를 표시하는 단위이다. μ 와 σ 은 잠복기를 평균치와 표준편차를 나타낸다. 그리고 A와 C은 능동과 수동 예방 접종율에 대한 선형경비를 나타내고, B와 D는 그 비선형적인 2차 경비를 나타낸다.

2-2 목적함수

지금 환자의 치료 평균비용을 C_1 이라 하였을 적에 단 위집단에서 비용함수는 식(2-5)와 같이 쓸 수 있다.

$$J = C_1 x_3(t_f) + x_4(t_f) \dots\dots\dots (2-5)$$

여기서 J는 제어되는 유행병의 총 비용, $x_3(t_f)$ 는 환 자의 최종값, $x_4(t_f)$ 는 유행기간 동안 실시한 예방접종 의 전체비용이고 그리고 t_f 는 유행이 끝나는 시간이다.

최종시간에서 잠복기 잔류자 때문에 식(2-5)는 식 (2-6)과 같이 수정하여야 한다.

$$J = C_1 x_3(t_f) + C_1 x_2(t_f) + x_4(t_f) \dots\dots\dots (2-6)$$

유행병이 종료되었을때 비용 J가 최소화되는 제어방법이 최적수단이며, 이 제어수단은 pontryagin 최소원리의 적용에 의해 체계적으로 명확하게 말할 수 있다.

3. 최적화 절차

앞 2장 식들을 살펴보면 고정된 초기시간(fixed initial time)과 자유 종결시간(free terminal time)으로 이루어져 있는데, 자유 최종시간(free final time)로 인한 수 학적인 복잡성을 고정된 종결시간(fixed terminal time)으로 변화시켜 간단하게 할 수 있다.

이것은 상태방정식에서 penalty 함수를 사용함으로 이 룬다.

고정된 종결시간으로 최적제어 문제를 풀이할 적에 극 소 비용함수가 마이너스(negative)가 되는 상태값으로 얻어지는 경우가 있다. 마이너스 아-집단은 물리학적으 로 아무런 의미를 갖지 않으므로 이것은 아주 마음에 들

지 않는 것이다. 다른 말로 하면 상태는 항상 0(Zero) 보다 큰 값을 가져야 한다는 것이다. 이것은 penalty 함 수 식(3-1)을 넣어 주므로 해결할 수 있다⁷⁾.

$$\sum_{j=1}^3 p_j \delta(x_j) x_j^2 \dots\dots\dots (3-1)$$

여기서 p_j 는 상태에 따라 결정되는 양의 정수이며, δ 는 x_j 의 Heaviside 단위계단 함수이다. 실제문제에 있 어서 penalty 함수는 x_2 에서만 사용되고, 다른 상태에 있 어서는 불필요한 것이다.

그래서 상태방정식 식(2-1)~(2-4)는 식(3-2) ~ (3-5)와 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{x}_1 = -\beta x_1(t) x_2(t) - u_1(t - \tau) x_1(t) - u_2(t) x_1(t) \dots\dots\dots (3-2)$$

$$\dot{x}_2 = \beta x_1(t) x_2(t) - \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} \sum_{n=0}^{2\mu} \left[\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mu - n\tau_0)^2\right\} \right] x_1(t - n\tau_0) x_2(t - n\tau_0) - u_2(t) x_2(t) \dots\dots\dots (3-3)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} \sum_{n=0}^{2\mu} \left[\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mu - n\tau_0)^2\right\} \right] x_1(t - n\tau_0) \cdot x_2(t - n\tau_0) \dots\dots\dots (3-4)$$

$$\dot{x}_4 = p_2 \delta(x_2) \cdot x_2^2 + Au_1(t) + Bu_1^2(t) + Cu_2(t) + Du_2^2(t) \dots\dots\dots (3-5)$$

위의 상태방정식은 식(3-6)와 같이 벡터형식으로 표 시할 수 있다.

$$\dot{x} = f(x, x(t - \tau_0), x_2(t - 2\tau_0), \dots\dots x(t - n\tau_0), u, u(t - \tau_0)) \dots\dots\dots (3-6)$$

여기서 x 는 x_1, x_2, x_3 및 x_4 의 상태벡터이고, f 는 위 4가지 방정식의 하나로써 오른쪽에 각각 나타내는 함수 f_1, f_2, f_3 및 f_4 의 대응벡터이고, u 은 제어벡터이며 그리 고 n 은 2μ 와 같은 정수이다.

식(2-6)으로 부터 J는 t_f 에서 최종 상태값의 함수이 므로 식(3-7)와 같이 나타낼 수 있다.

$$J = \phi(x | t_f) \dots\dots\dots (3-7)$$

식(3-7)은 Budelis et al.⁸⁾와 Pontryagin et al.⁹⁾의해 규정된 것과 같이 지연시스템에 Pontryagin 최소 원리 적용에 대한 모든 조건을 가지고 있다. Hamilton 구배 에 대한 Budelis et al.⁸⁾ 결과를 다중 지연시스템으로 확대하므로 직접적으로 사용할 수 있다. 식(3-6)에서 지 연이 그의 가정과 너무 닮았기 때문에 이 확대는 McAulay¹⁰⁾이 얻은 결과를 기초로 성취할 수 있다.

그러므로 가정한 Co-State 벡터는 식(3-8)

$$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4] \dots\dots\dots (3-8)$$

이고, 위의 시스템에 대한 Hamilton H은 식(3-9)가 된다.

$$H = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 \dots\dots\dots (3-9)$$

Budelis⁸⁾와 McAulay⁹⁾의 결과로부터 시스템의 costate 방정식은 식(3-10)~(3-13)과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = & -\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ & - \lambda_4 \frac{\partial f_4}{\partial x_1} \dots\dots\dots (3-10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = & -\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \\ & - \lambda_4 \frac{\partial f_4}{\partial x_2} \dots\dots\dots (3-11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = & -\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \\ & - \lambda_4 \frac{\partial f_4}{\partial x_3} \dots\dots\dots (3-12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial H}{\partial x_4} = & -\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_4} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_4} - \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ & - \lambda_4 \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \dots\dots\dots (3-13) \end{aligned}$$

그리고 costate의 초기값은 식(3-14)

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \phi(x(t_f))}{\partial x} \dots\dots\dots (3-14)$$

와 같으며, 값은 식(3-15)~(3-18)과 같다.

$$\lambda_1(t_f) = 0 \dots\dots\dots (3-15)$$

$$\lambda_2(t_f) = C_1 \dots\dots\dots (3-16)$$

$$\lambda_3(t_f) = C_1 \dots\dots\dots (3-17)$$

$$\lambda_4(t_f) = 1 \dots\dots\dots (3-18)$$

그 위에 임의의 δu 에 대한 $dJ=0$ 되기 위한 필요한 조건은 $H(t)$ 은 연속적이어야 하고 그리고 식(3-19)이어야 한다.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \dots\dots\dots (3-19)$$

식(3-10)~(3-13) costate 방정식을 식(3-20)~(3-23)으로 다시 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 = & \lambda_1 [u_1(t - \tau_0) + u_2(t) + \beta x_2(t)] - \lambda_2 [\beta x_2(t) \\ & - RLMD - u_2(t)] - \lambda_3 [RLMD] \dots\dots (3-20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2 = & \lambda_1 [\beta x_1(t)] - \lambda_2 [\beta x_1(t) - BLMD] - \lambda_3 \cdot BLMD \\ & - 2\lambda_4 P_2 \delta(x_2) \cdot x_2(t) \dots\dots\dots (3-21) \end{aligned}$$

$$\dot{\lambda}_3 = 0 \dots\dots\dots (3-22)$$

$$\dot{\lambda}_4 = 0 \dots\dots\dots (3-23)$$

여기서 변수 $RLMD, BLMD$ 은 식(3-24)~(3-25)와

같이 확정한다.

$$RLMD = \sum_{n=0}^k wLp(n) \cdot x_2(t + n\tau_0) \dots\dots\dots (3-24)$$

$$BLMD = \sum_{n=0}^k wLP(n) \cdot x_1(t + n\tau_0) \dots\dots\dots (3-25)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots\dots\dots, 2\mu$$

그리고 $wLp(n)$ 은 식(3-26)와 같다.

$$wLp(n) = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\mu - n\tau_0)^2 \right\} \right] \dots\dots\dots (3-26)$$

여기서 변수 $RLMD, BLMD$ 은 costate 방정식의 역방향으로 합산하므로 시간마다 구하며 t_f 에서 $t_f - k\tau_0$ 까지의 $RLMD(t), BLMD(t)$ 값은 k 가 2μ 가 될때까지 그 사이의 상태 costate 및 제어변수 값에 의해서만 구해진 다.

Costate 방정식 식(3-20)~(3-23)은 상태방정식의 정방향에 대해서 역방향으로 풀이 되므로 costate 초기값 식(3-15)~(3-18)에 의해서 costate값은 수치해석을 통해서 쉽게 구한다.

4. 구배의 이론

식(3-7) 비용함수를 최소화시키기 위한 제어함수를 구하기 위해서는 Kelly⁷⁾의 마이너스 구배법이 성공적으로 사용되고 있다. Min-H 문제에 대한 유용한 수렴 방법이 Lasdon¹¹⁾에 의해 나타내고 있는 것에 반하여, 일정한 지연 시스템에 대한 빠른 경사법이 McAulay¹⁰⁾에 의해서 사용되고 있다.

제어 지연 함수를 갖는 Hamilton의 모든 조건을 만족하는 마이너스 구배는 다음과 같다.

지금 u_1 와 u_2 를 나타내는 H의 구배를 각각 g_1 와 g_2 라 하며, 두 제어에 대한 구배벡터 $g(u)$ 은 식(4-1)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} g(u) = & \frac{\partial H}{\partial u} \\ = & \left[\frac{\partial H}{\partial u_1} \quad \frac{\partial H}{\partial u_2} \right] \dots\dots\dots (4-1) \end{aligned}$$

이때 지연경우는 아니기 때문에, u_1 의 지연에 대해서 식(4-2)와 같이 된다.

$$g_1(u) = \frac{\partial H}{\partial u_1} + \frac{\partial H}{\partial u_1(t-\tau)} \Big|_{t_0 \leq t \leq t_f - \tau} \dots\dots\dots (4-2)$$

$$= \frac{\partial H}{\partial u_1} \dots\dots\dots (4-3)$$

$t_f - \tau < t \leq t_f$

그리고

$$g_2(u) = \frac{\partial H}{\partial u_2} \dots\dots\dots (4-4)$$

이다. 여기서 시간함수로 아래 식(4-5)~(4-7)가 구해진다.

$$g_1(u_1) = [A + 2Bu_1(t)]\lambda_4 - \lambda_1(t + \tau) \cdot x(t + \tau) \dots\dots\dots (4-5)$$

$t_0 \leq t \leq t_f - \tau$

$$= [A + 2Bu_1(t)]\lambda_4 \dots\dots\dots (4-6)$$

$t_f - \tau < t \leq t_f$

$$g_2(u_2) = [C + 2Du_2(t)]\lambda_4 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 \dots\dots\dots (4-7)$$

식(4-5)~(4-7)의로 계산된 $g(u)$ 은 시간함수인 u 에 의한 시간이 암시적인 함수이다. McAulay¹⁰⁾와 Lasdon¹¹⁾이 제시한 이론을 기초로 해서 우리들 문제의 마이너스 구배 적용에 대한 아래와 같은 과정을 제시한다.

$u=0$ 로 가정하고 이미 알고 있는 초기값으로 상태방정식 식(3-2)~(3-5)을 t_0 로부터 $x=0$ 로 되는 t_f 까지 완성시킨다. 비용 J 을 이미 구해진 마지막 상태값 즉 제어기가 없을 적에 유행의 비용을 구한다. 우리의 목적은 적당한 제어 적용에 의해 비용을 적게 되겠끔 줄이는 것인데 이 최적제어는 다음과 같은 반복절차에 의해서 구한다.

a) 식(3-15)~(3-18)의 costate의 마지막 값으로 costate 방정식 식(3-20)~(3-23)을 t_f 에서 t_0 까지 역방향으로 풀이하는데 이것은 $g(u)$ 의 값을 구하는데 필요한 값들이다. 만약 i 번째 간격에서 제어벡터가 u^i 로 표시되며 이에 대응하는 구배가 $g(u^i)$ 라면 우리는 식(4-8)과 같이 한다.

$$S^i = -g(u^i) \dots\dots\dots (4-8)$$

여기서 S^i 은 i 번째 마이너스 구배를 나타내고 있다.

b) 비용 $J(u^i + \alpha^i S^i)$ 을 최소로 하는 $\alpha = \alpha^i$ 을 구한다. 그래서 제어벡터는 식(4-9)과 같게 된다.

$$u^{i+1} = u^i + \alpha^i S^i \dots\dots\dots (4-9)$$

c) 식(4-9)에서 얻어진 새로운 제어벡터를 사용하여 상태방정식을 풀고 새로운 비용 J 을 계산한다. 만약 J 의 새로운 이 값이 최소인 것이 판단되며 여기서 멈춘다. 다시 말하면 다음 단계로 진행된다. 이 과정은 비용함수 J 가 최소값으로 수렴할 때까지 반복한다.

d) 식(4-8)까지 u^i 은 u_1 와 u_2 의 두개의 성분을 가지

므로 이에 대응하는 s^i 도 s_1 와 s_2 의 두개의 성분을 가졌다. 그래서 우리는 지금 u_1 로써만 (a) 단계에서 새로운 costate와 구배를 구하고 (b) 단계를 거쳐 (c) 단계로만 계산하지 않고 u_2 단계에서도 수렴과정을 계산한다.

5. 최적화의 결과 및 고찰

5-1 시뮬레이터의 구성

앞의 이론에 따라 제어벡터 u 를 구하기 위해서 여러 변수(parameters)를 아래와 같이 한다.

초기 감염 가능자($x_2(t_0)$)	= 0.5
초기 감염자($x_2(t_0)$)	= 0.0001
초기 환자($x_3(t_0)$)	= 0.
유효 접촉율(β)	= 2.7
평균 잠복기간	= 3.0
잠복기 표준편차	= 1.4
능동면역의 단위비용(A)	= 0.4(원)
능동면역의 자승비용(B)	= 40(원)
수동면역의 단위비용(C)	= 1.0(원)
수동면역의 자승비용(D)	= 100(원)
penalty 함수(p_2)	= 10^6

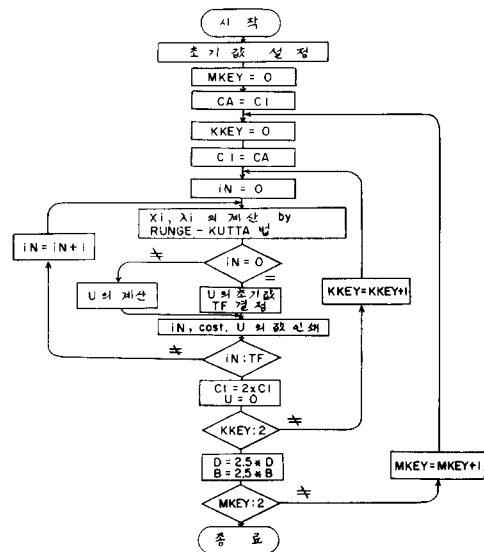


Fig. 1 Flow-chart for the solution of the optimum control problem

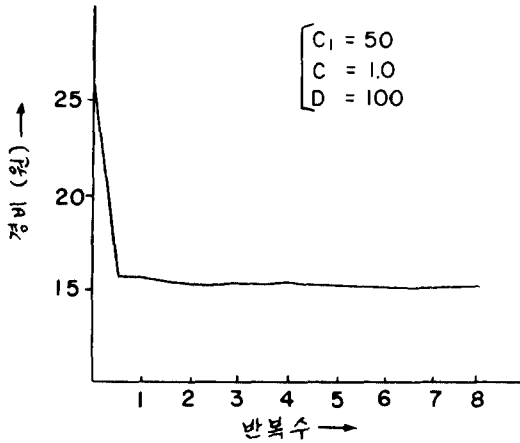


Fig. 2 Convergence of the cost to optimum value in passive control

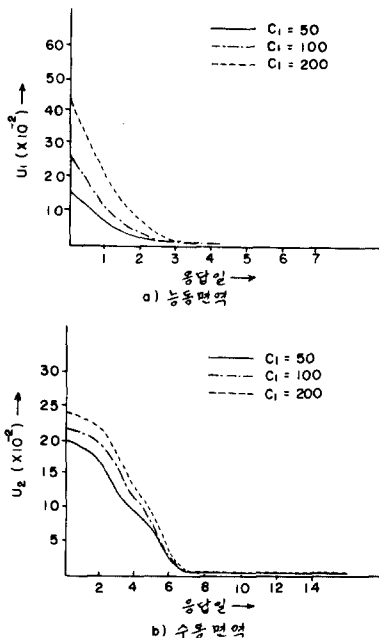


Fig. 3 Optimum control plotted against time

환자비용 = 50(원)
= 100(원)
= 200(원)

이 변수들은 어느 특정한 질병을 나타내는 것이 아니고 오직 앞의 과정을 유용하게 표현할 수 있도록 가정한 값들이다. 그리고 능동면역의 지연 날짜는 7일로 하였고, 예방접종 시기는 발병 즉시 실시한다. 컴퓨터 미분방정식 해법은 가장 정확도가 높은 Runge-Kutta 방법으로 풀이하였고 컴퓨터 흐름도는 Fig. 1과 같다.

5-2 결과 고찰

어느 경우이든 유행 최종 시간은 45일 임을 알았다. 그래서 t_f 은 45일이다. Fig. 2는 최적비용에 접근하는 최적 수렴 과정을 보였으며 우리가 생각할 수 있는 모든 경우 관계 결과를 Table 1에서 요약했다.

이상으로 앞의 최적화 과정 이론이 정확함을 입증하였고, 능동면역에서는 4.86~14.34% 그리고 수동면역에서는 38.86~78.16% 경비절감이 있음을 알 수 있다. 환자 한 사람에 대한 치료비용이 두배가 될수록 능동면역에서는 평균 4.74%, 수동면역에서는 11.86% 경비절감 효과가 있다.

능동과 수동면역 과정에서 결정된 제어벡터 u_1, u_2 은 Fig. 3에서 표시하고 있다.

6. 결 론

유행병 관리의 수학적 모델에 현대 제어공학에서 이용되고 있는 Pontryagin 최소 원리를 사용하여 최적원리를 적용하여 본 논문에서 다음과 같은 중요한 결과를 얻었다.

- 1) 유행병에 있어서 유용한 최적제어 과정을 확립하였다.
 - 2) 목적 비용함수는 급속하게 최소값으로 접근하고 있다.
 - 3) 환자 한 사람에 대한 치료 비용이 높을수록 유행기간 동안 전체 비용을 더욱 많이 절감할 수 있었다.
- 본 논문의 연구는 고무적인 결과를 주고 있으며, 앞으로 변수와 목적함수에 대한 연구가 더욱 있어야 할 것 같다.

감사의 글 : 본 연구는 한국과학재단 연구비 지원에 의하여 이루어진바 이에 대하여 심심한 감사를 드린다.

Table 1 Cost constants

면역종류	환자 비용	제어 없을 경우비용(환)	최적비용 (환)	제어하지 않을 경우에 대한 최적비율(%)	최적으로 인한 경비절감(%)
능동면역	50	24.740	23.537	95.14	4.86
	100	49.482	45.160	91.26	8.74
	200	98.965	84.772	85.66	14.34
수동면역	50	24.740	15.195	61.14	38.86
	100	49.482	18.466	37.37	62.68
	200	98.965	21.811	21.84	78.16

참 고 문 헌

- 1) C.S. Revelle, *The Economic Allocation of Tuberculosis control Activities in Developing Nations*, Ph. D. Thesis, Cornell University, 1967.
- 2) H.M. Taylor, *Some Models in Epidemic Control*, *Mathematical Biosciences*, Vol. 3, pp. 383-98, 1968.
- 3) D.L. Jaguette, *Mathematical Models for the Optimum Control of Epidemics and pest populations*, Ph. D. Thesis, Cornell, University, 1969.
- 4) 정형환, 이상효, 상태공간법에 의한 인플루엔자 유행 모델의 해석, 전기학회지, Vol. 26, No. 2, pp. 66-71, 1977.
- 5) 정형환, 박상희, 인플루엔자 유행관리의 수학적 모델화, 전기학회지, Vol. 30, No. 3, pp. 37-41, 1981.
- 6) 정형환, 김관수, 인플루엔자 유행의 마르코프 모델 해석, 전기학회지, Vol. 33, No. 11, pp. 16-22, 1984.
- 7) H.J. Kelly, *Methods of gradient*, pp. 215, New York, Academic Press, 1962.
- 8) J.J. Budelis and A.E. Bryson, *Some optimal control results for differential difference systems*, *IEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-15, pp. 237-41, 1970.
- 9) L.S. Pontryagin, et al, *The mathematical theory of optimal processes*, New York, John Wiley, 1962.
- 10) R.J. McAulay, *A Gradient method for systems with the time delay and its application to waveform design*, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-14, pp. 230-37, 1969.
- 11) L.S. Lasdon, S.K. Mitter and A.D. Waren, *The conjugate gradient method for optimum control problems*, *IEEE Trans. Automatic Control*. Vol. AC-12, pp. 132-38, 1967.