

<論 文>

# 지진 하중을 받고 있는 회전축-베어링 시스템의 동적 거동에 관한 연구

김 기 봉\* · 김 양 한\*\*

(1988년 4월 14일 접수)

## Dynamic Response of Rotor-Bearing Systems Under Seismic Excitations

K. B. Kim and Y. H. Kim

**Key Words** : Inhomogeneous and Parametric Excitation(非齊次 및 파라미터릭 勵起), Lagrangian Equation(Lagrangian 공식), Monte Carlo Simulation(Monte Carlo 시뮬레이션), Seismic Excitation(地震勵起)

### Abstract

The dynamic response of rotor-bearing systems subjected to six-component nonstationary earthquake ground accelerations is analyzed. The governing equations of motion for the rotor are derived using Lagrangian approach. The six-component earthquake inputs result in both inhomogeneous and parametric excitations, so that the conventional spectral analysis of random vibration is not applicable. The method of Monte Carlo simulation is utilized to simulate the six-component nonstationary earthquake ground motions and to determine the response statistics of rotor-bearing systems. The significant influences due to rotational motions of seismic base on the overall structural response is demonstrated by a numerical example.

### 1. 서 론

회전기기는 일반적으로 고속으로 회전하는 회전축(rotor)과 이 회전축을 지지하는 베어링으로 구성되어 있으며, 이러한 회전축-베어링 시스템의 지진에 의한 운동방정식은 자이로스코픽(gyroscopic) 효과, Coriolis효과 및 회전축과 베어링간의 상호작용을 부가적으로 포함하게 되어 동력학적 해석이 대단히 어려워진다. 또한 지진하중은 통계학적 특성 때문에 非正常불규칙과정(nonstationary random process)으로 취급해야 하므로 운동방정식의 난해도는 더욱 증가한다<sup>(1,2)</sup>.

본 논문에서는 해석상의 난해도를 줄이기 위해 회전축을 강축(rigid shaft)과 하나의 원판(disk)으로 구성된 것으로 이상화하고, 회전축을 두 개의 베어링에 의해 지지되며, 이 두 개의 베어링은 강체 위에 놓여 있다고 생각한다(Fig. 1). 또한 지진에 의한 여섯 성분의 지반가속도를 고려한 회전축-베어링 시스템의 운동방정식은 편의상 Lagrangian 공식을 이용하여 유도한다. 이때 여섯 성분의 지반가속도란 서로 직각인 세 방향의 병진가속도와 각 방향에 대한 회전가속도를 말한다. 이러한 지반가속도를 고려한 회전축-베어링 시스템에 대한 운동방정식은 파라미터릭 및 非齊次勵起(parametric excitations and inhomogeneous excitations)를 포함하게 되어 지금까지 이런 운동방정식에 대한 해석적 방법(analytical method)은 개발되지 못한 형

\*중앙대학교 공과대학 토목공학과

\*\*정회원, 한국과학기술대학 기계·재료 공학과

편이다<sup>(3,4)</sup>.

본 논문에서는 Monte Carlo 샘플레이션 기법을 이용하여 지반가속도의 스펙트럼 밀도함수(power spectral densities)로부터 여섯 성분의 지반가속도 시간이력곡선을 얻고, 이들을 입력 데이터로 하여 운동방정식에 Newmark의 직접적분법을 이용하여 회전축-베어링 시스템의 응답상태벡터(response state vector)를 얻기로 한다. 충분히 많은 수의 지반가속도 시간이력곡선을 시뮬레이션하고, 각 경우에 대응하는 응답상태벡터들을 얻은 다음 일반적인 통계학 방법을 적용하여 평균함수, 표준편차 및 r.m.s(root mean square) 등을 얻는다.

위의 수치해석적 방법으로 얻은 결과로부터 지반의 회전거동이 회전축-베어링 시스템 동적 거동에 미치는 영향을 해석예제를 통해 제시한다.

## 2. 운동방정식의 유도

Fig. 1과 같이 각 속도  $\omega_0$ 로 회전하는 회전축-베어링 시스템을 고려하자. 이 그림에서 (XYZ)는 회전축의 질량중심 G를 원점으로 하는 공간에 고정된 직각 좌표계이며, (xyz)는 회전축의 축방향을 z축으로 하고 질량중심 G를 원점으로 하며 축과 함께 회전하는 직각좌표계이다.  $(x_b, y_b, z_b)$ 는 베어링이 놓여있는 강체상의 한점 b를 원점으로 하는 직각좌표계이며, 점 b는 편의상 정력학적 평형 상태일 때 질량중심 G가  $y_b$ 축상에 있도록 선택한다. 회전축의 (xyz)좌표계의 각 축방향에 대한 회전각은 일반적으로 각각 章動(nutational), 歲差(precession) 및 스핀(spinning) 거동이라 하는데 이를  $\theta$ ,  $\phi$ 를  $\psi$ 로 표기하기로 한다.

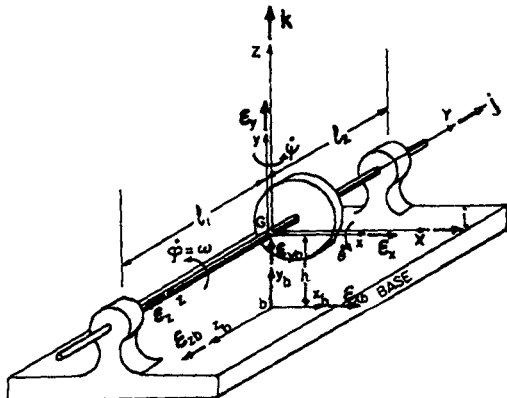


Fig. 1 Rotor and base reference axes

지진에 의한 지반의 변위를  $(X_b, Y_b, Z_b)$ 라 하고, 지반의 회전각을  $(\theta_{xb}, \theta_{yb}, \theta_{zb})$ 라 나타내고, 이런 여섯 성분의 지반거동에 의한 질량중심 G에서 회전축의  $(x_b, y_b, z_b)$ 좌표계에 대한 변위 및 회전각을 각각  $x_G, y_G, z_G, \theta_x, \theta_y$  및  $\theta_z$ 로 표기하기로 하자. 여기서 특기할 것은 회전축은  $z_b$ -축에 대해 각 속도  $\omega_0$ 로 회전하기 때문에  $\theta_z$ 를 측정하는 것은 무의미하다. 따라서  $x_G, y_G, z_G, \theta_x$  및  $\theta_y$ 를 운동방정식의 독립 미지변수로 택하기로 한다.

지반거동을 받는 회전축에 대한 운동 에너지(kinetic energy) T는 다음과 같다<sup>(5)</sup>.

$$T = \frac{1}{2} I_0 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} m \{ (\dot{x}_G + \dot{X}_b + \dot{\theta}_{yb} z_G - \dot{\theta}_{zb} y_G - \dot{\theta}_{xb} h)^2 + (\dot{y}_G + \dot{Y}_b + \dot{\theta}_{xb} x_G - \dot{\theta}_{xb} z_G)^2 + (\dot{z}_G + \dot{Z}_b + \dot{\theta}_{xb} y_G + \dot{\theta}_{xb} h - \dot{\theta}_{yb} x_G)^2 \} \quad (1)$$

여기서  $I_0$ 는 회전축의 x- 또는 y-축에 대한 단면 2차 모멘트, I는 회전축의 z-축에 대한 단면 2차 모멘트, m은 회전축의 질량, h는 지반과 질량중심 G의 수직거리이다. 위에서 언급한  $\theta, \psi$  및  $\phi$ 를 지반의 거동과 회전축의 회전 각속도  $\omega_0$ 로 나타내면

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{2} + \theta_{xb} + \theta_x \\ \psi &= \theta_{yb} + \theta_y \\ \phi &= \omega_0 \end{aligned} \quad (2)$$

이므로 식 (1)로부터 운동 에너지 T는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} I_0 (\dot{\theta}_{xb}^2 + 2\dot{\theta}_{xb}\dot{\theta}_x + \dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_{yb}^2 + 2\dot{\theta}_{yb}\dot{\theta}_y + \dot{\theta}_y^2) - I\omega_0 (\dot{\theta}_{yb}\theta_{xb} + \dot{\theta}_{yb}\theta_x + \dot{\theta}_y\theta_{xb} + \dot{\theta}_y\theta_x) + \frac{1}{2} I\omega_0^2 + \frac{1}{2} m \{ (\dot{x}_G + \dot{X}_b + \dot{\theta}_{yb} z_G - \dot{\theta}_{zb} y_G - \dot{\theta}_{xb} h)^2 + (\dot{y}_G + \dot{Y}_b + \dot{\theta}_{xb} x_G - \dot{\theta}_{xb} z_G)^2 + (\dot{z}_G + \dot{Z}_b + \dot{\theta}_{xb} y_G + \dot{\theta}_{xb} h - \dot{\theta}_{yb} x_G)^2 \} \quad (3)$$

Fig. 1에서 보는 바와 같이 고속으로 회전하는 회전축은 2개의 베어링에 의해 지지되어 있는데, 이때 회전축과 베어링의 표면에서 일어나는 마찰 파손을 방지하기 위해 이들 사이에 윤활유막을 설치한다. 이 윤활유막의 동역학적 특성은 회전축과 베어링 사이의 상호작용에 있어서 Fig. 2와 같은 강성계수와 감쇠계수로서 표현할 수 있다<sup>(6,7)</sup>. i번 베어링 (i=1, 2)내의 윤활유막이 갖는 강성계수와

감쇠계수를 각각

$$\begin{bmatrix} K_{xxi} & K_{xyi} & 0 \\ K_{yxi} & K_{yyi} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zzi} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_{xxi} & C_{xyi} & 0 \\ C_{yxi} & C_{yyi} & 0 \\ 0 & 0 & C_{zzi} \end{bmatrix}$$

로 표기하자. 회전축의  $i$ 번 베어링에 대한  $x_b$ ,  $y_b$  그리고  $Z_b$ -축 방향의 상대변위를  $x_i$ ,  $y_i$  및  $z_i$  라 하면 Fig. 3에서 보는 바와 같이

$$\begin{aligned} x_1 &= x_G + \theta_y l_1; & y_1 &= y_G - \theta_x l_1; & z_1 &= z_G \\ x_2 &= x_G - \theta_y l_2; & y_2 &= y_G + \theta_x l_2; & z_2 &= z_G \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $l_i$ 는  $i$ 번 베어링과 회전축의 질량중심  $G$  사이의 거리이다. 이때 회전축이 가지는 위치에너지  $V$ 와, 회전축과 베어링 사이에 작용하는 비보존력에 의한 가상일  $\delta W_{nc}$  (virtual work done by nonconservative forces)는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \{ K_{xx1} x_1^2 + K_{xy1} x_1 y_1 + K_{yy1} x_1 y_1 + K_{yy1} y_1^2 \\ &+ K_{xx2} x_2^2 + K_{xy2} x_2 y_2 + K_{yy2} x_2 y_2 + K_{yy2} y_2^2 \end{aligned}$$

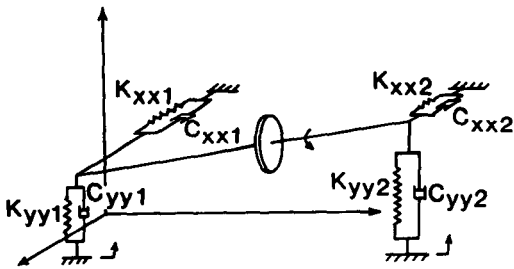


Fig. 2 Fluid-film bearing model

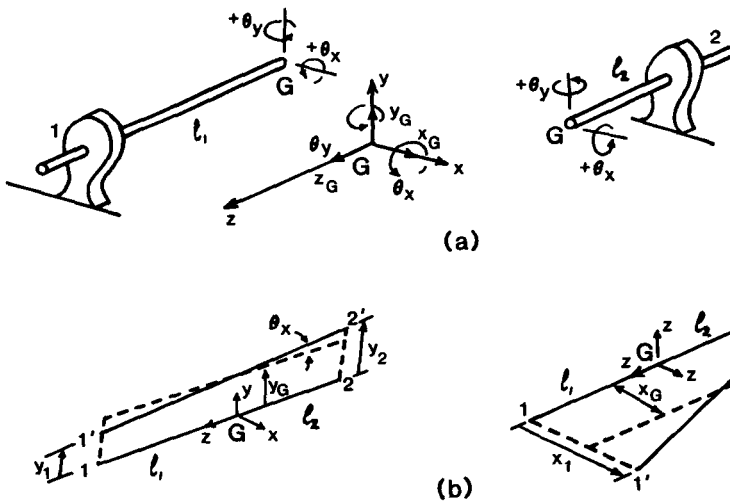


Fig. 3 Mass center displacements, rotor rotations, and rotor-bearing relative displacements. (a) Mass center displacements and rotor rotations. (b) Rotor-bearing relative displacements in either bearing.

$$+ K_{zzi} z_i^2 + K_{zz2} z_2^2 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{nc} &= -(C_{xx1} \dot{x}_1 + C_{xy1} \dot{y}_1) \delta x_1 - (C_{xx2} \dot{x}_2 \\ &+ C_{xy2} \dot{y}_2) \delta x_2 - (C_{yxi} \dot{x}_1 + C_{yy1} \dot{y}_1) \delta y_1 \\ &- (C_{yx2} \dot{x}_2 + C_{yy2} \dot{y}_2) \delta y_2 \\ &- (C_{zzi} \dot{z}_1) \delta z_1 - (C_{zz2} \dot{z}_2) \delta z_2 \end{aligned} \quad (6)$$

다음으로 회전축-베어링 시스템의 지반거동에 대한 운동방정식을 유도하기 위해 부록 I에서 주어진 Lagrange의 운동방정식을 적용하여 독립변수  $x_G$ ,  $y_G$ ,  $z_G$ ,  $\theta_x$  및  $\theta_y$ 로 이루어지는 상태벡터 (state vector)에 대한 행렬형태로 정리하면 식 (7)과 같은 운동방정식을 얻는다.

$$[M]\{\dot{X}\} + [c]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \quad (7)$$

여기서

$$\{X\} = [x_G y_G z_G \theta_x \theta_y]^T \quad (8)$$

$[M]$ 은 질량행렬이며

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_o \end{bmatrix} \quad (9)$$

감쇠행렬  $[C]$ 와 강성행렬  $[K]$  및 힘 벡터  $\{F\}$ 는 다음과 같이 나눌 수 있다.

$$\begin{aligned} [c] &= [c_1] + [c_2] + [c_3] \\ [K] &= [K_1] + [K_2] \\ \{F\} &= \{F_1\} + \{F_2\} + \{F_3\} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $[C_i]$ 과  $[K_i]$ 은 회전축을 지지하는 베어링내

의 유효유막이 갖는 감쇠계수와 강성계수로 이루어지는 행렬들이며,  $[C_2]$ 는 회전축의 회전 각속도  $\omega_0$ 의 영향에 의한 행렬이며  $[C_3]$  및  $[K_2]$ 는 지반의 회전거동을 포함하는 요소들로 이루어지는 행렬들

이다. 그리고 힘 벡터  $\{F_1\}$  및  $\{F_2\}$ 는 각각 지반의 병진거동 및 회전거동에 의한 벡터들이며,  $\{F_3\}$ 는 여섯 성분의 지반거동의 영향을 모두 포함하는 벡터이다. 이들 행렬들과 벡터들은 다음과 같다.

$$[C_1] = \begin{bmatrix} C_{xx1} + C_{xx2} & C_{xy1} + C_{xy2} & 0 & -l_1 C_{xy1} + l_2 C_{xy2} & l_1 C_{xx1} - l_2 C_{xx2} \\ C_{yx1} + C_{yx2} & C_{yy1} + C_{yy2} & 0 & -l_1 C_{yy1} + l_2 C_{yy2} & l_1 C_{yx1} - l_2 C_{yx2} \\ 0 & 0 & C_{zz1} + C_{zz2} & 0 & 0 \\ -l_1 C_{yx1} + l_2 C_{yx2} & -l_1 C_{yy1} + l_2 C_{yy2} & 0 & l_1^2 C_{yy1} + l_2^2 C_{yy2} & -l_1^2 C_{yx1} - l_2^2 C_{yx2} \\ l_1 C_{xx1} - l_2 C_{xx2} & l_1 C_{xy1} - l_2 C_{xy2} & 0 & -l_1^2 C_{xy1} - l_2^2 C_{xy2} & l_1^2 C_{xx1} + l_2^2 C_{xx2} \end{bmatrix}$$

$$[C_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & -I\omega_0 & 0 \end{bmatrix} \quad [C_3] = \begin{bmatrix} 0 & -2m\dot{\theta}_{zb} & 2m\dot{\theta}_{yb} & 0 & 0 \\ -2m\dot{\theta}_{zb} & 0 & -2m\dot{\theta}_{xb} & 0 & 0 \\ -2m\dot{\theta}_{yb} & 2m\dot{\theta}_{xb} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_1] = \begin{bmatrix} (K_{xx1} + K_{xx2}) & \frac{1}{2}(K_{xy1} + K_{yx1}) & 0 & -\frac{1}{2}l_1(K_{xy1} + K_{yx1}) & K_{xx1}l_1 \\ & +\frac{1}{2}(K_{xy2} + K_{yx2}) & 0 & +\frac{1}{2}l_2(K_{xy2} + K_{yx2}) & -K_{xx2}l_2 \\ \frac{1}{2}(K_{xy1} + K_{yx1}) & (K_{yy1} + K_{yy2}) & 0 & (-K_{yy1}l_1 + K_{yy2}l_2) & \frac{l_1}{2}(K_{xy1} + K_{yx1}) \\ +\frac{1}{2}(K_{xy2} + K_{yx2}) & 0 & (K_{zz1} + K_{zz2}) & 0 & -\frac{l_2}{2}(K_{xy2} + K_{yx2}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{l_1}{2}(K_{xy1} + K_{yx1}) & (-K_{yy1}l_1 + K_{yy2}l_2) & 0 & (K_{yy1}l_1^2 + K_{yy2}l_2^2) & -\frac{l_1^2}{2}(K_{xy1} + K_{yx1}) \\ +\frac{l_2}{2}(K_{xy2} + K_{yx2}) & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_2^2}{2}(K_{xy2} + K_{yx2}) \\ (K_{xx1}l_1 - K_{xx2}l_2) & \frac{1}{2}l_1(K_{xy1} + K_{yx1}) & 0 & -\frac{1}{2}l_1^2(K_{xy1} + K_{yx1}) & l_1^2 K_{xx2} \\ & -\frac{1}{2}l_2(K_{xy2} + K_{yx2}) & 0 & -\frac{1}{2}l_2^2(K_{xy2} + K_{yx2}) & +l_2^2 K_{xx1} \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} -m(\dot{\theta}_{yb}^2 + \dot{\theta}_{zb}^2) & m(\dot{\theta}_{xb}\dot{\theta}_{yb} - \dot{\theta}_{zb}) & m(\dot{\theta}_{zb}\dot{\theta}_{xb} + \dot{\theta}_{yb}) & 0 & 0 \\ m(\dot{\theta}_{xb}\dot{\theta}_{yb} + \dot{\theta}_{zb}) & -m(\dot{\theta}_{zb}^2 + \dot{\theta}_{xb}^2) & m(\dot{\theta}_{yb}\dot{\theta}_{zb} - \dot{\theta}_{xb}) & 0 & 0 \\ m(\dot{\theta}_{zb}\dot{\theta}_{xb} - \dot{\theta}_{yb}) & m(\dot{\theta}_{yb}\dot{\theta}_{zb} + \dot{\theta}_{xb}) & -m(\dot{\theta}_{xb}^2 + \dot{\theta}_{zb}^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{F_1\} = [-m\ddot{X}_b, -m\ddot{Y}_b, -m\ddot{Z}_b, 0, 0]^T$$

$$\{F_2\} = [-mh(\dot{\theta}_{xb}\dot{\theta}_{yb} - \dot{\theta}_{zb}), mh(\dot{\theta}_{zb}^2 + \dot{\theta}_{xb}^2), -mh(\dot{\theta}_{yb}\dot{\theta}_{zb} + \dot{\theta}_{xb}), -I_0\ddot{\theta}_{xb} - I\omega_0\dot{\theta}_{yb}, -I_0\ddot{\theta}_{yb} + I\omega_0\dot{\theta}_{xb}]^T$$

$$\{F_3\} = [m\dot{\theta}_{zb}\dot{Y}_b - m\dot{\theta}_{yb}\dot{Z}_b, m\dot{\theta}_{xb}\dot{Z}_b - m\dot{\theta}_{zb}\dot{X}_b, m\dot{\theta}_{yb}\dot{X}_b - m\dot{\theta}_{xy}\dot{Y}_b, 0, 0]^T$$

### 3. 지진력에 의한 지반거동

지진에 의한 지반의 병진 가속도  $\ddot{X}_b$ ,  $\ddot{Y}_b$  및  $\ddot{Z}_b$

는 평균함수가 零인 定常불규칙과정(stationary random processes)  $\dot{X}_o(t)$ ,  $\dot{Y}_o(t)$  및  $\dot{Z}_o(t)$  봉함함수(envelope function)  $\Lambda(t)$ 를 각각 곱해서 얻을 수 있다<sup>(8)</sup>.

$$\begin{aligned} \ddot{X}_b(t) &= \Lambda(t)\dot{X}_o(t) \\ \ddot{Y}_b(t) &= \Lambda(t)\dot{Y}_o(t) \\ \ddot{Z}_b(t) &= \Lambda(t)\dot{Z}_o(t) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 봉함함수  $\Lambda(t)$ 는 다음과 같다.

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ (t/t_1)^2, & 0 \leq t \leq t_1 \\ 1, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ e^{-c(t-t_2)}, & t_2 < t \end{cases} \quad (12)$$

위에서  $t_1$ ,  $t_2$  및  $c$ 는 지진의 형태와 작용시간에

따라 결정되는 매개변수들이다.

定常불규칙과정 (Stationary random process)  $\dot{X}(t)$ 는 다음과 같은 형태의 스펙트럼 밀도함수 (power spectral density)로 정의된다<sup>(8)</sup>.

$$\Phi_{x_o x_o}(\omega) = \frac{\left[1 + 4\zeta_x^2 \left(\frac{\omega}{\omega_x}\right)^2\right] S_x^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_x}\right)^2\right]^2 + 4\zeta_x^2 \left(\frac{\omega}{\omega_x}\right)^2} \quad (13)$$

여기서  $\omega_x$ ,  $\zeta_x$  및  $S_x^2$ 은 각각  $x_b$ -축 방향으로 작용하는 지반 가속도의 주 진동수, 등가 감쇠비 및 강도 (intensity)이다. 마찬가지로  $\dot{Y}_o(t)$ 와  $\dot{Z}_o(t)$ 도 식 (13)과 같은 형태의 스펙트럼 밀도함수 (power spectral density)로 정의된다.

지진이 전파되는 전단파속도 (shear wave velocity)를  $\bar{c}$ 라 하면, 지반의 회전가속도는 병진가속도와 다음의 관계가 있다<sup>(4)</sup>.

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_{xb}(t) \\ \ddot{\theta}_{yb}(t) \\ \ddot{\theta}_{zb}(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\bar{c}} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X}_b(t) \\ \dot{Y}_b(t) \\ \dot{Z}_b(t) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

#### 4. Monte Carlo 시뮬레이션 기법

앞에서 유도한 운동방정식 (7)은 파라미터릭 및 非齊次勵起 (parametric and inhomogeneous excitations)를 포함하고 있는데, 이는 좌변의 강성행렬  $[K]$ 와 감쇠행렬  $[C]$ 가 지반의 회전거동함수를 포함하고 그리고 우변의 힘 벡터  $\{F\}$ 가 회전거동 및 병진거동함수를 포함하고 있음을 뜻한다. 이러한 운동방정식의 해법에는 불규칙진동 (random vibration) 분야에서 널리 사용되는 스펙트랄 해법을 적용할 수가 없다.

본 논문에서는 다음과 같은 Monte Carlo 시뮬레이션 기법을 사용하여 지반거동에 대한 회전축-베어링 시스템의 응답벡터 (response vector)를 구하려 한다.

- (1) 세 성분의 지반 병진 가속도 시간이력함수 (time history sample functions)를 부록 II와 같이 각각의 스펙트럼 밀도함수 (power spectral density) 및, 봉함함수를 사용하여 시뮬레이션한다<sup>(9)</sup>.
- (2) 세 성분의 지반회전가속도 시간이력함수를 식 (14)로부터 시뮬레이션한다.
- (3) 1단계와 2단계에서 얻은 여섯 성분의 지반가속도 시간이력함수를 입력데이터로 하여, 응답벡터의 시간이력함수를 운동방정식 (7)에 Newmark의

직접 적분법을 적요하여 얻는다.

(4) 위의 1, 2, 3 단계를 계속 반복하여 충분한 수의 응답벡터의 시간이력함수들을 얻은 다음, 통상적인 통계학 방법으로 응답벡터의 평균함수 (mean function), 표준편차, r.m.s. (root mean square) 등을 시간의 함수로 나타낼 수 있다.

위에서 언급한 파라미터릭勵起 (parametric excitations)는 지반의 회전거동에 기인하는데, 만약 지반의 회전거동을 무시한다면 운동방정식 (7)은 더 이상 파라미터릭勵起 (parametric excitations)를 포함하지 않으므로 이 경우에는 스펙트랄 해법을 적용할 수가 있다. 회전거동을 무시한 경우 Monte Carlo 새물레이션 기법을 이용하여 1, 2, 3 단계의 반복 회수를 각각 변화시키면서 얻은 응답벡터의 통계치들과 스펙트랄 해법으로 얻은 응답벡터의 통계치를 서로 비교함으로써 높은 정확도 (accuracy)를 보장하는 1, 2, 3 단계의 적절한 반복 회수를 결정할 수 있다.

또한 회전거동을 고려한 경우와 무시한 경우의 각각의 응답벡터의 통계치를 비교함으로써 지반의 회전거동의 중요성을 알아 볼 수 있다.

일단 미지 독립 변수  $x_G, y_G, z_G, \theta_x$  그리고  $\theta_y$ 의 통계치가 얻어지면 회전축과  $i$ 번 베어링 ( $i=1, 2$ ) 사이의 상대변위는 식 (4)에 의해 결정되며, 또한 회전축과  $i$ 번 베어링 사이에 작용하는 힘은 다음 식으로부터 얻는다.

$$\begin{aligned} F_{xi} &= -(K_{xxi} + K_{xyi} + C_{xxi}\dot{x}_i + C_{xyi}\dot{y}_i) \\ F_{yi} &= -(K_{yxi}x_i + K_{yyi} + C_{yxi}\dot{x}_i + C_{yyi}\dot{y}_i) \\ F_{zi} &= -(k_{zzi}z_i + C_{zzi}\dot{z}_i) \end{aligned} \quad (15)$$

#### 5. 해석예제

Fig. 1과 같은 회전축-베어링 시스템에 대해 Table 1과 2로 주어지는 데이터를 해석예제에서 사용한다.

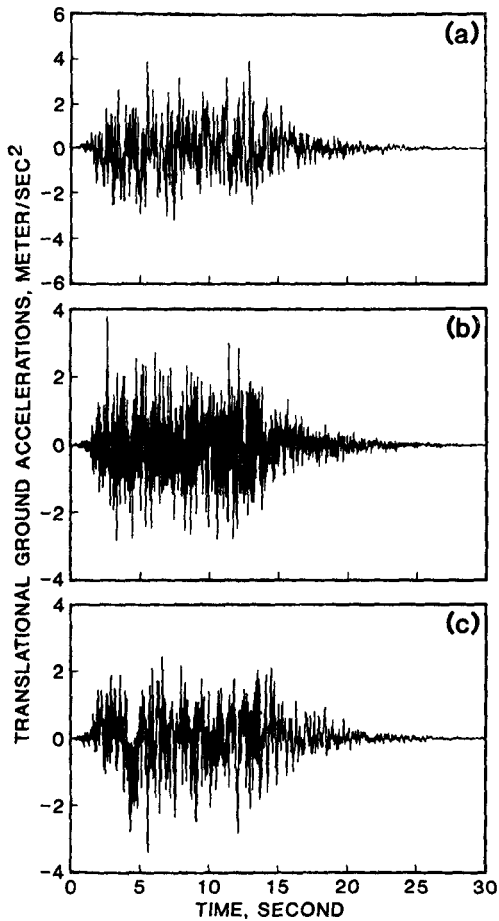
시뮬레이션기법으로 얻은 지반 병진가속도 및 회전가속도에 대한 시간이력곡선이 Fig. 4와 5로 주어진다. 이들은 El Centro 지진에<sup>(10)</sup> 의한 지반거동을 시뮬레이션 기법으로 얻은 것이다. Fig. 4와 5로 주어진 지반거동에 의한 회전축의 질량중심 응답치  $x_G, y_G, z_G, \theta_x$  및  $\theta_y$ 는 앞 절의 Monte Carlo 시뮬레이션 기법중 3단계로부터 얻어지는데, 이중  $x_G$  및  $\theta_x$ 에 대한 시간이력곡선이 Fig. 6(a)와 7(a)에 나타나 있다. 또한 Fig. 1에 보여진 회

**Table 1** Input data for a rotor-bearing system

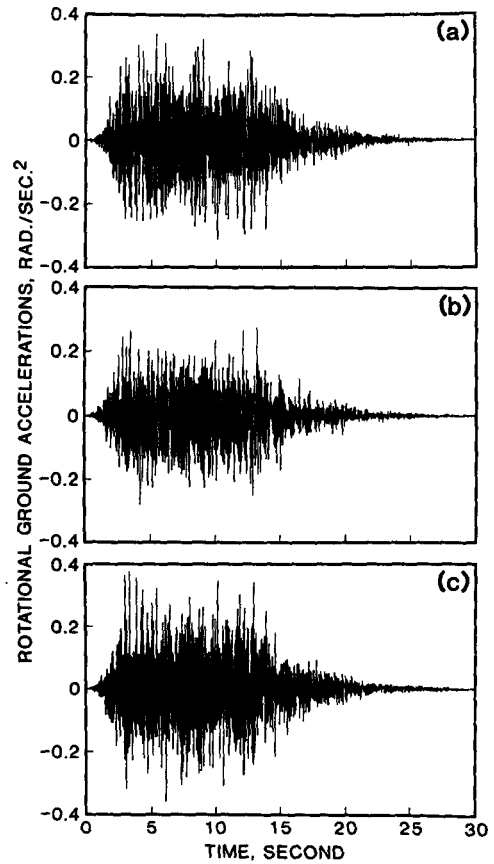
$m = 2.4 \times 10^4 \text{kg}$	$l_1 = 3.22 \text{m}$	$l_2 = 5.28$
$h = 1 \text{m}$	$I = 4.57 \times 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^2$	$I_o = 3.6 \times 10^5 \text{kg} \cdot \text{m}^2$
$\omega = 3000 \text{rpm}$	$K_{xx1} = 5.89 \times 10^8 \text{N/m}$	$K_{xy1} = 5.10 \times 10^7 \text{N/m}$
$K_{yx1} = -1.29 \times 10^9 \text{N/m}$	$K_{yy1} = 1.87 \times 10^9 \text{N/m}$	$K_{xx2} = 6.76 \times 10^8 \text{N/m}$
$K_{xy2} = 2.16 \times 10^7 \text{N/m}$	$K_{yx2} = -1.49 \times 10^9 \text{N/m}$	$K_{yy2} = 2.27 \times 10^9 \text{N/m}$
$C_{xx1} = 2.8 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{S/m}$	$C_{xy1} = -4.1 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{S/m}$	$C_{yx1} = -4.1 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{S/m}$
$C_{yy1} = 1.17 \times 10^7 \text{N} \cdot \text{S/m}$	$C_{xx2} = -4.1 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{S/m}$	$C_{xy2} = -5.0 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{S/m}$
$C_{yx2} = -5.0 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{S/m}$	$C_{yy2} = 1.37 \times 10^7 \text{N} \cdot \text{S/m}$	

**Table 2** Parameters for the earthquake ground motions

Envelope function	$t_1 = 3 \text{sec}$	$t_2 = 13 \text{sec}$	$c = 0.26$
Power spectral densities	$\omega_x = 18.85 \text{rad/s}$	$\zeta_x = 0.65$	$s_x^2 = 1.35 \times 10^{-2} \text{m}^2/\text{sec}^3$
	$\omega_y = 30.3 \text{rad/s}$	$\zeta_y = 0.65$	$s_y^2 = 3.70 \times 10^{-3} \text{m}^2/\text{sec}^3$
	$\omega_z = 304.8 \text{rad/s}$	$\zeta_z = 0.65$	$s_z^2 = 1.00 \times 10^{-2} \text{m}^2/\text{sec}^3$



**Fig. 4** Simulated sample functions of translational ground accelerations: (a) along  $x_b$ -direction,  $\ddot{x}_b$ ; (b) along  $y_b$ -direction,  $\ddot{y}_b$ ; (c) along  $z_b$ -direction;  $\ddot{z}_b$ .



**Fig. 5** Simulated sample functions of rotational ground accelerations: (a) about  $x_b$ -axis,  $\ddot{\theta}_{xb}$ ; (b) about  $y_b$ -axis,  $\ddot{\theta}_{yb}$ ; (c) about  $z_b$ -axis,  $\ddot{\theta}_{zb}$ .

전축-베어링 시스템의 왼편 베어링에서의  $x_b$ -축에 따른 상대변위  $x_1$  및 회전축과 베어링 사이에 작용하는 힘  $F_{x1}$ 에 대한 시간이력곡선은 각각 Fig. 8(a)와 9(a)에 나타나 있다. 지반의 회전거동  $\theta_{xb}$ ,  $\theta_{yb}$

및  $\theta_{zb}$ 를 무시한 경우 이에 대응하는 응답치  $x_G$ ,  $\theta_x$ ,  $x_1$  및  $F_{x1}$ 에 대한 시간이력곡선들은 각각 Fig. 6(b)~Fig. 9(b)에 나타나 있다. Fig. 6~Fig. 9에서

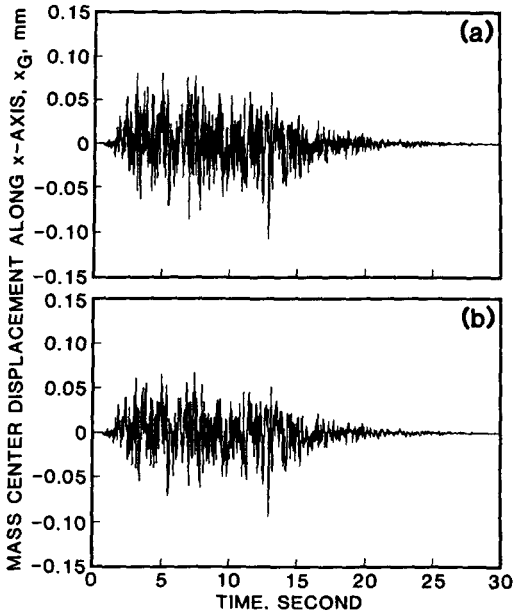


Fig. 6 Sample functions of mass center displacement along x-axis; (a) including base rotations, (b) excluding base rotations.

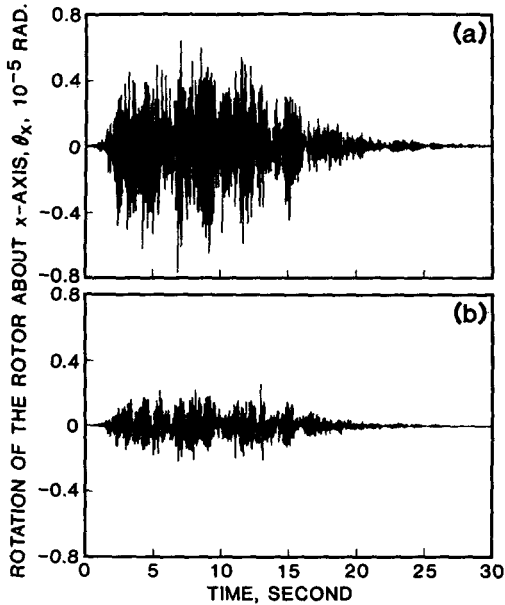


Fig. 7 Sample functions of rotation of the rotor about x-axis; (a) including base rotations, (b) excluding base rotations.

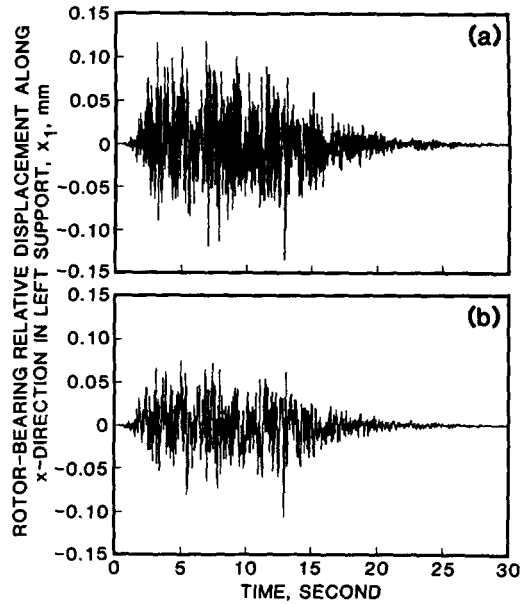


Fig. 8 Sample functions of rotor-bearing relative displacement along x-direction in left support; (a) including base rotations, (b) excluding base rotations.

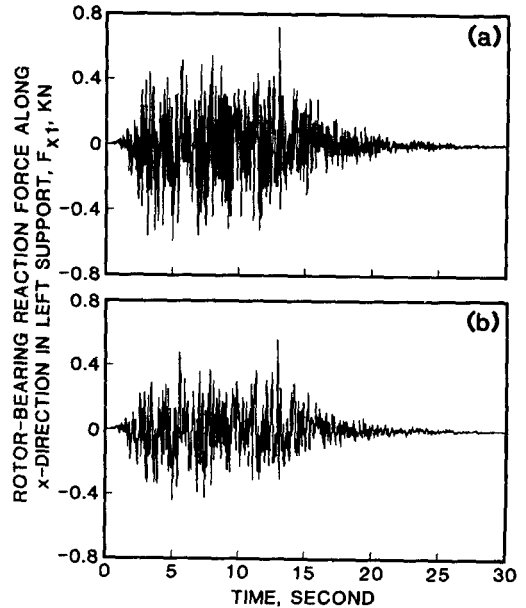


Fig. 9 Sample functions of rotor-bearing reaction force along x-direction in left support; (a) including base rotations, (b) excluding base rotations.

보는 바와 같이 지반의 회전거동은 회전축-베어링 시스템의 응답치의 진폭을 증가시킨다. 특히 회전축의  $x_b$ - 또는  $y_b$ -축에 대한 회전각  $\theta_x$  및  $\theta_y$ 는 지반의 회전거동에 대해 상당히 민감함을 알 수 있다 (Fig. 7).

100세트의 여섯 성분 지반거동에 대한 시간이력 곡선들을 시뮬레이션 기법으로 얻고, 각 세트의 지반거동에 대한 회전축-베어링 시스템의 응답치를 구한 다음, 일반적인 통계학을 이용하여 시간함수인 응답치의 평균함수, 표준편차 또는 r.m.s. 값을 얻을 수 있다. Fig. 10~Fig. 13에서 곡선 1은  $x_G$ ,  $\theta_x$ ,  $x_1$  및  $F_{x1}$ 에 대한 r.m.s. 값이 시간함수로써 나타나 있다.

지반의 회전거동을 고려하지 않을 경우, 스펙트럴 해법으로 얻은 r.m.s. 값은 이들 그림에서 곡선 2로써 나타나 있고, 마찬가지로 지반의 회전거동을 무시했을 때 시뮬레이션 기법으로 얻은 값은 이들

그림에서 곡선 3으로 나타난다. Fig. 10~Fig. 13에서 곡선 2와 곡선 3의 비교로부터, 지반의 회전거동을 무시한 경우, 스펙트럴 해법으로 얻은 결과와 시뮬레이션 기법으로 얻은 결과는 매우 근사함을 알 수 있다. 이는 100세트의 여섯 성분 지반거동 시간이력곡선을 사용하면 충분히 정확한 응답치를 얻을 수 있음을 보여준다.

시뮬레이션 기법으로 얻은 시간함수인 r.m.s. 값은 실제로는 Fig. 10~Fig. 13에서 곡선 1 및 3과

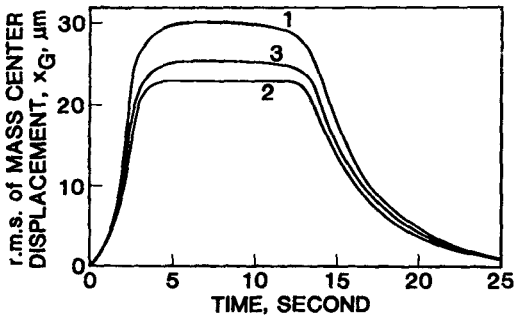


Fig. 10 Root mean square of mass center displacement along x-direction; 1-simulation result including base rotations, 2-spectral analysis, 3-simulation result excluding base rotations.

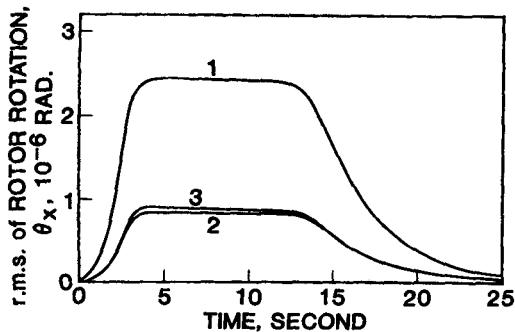


Fig. 11 Root mean square of rotor rotation about x-axis; 1-simulation result including base rotations, 2-spectral analysis, 3-simulation result excluding base rotations.

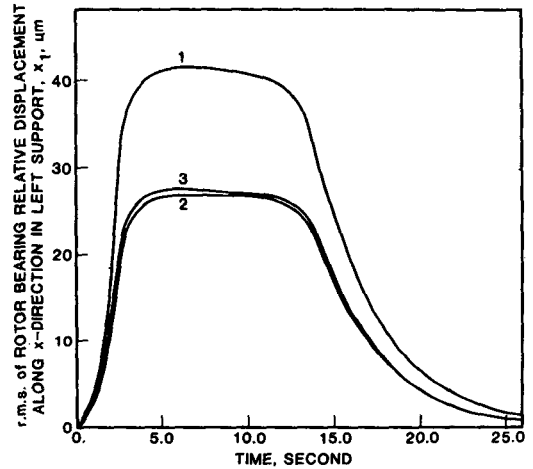


Fig. 12 Root mean square of rotor-bearing relative displacement along x-direction in left support; 1-simulation result including base rotations, 2-spectral analysis, 3-simulation result excluding base rotations.

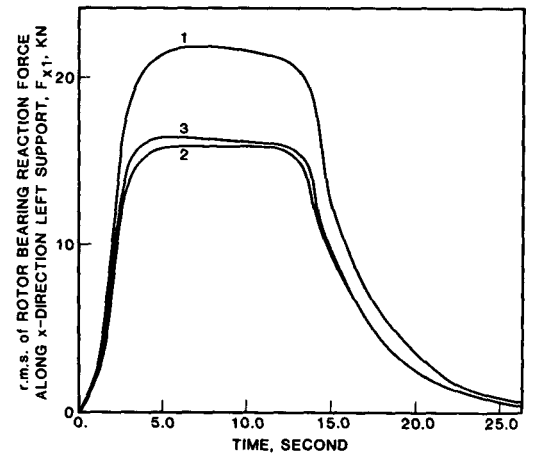


Fig. 13 Root mean square of rotor-bearing reaction force along x-direction in left support; 1-simulation result including base rotations, 2-spectral analysis, 3-simulation result excluding base rotations.



같은 유연한 곡선(smooth curves)이 아니다. 여기서 나타낸 유연한 곡선은 시뮬레이션 기법으로 얻은 r.m.s. 값의 최소자승회귀법(least square method)에 의한 곡선을 나타낸다. 그 이유는 응답치들의 정상(stationary) 구간내에서의 변동계수(coefficient of variation)가 7% 미만이고 또한 계산된 r.m.s. 값들은 30초의 시간영역내에서 2000 points 이상이기 때문에 그림으로 명백히 도시하기가 매우 어렵기 때문이다.

일반적으로 회전기기(rotating machines)의 고유진동수는 지진에 의한 지반가속도의 주진동수보다 매우 높다. Fig. 14는 회전축의 질량중심 G의  $x_b$ -축에 따른 변위  $x_c$ 에 대한 주파수응답함수(frequency response function)이며, Fig. 15는  $x_b$ -축에 대한 회전각  $\theta_x$ 에 대한 주파수응답함수이다. 두 그림에서 보는 바와 같이 회전축-베어링 시스템에 대한 고유진동수는 약 200rad/sec임에 반해 지반 가속도의 주진동수는 Table 2에서 주어진 것

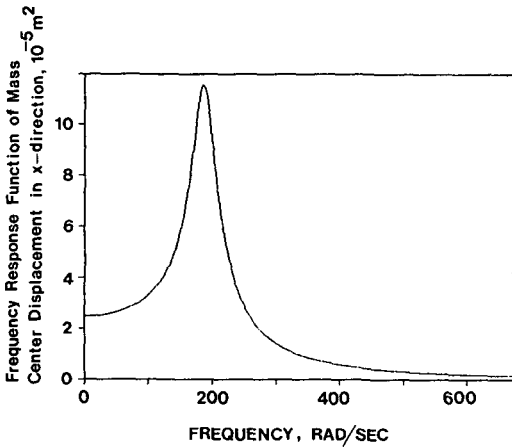


Fig. 14 Frequency response function

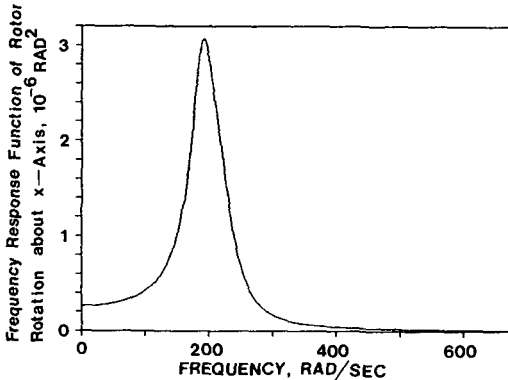


Fig. 15 Frequency response function

과 같이 20~30rad/sec 부근이다. 회전축-베어링 시스템의 고유진동수와 지반가속도의 주진동수의 현저한 차이 때문에 회전기기의 응답은 지진의 스펙트럼 밀도함수(power spectral density) 모델의 선택에 따라 극히 민감할 수 있다. Table 3에서 주어진 세 가지 형태의 지진의 스펙트럼 밀도함수 모델에 대한 민감도 연구(sensitivity study) 결과 회전축-베어링 시스템은 여러 형태의 지반거동에 대한 PSD 모델의 선택에 크게 영향을 받지 않음이 밝혀졌다(Table 4 참조). 이는 Table 3에서 주어진 세 가지 지진의 스펙트럼 밀도함수 모델들의 형태가 지반가속도의 주진동수 부근에서는 비슷하고 회전축-베어링 시스템의 고유진동수 부근에서는 거의 0에 가깝기 때문인 것으로 생각된다.

Table 3 Three types of the earthquake PSD models

Type A	$\Phi_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega) = \frac{[1+4\zeta_x^2(\omega/\omega_x)^2] \cdot s_x^2}{\{[1-(\omega/\omega_x)^2]^2+4\zeta_x^2(\omega/\omega_x)^2\}}$
Type B	$\Phi_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega) = \frac{(\omega/\omega_x)^2 \cdot s_x^2}{\{[1-(\omega/\omega_x)^2]^2+4\zeta_x^2(\omega/\omega_x)^2\}}$
Type C	$\Phi_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega) = \frac{(\omega/\omega_x) \cdot s_x^2}{\{[1-(\omega/\omega_x)^2]^2+4\zeta_x^2(\omega/\omega_x)^2\}}$

Table 4 r.m.s values of mass center displacement along x-direction,  $X_c$ , as functions of time and types of earthquake PSD models

PSD model	Time(sec.)					
	0	5	10	15	20	25
A	0	22.902	22.902	14.235	3.885	1.088
B	0	23.480	23.480	14.939	3.957	1.104
C	0	22.691	22.691	13.964	3.820	1.071

(unit ;  $\mu m$ )

6. 결 론

지진에 의한 여섯 성분 지반거동은 회전축-베어링 시스템의 운동방정식이 파라미터릭 및 非齊次勵

起(parametric and inhomogeneous excitations)를 포함하게 한다. 이러한 문제는 종래의 해석학적 방법인 스펙트럼 해법의 적용이 불가능하기 때문에 본 논문에서는 Monte Carlo 샘플레이션 기법을 응용한 수치해석적인 방법을 제시하였다. 이는 많은 sets의 지반거동 시간이력곡선을 시뮬레이션해야 하기 때문에 계산시간(computer time)에 대한 경제성 문제가 대두되지만 한 세트의 지반거동 시간 이력곡선을 산출하기 위해 약 20sec의 CPU time (IBM 370 기준)이 소요되었으며, 100세트의 시간 이력곡선을 산출하고 회전축-베어링 시스템의 응답 통계치까지 계산하기 위해서는 약 3분의 CPU time이 소요되었으므로 그리 큰 문제가 되지 않을 것 같다. 그러나 앞에서 언급한 바와 같이 지반의 회전거동을 무시하면 스펙트럼 해법을 적용할 수 있는데 이때에는 약 30sec의 CPU time이 소요되었으므로 이러한 파라미터력勵起를 포함하는 운동방정식에 대한 해석학적 방법이 개발되면 계산시간을 현저히 줄일 수 있으므로 이에 대한 꾸준한 연구가 필요할 것으로 생각된다.

해석예제에서 보는 바와 같이 지반의 회전거동을 회전축-베어링 시스템의 응답치에 큰 영향을 미침을 알 수 있는데, 이는 이러한 지반의 회전거동은 회전축-베어링 시스템의 동적해석시 필히 고려되어야 함을 말해준다.

본 논문에서는 회전축을 강축(rigid shaft)으로 이상화하여 해석을 수행하였기 때문에 실제로 회전축이 가지고 있는 유연성(flexibility)은 무시되었다. 또한 이러한 회전축이 세개 이상의 베어링에 의해 지지되었을 경우에는 본 논문에서 유도한 운동방정식은 적용할 수가 없다. 더 나아가서 회전축의 단면이 축 대칭이 아닌 경우나 中空軸인 경우에도 본 논문에서 제시한 방법은 적용할 수 없게 된다. 그러므로 회전축-베어링 시스템의 동적해석을 위해 더 일반화된 방법이 연구되어야 할 것으로 생각된다.

마지막으로 세 가지 지진의 PSD 모델에 대한 민감도 연구(sensitivity study) 결과, 회전축-베어링 시스템은 여러 형태의 지진의 PSD 모델에 대해 크게 민감하지 않음이 밝혀졌다. 하지만 해석예제에서 나타난 것과 같이 회전축-베어링 시스템의 고유진동수는 지반가속도의 주진동수보다 훨씬 높으므로 높은 진동수 영역에서의 지진의 PSD 형태에 대한 정밀한 연구가 필요할 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

- (1) Ang, A. H-S., 1974, "Probabilistic Concepts in Earthquake Engineering", Applied Mechanics in Earthquake Engineering, W. D. Iwan(edo), ASME, AMD Vol. 8, New York.
- (2) Lin, Y. K., 1976, "Probabilistic Theory of Structural Dynamics", Kreiger Publishing Company, New York, NY.
- (3) Soni, A. H., and Srinivasan, V., 1983, "Seismic Analysis of a Gyroscopic Mechanical System", J. Vibration, Acoustics, stress and Reliability Design, Trans. ASME, Vol. 105, pp. 449~455.
- (4) Kim, K. B., Ynag, J. N., and Lin, Y. K., 1986, "Stochastic Response of Flexible Rotor-Bearing System to Seismic Excitations", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 1, No. 3, pp. 122~130.
- (5) Meirovitch, L., 1970, "Methods of Analytical Dynamics", McGraw-Hill, New York, N. Y.
- (6) Lund, J. W., and Thomsen, K. K., 1978, "A Calculation Method and Data For the Dynamic Coefficients of Oil-Lubricated Journal Bearings", Topics in Fluid Film Bearing System Design and Optimization, ASME Conference, Chicago, pp. 1~28.
- (7) Lund, J. W., 1979, "Evaluation of Stiffness and Damping Coefficients for Fluid-Film Bearings", Shock and Vibration Digest, Vol. 11, No. 1, pp. 5~10.
- (8) Liu, S. C., 1970, "Evolutionary Power Spectral Density of Strong Motion Earthquake", Bulletin Seismological Society of America, Vol. 60, No. 3, pp. 891~900.
- (9) Yang, J. N., 1972, "Simulation of Random Envelope Processes", J. of Sound and Vibration, Vol. 21, No. 1, pp. 73~85.
- (10) Hudson, D. E., Brady, A. G., Trifunac, M. D., and Vijayaraghavan, A., 1971, "Strong Motion Earthquake Accelerograms", California Institute of Technology, ERL 71~50.

부 록

I . Lagrange의 운동방정식

식 (4)를 고려하여 비보존력에 의한 가상일  $\delta W_{nc}$  를 다시 쓰면 다음과 같이 된다.

$$\delta W_{nc} = Q_1 \delta x_C + Q_2 \delta y_C + Q_3 \delta z_C + Q_4 \delta \theta_x + Q_5 \delta \theta_y \tag{A-1}$$

여기서

$$Q_1 = -\{(C_{xx1} + C_{xx2}) \dot{x}_G + (C_{xy1} + C_{xy2}) \dot{y}_G + (-l_1 C_{xy1} + l_2 C_{xy2}) \dot{\theta}_x + (l_1 C_{xx1} - l_2 C_{xx2}) \dot{\theta}_y\}$$

$$Q_2 = -\{(C_{yx1} + C_{yx2}) \dot{x}_G + (C_{yy1} + C_{yy2}) \dot{y}_G + (l_1 C_{yx1} - l_2 C_{yx2}) \dot{\theta}_y + (-l_1 C_{yy1} + l_2 C_{yy2}) \dot{\theta}_x\}$$

$$Q_3 = -\{(C_{zz1} + C_{zz2}) \dot{z}_G\}$$

$$Q_4 = -\{(-l_1 C_{yx1} + l_2 C_{yx2}) \dot{x}_G + (-l_1 C_{yy2}) \dot{y}_G + (l_1^2 C_{yy1} + l_2^2 C_{yy2}) \dot{\theta}_x + (-l_2^2 C_{yx1} - l_2^2 C_{yx2}) \dot{\theta}_y\} \delta \theta_x$$

$$Q_5 = -\{(l_1 C_{xx1} - l_2 C_{xx2}) \dot{x}_G + (l_1 C_{xy1} - l_2 C_{xy2}) \dot{y}_G + (-l_1^2 C_{xy1} - l_2^2 C_{xy2}) \dot{\theta}_x + (l_1^2 C_{xx1} \dot{\theta}_y + l_2^2 C_{xx2}) \dot{\theta}_y\}$$

이 경우 Lagrange의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_G} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_G} + \frac{\partial V}{\partial x_G} - Q_1 &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_G} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_G} + \frac{\partial V}{\partial y_G} - Q_2 &= 0 \quad (A-2) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_y} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_y} + \frac{\partial V}{\partial \theta_y} - Q_5 &= 0 \end{aligned}$$

II. 지반변진가속도  $X_b(t)$  시뮬레이션

비정상불규칙과정(nonstationary random process)인 지반변진가속도  $\ddot{X}_b(t)$ 는 다음과 같이 시뮬레이션 할 수 있다.

$$\ddot{X}_b(t) = \Lambda(t) \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} (\sqrt{2 \Phi_{x_0 x_0}(\omega_k)} \cdot \Delta \omega_k \cdot e^{i\psi_k}) e^{i\omega_k t} \right\} \quad (A-3)$$

여기서  $N$ 은 큰 자연수( $10^5$ 과 같은)를 의미하며 시뮬레이션의 정확도는  $N$ 이 크면 클수록 높아진다.  $\operatorname{Re}\{ \}$ 는 실수부분을 의미하며  $\Lambda(t)$  및  $\Phi_{x_0 x_0}(\omega)$ 는 각각 식 (12)와 (13)에서 주어진다. 또한  $\Delta \omega_k = \omega_k - \omega_{k-1}$ 이며, 계산의 편의상  $\Delta \omega_1 = \Delta \omega_2 = \dots = \Delta \omega_{N-1}$ 로 하면  $\omega_k = k \Delta \omega$ 이다. 그리고  $\psi_k$ 는  $[0, 2\pi]$  구간에서 등분포밀도함수(uniform density function)  $\frac{1}{2\pi}$ 을 가지는 불규칙 위상각(random phase angle)이다.

위의 식 (A 3)은 FFT(fast Fourier transform) 기법을 적용하면 효율적으로 계산할 수 있다.