

<論 文>

# 평면 프레임 구조물의 유한요소 비선형 해석을 위한 효율적인 수치해석 방법에 관한 연구

구 정 서\* · 이 병 채\* · 곽 병 만\*\*

(1987년 12월 14일 접수)

## A Study on Improving Efficiency in Computational Procedure of Finite Element Nonlinear Analysis of Plane Frame Structures

Jeong Seo Koo, Byung Chai Lee and Byung Man Kwak

**Key Words** : Frame Structure(보 구조), Nonlinear Analysis(비선형 해석), Pre-Buckling Analysis(전 좌굴해석), Post-Buckling Analysis(후 좌굴해석)

### Abstract

Computational procedures associated with finite element nonlinear analysis of plane frame structures were examined and new solution schemes were suggested. Element stiffness matrix was derived from the principle of virtual displacements. Geometric and material nonlinearities were considered in the formulation. Solution method was based upon the constant displacement length method in conjunction with the Newton-Raphson method. New solution schemes were introduced in determining the initial load increment and the sign of load increments and predicting the length of displacement increment to improve user convenience, efficiency and stability. Numerical experiments were performed for several typical problems and suggested schemes were found efficient and convenient for analyzing nonlinear frame structures.

### 기 호 설 명

- $E$  : 탄성계수
- $e$  : 보 요소의 중립축의 변형도
- $E_H$  : 변형도-응력곡선에서 소성영역의 접선계수
- $E_T$  : 접선계수
- $EXT$  : 보 요소의 증분형 외부가상일
- $F$  : 프레임의 전체 내부힘 벡터
- $f^e$  : 보 요소의 내부힘 벡터
- $INT$  : 요소의 증분형 내부가상일
- $j$  : 축차단계를 나타내는 첨자

- $K_T$  : 프레임의 접선 강성행렬
- $k_T^e$  : 보 요소의 접선 강성행렬
- $m$  : 좌상첨자로 사용되며 축차의 수렴이 완료된 증분단계를 나타내는 첨자
- $P$  : 프레임에 작용하는 전체 외부힘 벡터
- $p^e$  : 보 요소에 작용하는 외부힘 벡터
- $P_0$  : 기준 하중벡터
- $p_x$  : 보 요소에 가해지는 수평방향 외력
- $p_z$  : 보 요소에 가해지는 수직방향 외력
- $q$  : 보 요소의 절점변위 벡터
- $s$  : 변형전 보요소의 길이
- $TOL$  : 수렴판정 상수
- $U$  : 프레임의 전체 절점변위
- $u$  : 보 요소의 수평방향 변위

\* 한국과학기술원 기계시스템연구소

\*\* 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

$V$	: 변형후의 보 요소의 체적
$w$	: 보 요소의 수직방향 변위
$\Delta$	: 증분량을 표시하기 위한 부호
$\Delta^m l$	: $m$ 증분 단계에 대한 변위증가 벡터의 크기
$\Delta W$	: 증분일
$\epsilon$	: 보 요소내의 임의의 점의 변형도
$\epsilon_H$	: 변형도-응력곡선에서 천이 영역이 끝나는 점의 변형도
$\epsilon_0$	: 항복변형도
$\lambda$	: 하중매개수
$\mu_j$	: $j$ 축차 단계에서 수렴 여부를 판정하기 위한 최대노움
$\sigma$	: 요소내에서 임의의 점의 응력
$\sigma_0$	: 항복응력
$\chi$	: 보 요소의 중립축의 곡률

## 1. 서 론

비선형 구조물을 해석하기 위하여 유한요소법이 널리 사용되는데, 구조역학적 제 현상을 고려한 비선형 평형방정식의 구성방법과 이 방정식을 사용하여 좌굴전 영역뿐만 아니라 좌굴후 영역까지도 안정된 수치해를 구하는 방법으로 대별되어 연구되어 왔다<sup>(1~3)</sup>. 본 논문에서는 Cichon<sup>(4)</sup>에 의하여 유도된 평면 프레임의 비선형 평형방정식과 Crisfield<sup>(5)</sup>의 전·후 좌굴영역의 수치해석 방법을 보완하여, 유한요소 수치해석을 효율적으로 수행할 수 있는 방법을 정립하는 데 목적을 두었다.

Cichon은 굽힘변형과 압축변형의 복합에 의한 비선형성, 대변위에 의한 기하학적 비선형성, 물성의 비선형성을 고려하였다. 대변위 현상을 고려하기 위하여 고정된 전체좌표계에서 요소의 변형형상을 기술하는 total lagrangian formulation을 사용하였고, 비선형 변위-변형도 관계를 증분식으로 고쳐서 변위증분의 2차항까지를 고려하고 비선형 변형도-응력 관계를 증분형으로 선형화하여 가상일의 원리를 적용하여서 증분형 비선형 평형 방정식을 구했다. 이때 사용된 가공 경화 모형은 kinematic hardening model이며, 축 방향의 변위와 굽힘방향 변위를 모두 hermite 보간하는 유한요소를 사용하여 굽힘변형과 압축변형의 복합을 잘 고려할 수 있도록 하였다. 본 논문에서는 변형도-응력 관계 곡선 모형, 부재내에 발생하는 소성을 점검하여 그

효과를 고려하는 모형, 수치적분의 차수등 부분적인 상이점을 제외하고는 Cichon의 수치화 과정을 따랐다.

비선형 해석의 초기에는 구조물의 포텐셜 에너지를 최소화하는 점을 직접 탐색하는 최소화 기법이 사용되었으나 규모가 큰 구조물의 해석에는 증분 축차법이 더 효율적인 것으로 알려져 이 분야에 대한 연구가 활발히 이루어졌다. 그러나 이 방법으로는 증분 강성행렬이 특이성을 갖는 극한점의 근방과 스냅 버클링(snap-buckling)이 발생하는 영역을 해석하는 것이 어려운 문제가 되었다. 이 난점을 극복하는 방법의 한가지로 증분 강성행렬에 스프링 상수를 더하여 주어서 해석할 전 영역에서 증분 강성행렬이 positive definite가 되게 하고 실제 구조물의 외부하중에 하중감소계수를 적용시켜 주는 방법이 사용되었으나 복잡한 구조물에는 시행착오를 거듭하면서 많은 스프링을 가해 보아야 하기 때문에 어려운 점이 많았다.

Bergan<sup>(7)</sup>은 현재 강성 매개수(current stiffness parameter)라는 강성척도를 제시하여 극한점의 위치를 예견하고 평형 경로를 포물선으로 외삽하여 하중을 자동으로 조절하는 알고리즘을 개발하였다. 이 방법은 하중을 증가시켜 고정하여 두기 때문에 극한점 근방에서 수렴된 해를 구할 수가 없다. 이것을 극복하기 위하여 이 부분에서는 축차를 시행하지 않는데 이 경우 작은 하중 증분에 대하여 큰 변위 증분이 발생하기 때문에 상당히 큰 오차가 발생할 우려가 있다. 또 다른 방법으로서 Batoz<sup>(8)</sup>는 어떤 절점 변위를 택하여 증가시키면서 평형 방정식을 풀고 여기에 해당하는 하중 수준을 정하는 방법을 제안하였는데 사용자가 해석할 구조물의 특성을 잘 알지 못하면 절점변위의 선택에 어려움이 있다. 만약 선택한 절점 변위가 스냅 백(snap-back) 거동을 한다면 계속 해를 구할 수가 없기 때문에 선택한 절점 변위를 바꾸어 주어야 한다.

Riks<sup>(9)</sup>는 각 증분 단계에서 하중-변위 증분 길이를 일정하게 하는 구속 조건을 주고 축차를 시행하는 방법을 사용하여 극한점이나 스냅 버클링 영역을 용이하게 해석하였다. 그러나 이 방법은 유한요소법의 특징인 강성 행렬의 대칭성을 깨뜨려 계산시간과 기억 용량이 많이 필요하게 되었다. 그 후에 Crisfield는 Batoz와 Riks의 방법을 결합하여 일정 변위 증분 방법을 개발하였는데 수치해석의 안정성이나 수렴성이 탁월하며 유한 요소법에 매우

적합한 것으로 평가되고 있다. 그러나 사용자가 해석하려는 구조물의 하중-변위 특성을 개략적으로 알지 못한다면 축차 과정에서 수렴이 가능한 초기 하중 증분량을 예측하여 입력시켜 주는 것이 어려운 일이다. 본 논문에서는 선형 탄성 해석의 결과를 이용하여 초기 하중 증분량을 결정하는 방법을 제안한다. 또 Crisfield의 방법에서 부분적으로 발생하는 수치적 불안정을 개선하고 수치 해석의 효율을 제고시키기 위하여 하중 증감의 판정 방법과 변위 증분 길이의 예측 방법을 제안한다.

Newton-Raphson의 축차 계산법을 이용한 일정한 변위 증분 방법에 제안한 방법들을 적용시켜 수치 해석 알고리즘을 만들고 프로그램을 개발하여, 여러가지 형태의 비선형 거동을 하는 구조물을 효율적으로 수치해석 할 수 있음을 보인다.

## 2. 비선형 유한 요소 방정식<sup>(4)</sup>

평면 프레임의 유한요소 방정식을 유도하기 위하여 탄소성 평면 보 요소의 변형을 total lagrangian 수식으로 표현하고 여기에 가상일의 원리를 적용하여 요소의 강성 행렬과 등가 하중 벡터를 구한다. 평면 보 요소의 중립축을 국부 좌표계의  $x$  축으로 하고 고려하는 평면내에서  $x$  축에 반시계 방향으로 수직인 방향을  $z$  축으로 정의한다. 보 요소에서 중립축은 기하학적 중립축으로 하며 중립축에 수직인 단면은 변형후에도 수직으로 남아 있고 전단 변형은 무시될 수 있는 것으로 가정한다. 여기서 고려하는 보 요소는  $x$ - $z$  평면에 대하여 대칭이다. 이때 수평 방향 변위를  $u$ , 수직방향 변위를  $w$ 라 하고 변형의 기하학적 관계를 고려하면 변위와 변형도( $\epsilon$ ) 사이의 관계식은 다음과 같다<sup>(4)</sup>.

$$\epsilon = e - xz \tag{1}$$

$$\text{단, } e = u' + 0.5(u'^2 + w'^2) \tag{2}$$

$$x = \{(1 + u')w'' - w'u''\} / \sqrt{1 + 2e} \tag{3}$$

여기서, 상첨자 '은 길이 방향으로의 미분을 나타내며,  $e$ 는 중립축의 변형도,  $x$ 는 보의 곡률이다. 이 식에서 볼 수 있는 바와같이  $e$ ,  $x$  정의식에  $u$ ,  $w$ 의 미분값들이 복합되기 때문에 보의 굽힘 변형과 축 변형이 복합되는 점이 선형 보와 크게 다른점이다. 또한, 증분형 응력-변형도 관계는

$$\Delta\sigma = E_T \Delta\epsilon \tag{4}$$

로 표현된다. 여기서  $\Delta$ 는 증분량을 표시하기 위한 부호이다. 대상 재료는 Von Mises 항복 조건을 따

르는 등방성 재료로 국한하고 flow rule과 재료의 가공 경화 모델로부터 접선 계수  $E_T$ 를 얻을 수 있다. 만약 소성변형 과정에 탄성회복이 발생하면 초기 탄성계수로, 탄성회복 도중에 다시 항복이 발생하면 전술한 방법으로  $E_T$ 의 값을 결정한다. 본 논문에서는 kinematic hardening model을 사용하며 변형도-응력 관계식을 Table 1과 같이 응력에 따라 탄성 영역, 천이 영역, 소성 영역으로 구분하여 구분 연속인 함수로 근사시킨다. Table 1에서  $E_H$ 를 소성영역의 접선계수,  $\epsilon_0$ 를 항복 변형도,  $\epsilon_H$ 를 천이 영역이 끝나는 점의 변형도라 할때 Cichon<sup>(4)</sup>은  $\epsilon_0$ 와  $\epsilon_H$ 에서 변형도-응력관계 곡선의 기울기가 연속이 되도록  $\epsilon_H$  및 곡선의 계수  $A$ ,  $B$ 를 구하였으나 강(steel)과 같이 항복점에서 기울기가 불연속적으로 변하는 재료에서는 오차가 크다. 따라서 본 논문에서는 항복점의 기울기 연속조건을 제외하고  $\epsilon_H$ 값을 실험자료로부터 경험적으로 구하여 천이영역의 2차함수를 결정한다. 만약, Cichon의  $\epsilon_H$  값을 사용하면 같은 2차 함수가 구해진다.

요소에 대한 증분형 내부 가상일은 변형후의 요소에 대한 체적적분형으로

$$INT = \int_V (\sigma + \Delta\sigma) \delta\Delta\epsilon \, dV \tag{5}$$

와 같이 나타내어지고 증분형 외부 가상일을 변형전인 보 요소의 길이에 대한 적분형으로 표현하면

$$EXT = \int_S \{ (p_x + \Delta p_x) \delta\Delta u + (p_z + \Delta p_z) \delta\Delta w \} dx \tag{6}$$

과 같다. 여기서  $p_x$ ,  $p_z$ 는 각각 변형전인 보축의 단위 길이당 가해지는 수평 방향, 수직방향 외력이고,  $\Delta p_x$ ,  $\Delta p_z$ 는 그들의 증분값이다. 또한 식(6)에서는 요소양단에 작용하는 집중하중은 제외시켰

Table 1 Strain-stress relations

	$\sigma$	$E_T$
$\sigma \leq \sigma_0$	$E\epsilon$	$E$
$\sigma_0 < \sigma < \sigma_H$	$A(\epsilon - \epsilon_0)^2 + B(\epsilon - \epsilon_0) + \sigma_0$	$2A(\epsilon - \epsilon_0) + B$
$\sigma \geq \sigma_H$	$(\epsilon - \epsilon_H)E_H + \sigma_H$	$E_H$

where,

$$A = \frac{1}{(\epsilon_H - \epsilon_0)^2} [E_H(\epsilon_H - \epsilon_0) + \sigma_0 - \sigma_H],$$

$$B = \frac{2(\sigma_H - \sigma_0)}{\epsilon_H - \epsilon_0} - E_H$$

는데, 이것은 요소의 경계조건으로 취급한다.

요소의 수평 방향 변위와 수직 방향 변위를 각각 Hermite 보간하고 응력, 변형도 등을 구한 다음 식(5), (6)에 대입하여 가상일의 원리를 적용하면

$$k_T^e \Delta q = (p^e + \Delta p^e) - f^e \quad (7)$$

로 표시된 요소의 증분형 평형방정식이 구해진다<sup>(4)</sup>. 여기서  $k_T^e$ 는 요소의 접선 강성행렬,  $q^e$ 는 요소의 절점 변위 벡터,  $p^e$ 는 요소에 작용하는 외부힘 벡터,  $f^e$ 는 요소의 내부힘 벡터를 나타낸다. 식(7)을 전체 좌표계에 대하여 변환하고 표준 조립과정을 거쳐서 다음과 같은 프레임의 증분 평형 방정식이 구해진다.

$$K_T \Delta U = (P + \Delta P) - F \quad (8)$$

여기서,  $K_T$ 는 프레임의 접선 강성행렬,  $U$ 는 프레임의 전체 절점 변위 벡터,  $P$ 는 프레임에 작용하는 전체 외부힘 벡터,  $F$ 는 프레임의 전체 내부힘 벡터를 나타낸다. 외력이 비례하중으로 가해진다 가정하면

$$P = \lambda P_0 \quad (9)$$

로 나타낼 수 있다. 단,  $P_0$ 는 기준 하중 벡터(reference load vector)이며  $\lambda$ 는 하중 매개수로  $0 \leq \lambda \leq 1$ 이다.

식(7)에서  $k_T^e$ 를 구성할 때 요소 내부에 소성이 발생하면 식(4)의  $E_T$  값이 요소내의 위치에 따라 달라지기 때문에 요소를 가상적으로 유한개의 층으로 나누고, 수치적분점 위치의 각층 중앙에서 소성을 점점하여  $E_T$  값을 구하는 방법(layered approach)<sup>(6)</sup>을 사용한다. 단, 여기서 식(7)의  $k_T^e$ ,  $f^e$ 를 엄밀하게 수치적분하기 위하여 가우스 7점 적분을 사용한다.

### 3. 수치해 방법

좌굴이 있는 구조물의 비선형 유한 요소 해석의 수치 해석에서는 하중이 변위의 단조 함수로 표현되지 않으므로 변위를 독립 변수로 하거나 하중을 독립 변수로 하여도 다가함수로 표현되게 된다. 이러한 경우 증분시킬 변수 결정 및 증분량 결정에 어려움이 많다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 지난 이십여년간 여러가지의 알고리즘<sup>(7,8)</sup>이 제시되었으나 Crisfield<sup>(5)</sup>의 일정 변위 증분 방법이 수치 해석의 안정성과 효율성의 면에서 가장 좋은 것으로 평가되고 있다. 이 방법은 Riks<sup>(9)</sup>가 제시한 수치 해석 방법을 유한요소 해석에 적합하도록 수정한

것으로 각 증분 단계마다 변위 증분 벡터의 크기를 일정하게 제한시키면서 증분해를 구하는 방법이다.

이 방법의 개요는 다음과 같다. Fig. 1에서 좌상첨자  $m, m+1$ 은 증분단계를 나타낸다. 또한, 좌상첨자 0, 1, ...,  $j$ 와 우상첨자 (0), (1), ..., ( $j$ )는  $m$ 번째 증분단계의 매축차에서 구해진 하중매개수와 변위를 나타내기 위하여 사용되는데, 전자는 현단계의 현축차까지 구해진 전체량임을 나타내고, 후자는 현 증분단계의 시작에서부터 현 축차까지 구해진 증분량을 나타내기 위하여 사용된다.

식(8)을  $m$ 번째 증분의  $j$ 번째 축차에 대하여 표시하면

$$\Delta U^{(j-1)\lambda + \Delta \lambda^{(j)}} = (K_T)^{-1}_{j-1} \cdot [(j-1)\lambda + \Delta \lambda^{(j)}] P_0 - F \quad (10)$$

이 된다. 기술의 편의를 위해

$$\Delta U_e^{(j)} = (K_T)^{-1}_{j-1} \cdot P_0 \quad (11)$$

$$\Delta U_r^{(j)} = (K_T)^{-1}_{j-1} \cdot (j-1)\lambda P_0 - F \quad (12)$$

라 정의한다. 단,  $\Delta U_e$ 은 외력에 의한 변위 증분 벡터이고  $\Delta U_r$ 은 잉여력(residual force)에 의한 변위 증분벡터를 나타낸다.

먼저  $m$  증분 단계의 첫 축차를 시행하기 전에 식(11)을 사용하여  $\Delta U_e^{(0)}$ 를 계산하고 일정 변위 증분 길이 ( $\Delta^m l$ )의 제한 조건을 적용한다.

$$\Delta U^{(0)r} \cdot \Delta U^{(0)} = \Delta^m l^2 \quad (13)$$

$$\text{단, } \Delta U^{(0)} = \Delta \lambda^{(0)} \Delta U_e^{(0)} \quad (14)$$

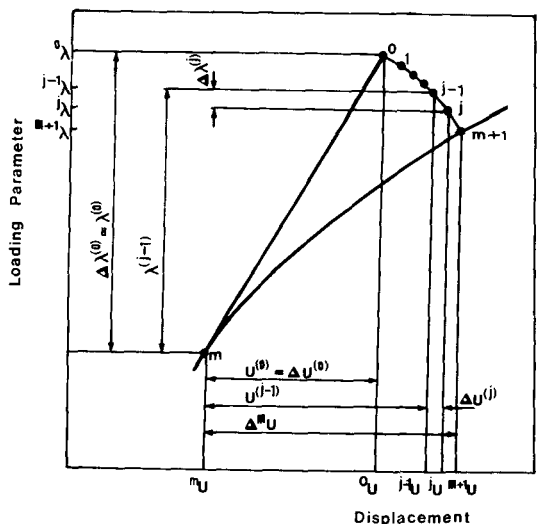


Fig. 1 Basic notation used in the discussion of solution procedures

식 (13), (14)로부터

$$\Delta\lambda^{(0)} = \pm \Delta^m l / \sqrt{\Delta U_e^{(0)T} \cdot \Delta U_e^{(0)}} \quad (15)$$

가 구해진다.

식 (15)의 부호를 결정하기 위하여 Crisfield<sup>(5)</sup>는 증분 강성 행렬식 값의 부호가 변하지 않으면  $\Delta\lambda^{(0)}$ 의 부호로서 전번 증분 단계의 부호를 계속 사용하고, 부호가 변하면  $\Delta\lambda^{(0)}$ 의 부호를 바꾸는 방안을 제시하였으나 다중음의 고유값 (multiple negative eigenvalue)을 가지는 구조물의 거동해석에는 잘 적용되지 않는다<sup>(3)</sup>. 또, Meek<sup>(3)</sup>는 증분 일, 즉

$$\Delta W = \Delta U^{(0)T} \cdot P_0 \quad (16)$$

의 값을 계산하여  $\Delta W$ 의 부호로써  $\Delta\lambda^{(0)}$ 의 부호를 결정하는 방법을 추천하였다. 그러나 이 방법을 사용하면 하중점의 하중 방향 변위의 변위 극한점 부근에서  $\Delta W$ 의 값이 거의 0가 되어 Round-off 오차의 영향으로 정확한 판별을 기대할 수 없다. 특히 스냅 백(snap back)이 발생하면 항상 틀린 부호를 결정하여 해를 전진시키지 못하는 문제점이 발생한다. 이러한 난점을 극복하기 위하여 본 논문에서는 전번 증분 단계의 변위 증분 벡터에 근거한 하중 증감 판정 방법을 제안한다. 즉,

$$\begin{aligned} \Delta^{m-1} U^T \cdot \Delta U_e^{(0)} \geq 0 \text{이면} \\ \text{Sign}(\Delta\lambda^{(0)}) = \text{Positive} \quad (17) \\ \Delta^{m-1} U^T \cdot \Delta U_e^{(0)} < 0 \text{이면} \\ \text{Sign}(\Delta\lambda^{(0)}) = \text{Negative} \end{aligned}$$

택한다. 이것은  $\Delta^{m-1} U$ 와  $\Delta U^{(0)}$ 가 평행 경로상에서 예각을 이루는 방향으로 진행되어야 함을 의미한다.

식 (10)에 식(11), (12)를 대입하면 축차 변위 증분 벡터  $\Delta U^{(j)}$ 는

$$\Delta U^{(j)} = \Delta\lambda^{(j)} \Delta U_e^{(j)} + \Delta U_f^{(j)} \quad (18)$$

로 표현되고, 이 때 변위 증분 벡터는

$$U^{(j)} = U^{(j-1)} + \Delta U^{(j)} \quad (19)$$

가 된다. 변위 증분 벡터의 크기를 일정하게 하는 구속 조건을 적용하면

$$U^{(j)T} \cdot U^{(j)} = \Delta^m l^2 \quad (20)$$

이 되고, 식(18), (19)을 식 (20)에 대입하여 정리하면 아래와 같다.

$$a_1 (\Delta\lambda^{(j)})^2 + a_2 (\Delta\lambda^{(j)}) + a_3 = 0 \quad (21)$$

여기서,

$$a_1 = \Delta U_e^{(j)T} \cdot \Delta U_e^{(j)} \quad (22)$$

$$a_2 = 2(U^{(j-1)} + \Delta U_f^{(j)})^T \cdot \Delta U_e^{(j)} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} a_3 = (U^{(j-1)} + \Delta U_f^{(j)})^T \\ \cdot (U^{(j-1)} + \Delta U_f^{(j)}) - \Delta^m l^2 \end{aligned} \quad (24)$$

식 (21)을 풀면 2개의 근이 구해지는데, 이 중에서  $U^{(j)T} \cdot U^{(j-1)}$ 의 값을 양으로 하는  $\Delta\lambda^{(j)}$ 을 택한다. 만약에 이것을 양으로하는 근이 없거나 두근 다 양을 만족하는 경우에는  $-a_3/a_2$ 에 가까운 값의 근을 택한다.  $\Delta\lambda^{(j)}$ 가 정해지면 식(18)에 의하여  $\Delta U^{(j)}$ 가 계산되고,

$${}^j \lambda = {}^{j-1} \lambda + \Delta\lambda^{(j)} \quad (25)$$

$${}^j U = {}^{j-1} U + \Delta U^{(j)} \quad (26)$$

구해진다. 축차 계산을 하는 동안에 구해진 변위가 해에 충분히 수렴하였는지 판정하여 축차 계산을 끝나게 해야 하는데, 본 논문에서는 최대 노름 (maximum norm) 판정법을 사용한다. 즉, 최대 노름을

$$\mu_j = \text{Max}_k \left\| \frac{\Delta U_k^{(j)}}{{}^j U_k} \right\| \quad (27)$$

단,  $k$ 는 구조물의 자유도임

이라고 나타낼 때

$$\mu_j \leq \text{TOL} \quad (28)$$

가 되면 수렴한 것으로 판정하는 방법이다. 경험적으로  $\text{TOL} = 10^{-3} \sim 10^{-5}$  정도면 무난하다. 각 증분 단계에서 수렴이 되면 다음 단계를 계속하게 되는데 이때 수렴에 소요되는 축차 횟수를 일정하게 해주기 위하여 축차수에 근거하여  $\Delta^m l$ 의 값을 조절하여 주어야 한다<sup>(6)</sup>. 현 증분 단계에서 수렴에 소요된 축차수를 나타내는 척도를  $J_{ref}$ 라 하고 수렴 되기를 바라는 축차 횟수를  $J_d$ 라 하면,

$$\Delta^{m+1} l = \Delta^m l \cdot \frac{J_d}{J_{ref}} \quad (29)$$

을 사용한다. 여기서  $J_d$ 는 입력으로 정하여 주어야 하며 경험적으로 3~6이면 무난하다. Crisfield는  $J_{ref}$ 로서  ${}^m J$ (현 단계에서 수렴하는데 소요된 축차횟수)를 사용하였는데 이 식은 기하학적 비선형이 심하거나 소성이 많이 발생하는 경우에는 수렴하는데 소요되는 축차 횟수가 균일하지 못하고 증분 단계의 수가 늘어나는 경향이 있다. 본 논문에서는 수렴되었을 때의  $\mu_j$  값과  $\text{TOL}$ 의 관계를 고려하여 다음식을 제안한다.

$$J_{ref} = {}^m J - 1 + \frac{[\log_{10}(\text{TOL}) - \log_{10}(\mu_{j-1})]}{[\log_{10}(\mu_j) - \log_{10}(\mu_{j-1})]} \quad (30)$$

이식을 사용하면 수렴에 소요되는 축차의 수가 균일해지고 증분 단계의 수가 감소하여 전체 해석 시

간을 줄일 수가 있다.

4. 전산 프로그램

구조물의 특성을 잘 알지 못하는 경우에는 첫 증분 단계에 필요한 변위 증분 길이( $\Delta^1 l$ )를 결정하여 입력하여 준다는 것이 매우 어려우므로 대개  $\Delta\lambda^{(0)}$ 를 입력하여 주고

$$\Delta^1 l = \Delta\lambda^{(0)} \sqrt{\Delta U_e^{(0)T} \cdot \Delta U_e^{(0)}} \quad (31)$$

을 사용한다. 그러나  $\Delta\lambda^{(0)}$ 의 값을 추정하기도 쉽지 않으므로 첫 증분 단계를 시작하기 전에 선형해석을 하고 이 결과를 이용하는 방법을 제안한다. 구조물의 비선형 요인으로는 대변형에 의한 기하학적 비선형, 재료의 비선형과 좌굴 거동에 의한 비선형 등이 중요하기 때문에, 이들을 이용하여  $\Delta\lambda^{(0)}$ 을 추정한다. 즉, 첫 증분단계의 하중을 가할 때 생기는 기하학적 변형을 제한하기 위하여

$$|x|_{max} \leq C_1 \quad (32)$$

또, 응력의 크기를 제한하기 위하여

$$\frac{|\sigma_{max}|}{\sigma_0} \leq C_2 \quad (33)$$

그리고, 선형 좌굴 하중의 크기를 고려하여

$$\left| \frac{\Delta\lambda^{(0)}}{\lambda_{cr}} \right| \leq C_3 \quad (34)$$

의 조건식을 도입한다. 여기서  $\sigma_0$ 는 항복 응력이고  $\lambda_{cr}$ 은 선형좌굴이 발생하는 하중 매개수이다. 여러 가지 유형의 문제를 해석하여 본 결과  $C_1 = \frac{1}{50}$ ,  $C_2 = \frac{1}{5}$ ,  $C_3 = \frac{1}{5}$  정도에서 잘 적용된다. 본 논문에서 개발한 프로그램의 언어는 FORTRAN IV이며, 계산에 사용한 컴퓨터는 PRIME 2655이다. 프로그램의 흐름도는 Fig. 2와 같고 각 모듈의 기능은 다음과 같다.

(1) DATMOD :

문제를 정의하기 위한 기하학적 자료, 하중조건, 경계조건, 재료의 성질등을 입력하고 여러가지 변수에 초기값을 부여한다.

(2) FREMOD :

선형 탄성 해석을 수행하여 선형 좌굴 하중과 절점 변위를 구하며 식 (32)~(34)를 각각 등식으로 풀어서 구한 세개의  $\Delta\lambda^{(0)}$  값중에서 최소의 것을 초기 하중 증분량( $\Delta\lambda^{(0)}$ )으로 결정하고, 식 (31)에 의하여  $\Delta^1 l$ 을 구한다. 만약 결정된  $\Delta\lambda^{(0)}$ 의 크기가 적절하지 못하면 BUCMOD에서 수치발산이 판정되고 CONMOD에서  $\Delta^1 l$ 을 반감시키는 시행착오

법을 사용하여 자동으로 수치해석이 시행되도록 한다.

(3) STRMOD :

식 (8)을 구성하고 식(11), (12)를 계산하여  $\Delta U_e^{(j)}$ ,  $\Delta U_f^{(j)}$ 를 구한다.

(4) BUCMOD :

각 증분 단계( $m$ )의 첫 축차를 시행하기 전에 식 (15), (17)에 의하여  $\Delta\lambda^{(0)}$ 를 구하고 축차 ( $j$ )중에는 식 (21)에 의하여  $\Delta\lambda^{(j)}$ 를 구한다. 식 (25)와 식 (18), (26)에 의하여  $^j\lambda$ ,  $^jU$ 를 계산하고 식 (27), (28)을 사용하여 수렴을 판정한다. 경험에 의하면  $\Delta^m l$ 의 값이 적절하지 않을 경우에는 축차를 계속하더라도 수렴되지 않으므로, 축차중에 수치 발산을 점검하는 것이 좋다. 축차 계산의 수가 미리 정해진 최대 축차수(8~10)을 초과하거나, 식 (21)이 허근을 가지거나, 축차 중에 구해진  $\Delta\lambda^{(j)}$ 가 발산하면 수치계산이 발산하는 것으로 판정한다.

(5) SAVMOD :

수렴이 판정되면 축차과정을 끝내고 변위, 응력, 소성발생에 대한 정보등을 기억시킨다. 계산의 종결에 대한 판단도 한다.

(6) RECMOD :

BUCMOD에서 발산이 판정되면 변위, 응력, 소성발생에 관한 정보 등을 전번 단계의 값으로 회복시킨다.

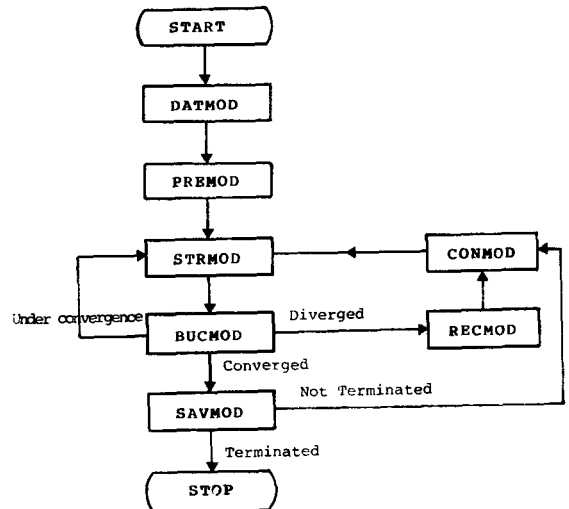


Fig. 2 Flow chart of program

(7) CONMOD :

수렴이 판정되면 식 (29), (30)에 의하여, 발산이 판정되면 반감시키는 방법에 의하여  $\Delta^m$ 을 조절하여 준다.

5. 예제 및 고찰

개발된 프로그램으로 외팔보의 순수 굽힘 해석, 보의 좌굴해석과 리(Lee)프레임의 스냅 백 현상 해석을 하여 이론이나 문헌에서 구한 결과와 비교하고, 본 논문에서 제안한 초기 하중 증분량의 결정, 하중 증감의 판정 방법, 변위 증분 길이의 예측 방법을 사용하였을 때의 수치 해석 거동과 효율에 대하여 고찰한다.

5.1 외팔보의 순수 굽힘 해석

Fig. 3은 탄성계수가 6.895GPa( $10^6$  psi)이고 부재의 단면적이 645.16mm<sup>2</sup>(1 in<sup>2</sup>), 단면 2차 모멘

트가 41.623mm<sup>4</sup>( $10^{-4}$ in<sup>4</sup>), 길이가 254mm(10in)인 외팔보의 자유단에 굽힘 모멘트를 가할 때 변형되는 형상을 이론해<sup>(10)</sup>로 구한 결과와, 이것을 5개의 요소로 나누어서 유한요소법으로 해석한 결과를 비교하여 그린 것이다. 여기서 이론해는 순수 굽힘 모멘트를 받는 균일 단면보의 변형 곡률이 일정함을 이용하여 구한다. 전체 외력의 20%를 초기 하중 증분량으로 가하면 하중을 반감시키는 시행 착오 방식에 의하여 6회의 착오단계를 거쳐서 타당한 초기 하중 증분량을 결정할 수 있으나 탄성 해석으로 구한 결과를 이용하여 구한 곡률의 크기를 1/50로 제한하였을 경우에는 시행 착오없이 3번의 축차 후에 수렴한다. 제안된 변위 증분길이의 예측방법을 사용하면 Table 2와 같이 계산시간이 31.08% 단축되었다.

변형된 보의 곡률이 증가됨에 따라 오차가 급격히 증가하는 양상을 나타내고 있는데, 이것은 Hermite보간으로 많이 변형된 요소 모양을 정확하

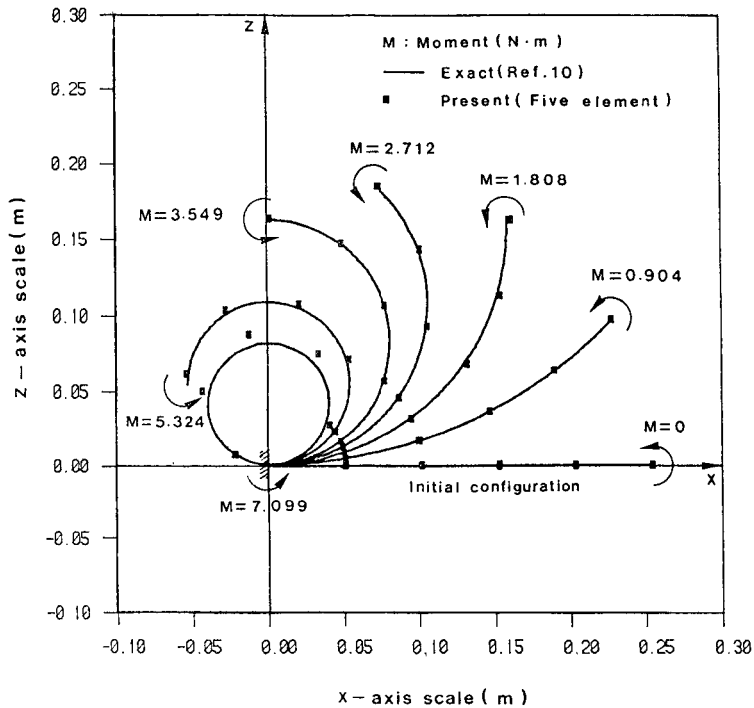


Fig. 3 Comparison of simulated and exact configurations of cantilever under pure moment

Table 2\* Comparison of numerical efficiency in two cases, crisfield and present

Problems	Total number of increment steps		Average number of iterations per one increment step		Computation time		Improvement %
	Crisfield	Present	Crisfield	Present	Crisfield	Present	
Prob. 1	96	62	3.8125	4.1774	160.15	110.37	31.08
Prob. 2	52	43	3.4231	3.4419	117.59	98.92	15.8
Prob. 3	156	80	3.8013	4.0125	578.26	301.56	47.50
Prob. 4	40	36	3.4000	3.3056	98.60	94.86	3.79
Prob. 5	65	45	3.9077	4.3778	228.36	175.80	22.97
Prob. 6	102	64	4.1373	4.3125	449.36	300.85	33.05

Prob. 1 : Pure bending analysis of the cantilever beam

Prob. 2 : Elastic post-buckling analysis of the simply supported beam

Prob. 3 : Elasto-plastic post-buckling analysis of the simply supported beam

Prob. 4 : Unloading analysis of simply supported beam in the elasto-plastic post-buckling region

Prob. 5 : Elastic analysis of Lee's frame

Prob. 6 : Elasto-plastic analysis of Lee's frame

\* Crisfield method : TOL=0.0005 ;  $J_d=4$

Present method : TOL=0.0005 ;  $J_d=3.7$

\*\* CPU time for the load-displacement curve obtained in each analysis

게나타내기가 어렵기 때문에 생각되며 요소의 수를 10개로 하여 해석하면 이론해와 매우 근접한 해 (7.099Nm의 굽힘 모멘트를 가했을 때도 0.03% 이하의 오차)를 얻을 수 있다.

## 5.2 보의 좌굴 해석

Fig. 4와 같이 압축력을 받는 단순 지지보에 대하여 탄성 좌굴 후 해석, 탄소성 좌굴 후 해석, 탄소성 좌굴 후 해중거동의 세 가지를 다룬다. 좌굴이 발생할 수 있도록 아주 작은 외란( $10^{-4}P$ )를 가한다. 여기서  $P$ 는 보의 축방향으로 작용하는 외력의 크기를 나타낸다. 유한 요소 모델에서 보의 단면적은  $645.16\text{mm}^2$  ( $1\text{ in}^2$ ), 보의 단면 2차 모멘트는

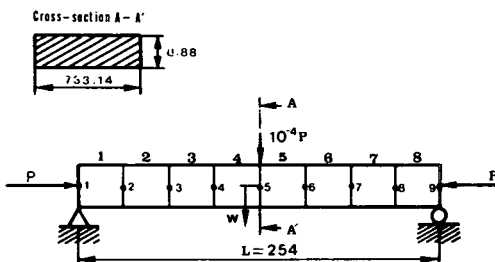


Fig. 4 Simply supported beam and mesh used (dimensions in mm.)

$41.623\text{mm}^4$  ( $10^{-4}\text{ in}^4$ ), 길이가  $254\text{mm}$  ( $10\text{ in}$ )이고 재료의 탄성 계수는  $6.895\text{GPa}$  ( $10^6\text{ psi}$ )이며 kinematic hardening model에서  $E_H=689.5\text{MPa}$  ( $10^5\text{ psi}$ )  $\sigma_0=10.687\text{MPa}$  ( $1550\text{ psi}$ ),  $\sigma_H=11.066\text{MPa}$  ( $1605\text{ psi}$ ),  $\epsilon_H=1.65 \times 10^{-3}$ 이고, 사용된 요소의 수는 8개이다. 또한 소성의 발생을 점검하기 위하여 보의 높이 방향으로 9개의 층으로 나눈 모형을 사용하며, 사용된 탄소성 재료에 대한 입력 값들은 소성 변형이 발생되기 전에 상당히 큰 처짐이 발생할 수 있도록 하기 위하여 가정된 값들이다.

Fig. 5는 앞에서 언급한 세가지 경우에 대하여 하중과 처짐 관계를 선형 좌굴하중과 보의 길이로써 무차원화하여 참고문헌 (4)의 결과\*나 압축력에 의한 보의 길이 변화를 무시하고 구한  $Elastica^{(11)}$ 와 비교한 것이다. 탄성 좌굴 하중을  $P_{cr}$ 로 표현하였고 본 예제의 경우  $43.9\text{N}$ 이다. 탄성 좌굴 후 해석 도중에  $P/P_{cr}$ 의 값이 2정도가 될 때 강성행렬의 값이 음이 되는데, 이 부호로써 하중 증감의 부호를 결정하면 더 이상 하중이 증가되지 않으므로 계속 해를 구할 수가 없다. 그러나 이 경우에 증분 일이나 본 논문에서 제안한 변위 증분 벡터에 근거한 하중 증감 판정 방법을 사용하면 끝까지 해를 구할 수 있다. 또한 초기 하중 증분량을  $P_{cr}$ 의 20%로 제한하여 주면 수렴의 실패없이 4번 측차후



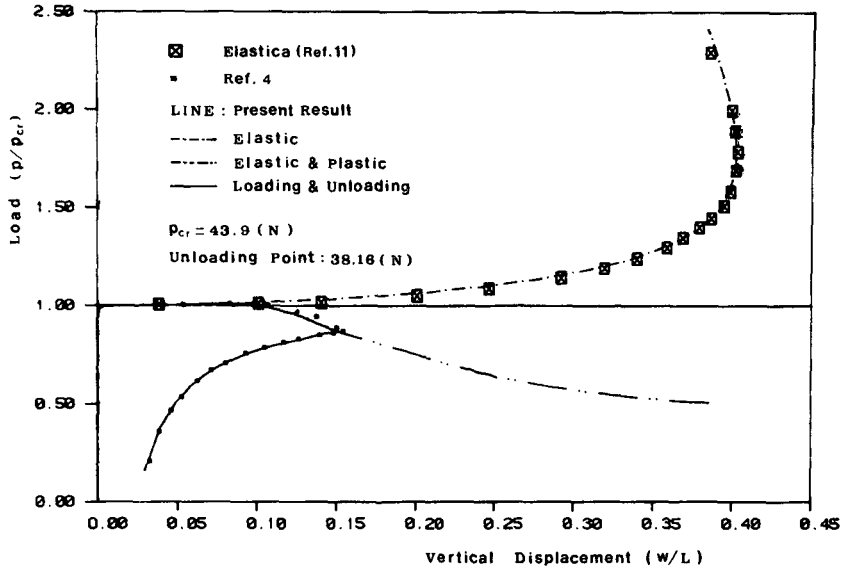


Fig. 5 Center point displacement for beam buckling

에 수렴하고, 제안된 변위 증분 길이의 예측방법을 사용하면 Table 2와 같이 탄성좌굴 후 해석, 탄소성 좌굴 후 해석과 탄소성 해중 해석에 대하여, 각각 15.8%, 47.5%, 3.79%의 계산시간이 단축되었다. 세번째 해석의 경우를 보면 비선형이 심하게 발생하지 않은 경우에는 별로 효율이 증가되지 않음을 알 수 있다.

### 5.3 리 프레임의 해석

Fig. 6에 나타나 있는 리 프레임에 대하여 탄성 해석과 탄소성 해석을 하여 스냅 백 현상을 잘 해석할 수 있음을 보인다. 이 해석에 사용된 요소의

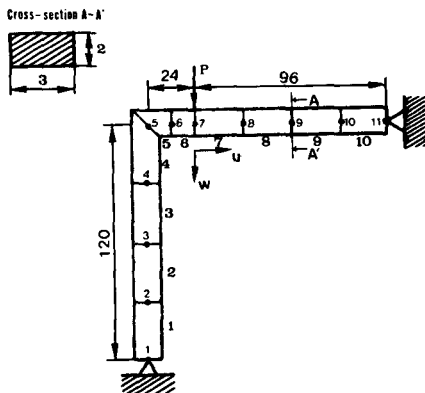


Fig. 6 Lee's frame and mesh used. (dimensions in cm.)

수는 10개이며, 보의 단면적은  $6\text{cm}^2$ , 보의 단면 2차 모멘트는  $2\text{cm}^4$ 이고 재료의 탄성 계수는  $720\text{t/cm}^2$ 이며 kinematic hardening model에서  $E_H = 72\text{t/cm}^2$ ,  $\sigma_0 = 10\text{t/cm}^2$ ,  $\sigma_H = 10.44\text{t/cm}^2$ ,  $\epsilon_H = 0.015$ 이다. 소성 발생을 점검하기 위하여 나눈 층의 수는 7개이다.

Fig. 7은 현재의 해석 결과와 참고문헌 (4)의 해석 결과\*\*를 함께 그린 것이다. 이 예제에 대하여 증분일을 사용하여 하중 증감의 부호를 결정하는 경우에는 하중점의 처짐 방향 자유도가 스냅 백을 하는 부분에서는 증분일의 값이 양이 되기 때문에 반대의 부호를 결정하게 되어 평형 경로를 따라 계속해서 해를 구할 수 없게 된다. 그러나 이 경우 강성 행렬의 값이나 제안된 변위 증분벡터에 근거한 하중 증감 판정 방법을 사용하면 끝까지 안정되게 수치해를 구할 수 있다. 선형 탄성 해석에 의하여 항복 응력이 발생하는 하중의 20%를 초기 하중 증분량으로 주면 수렴 실패없이 4회의 축차 후에 수렴하고 제안된 변위 증분 길이 예측 방법을 사용하면 Table 2와 같이 탄성 해석과 탄소성 해석에 대하여 각각 22.79%, 30.05%의 계산시간이 단축되었다.

\*\*\* 참고문헌 (4)의 결과를 복사하여 본 논문에 수록한 것이다.

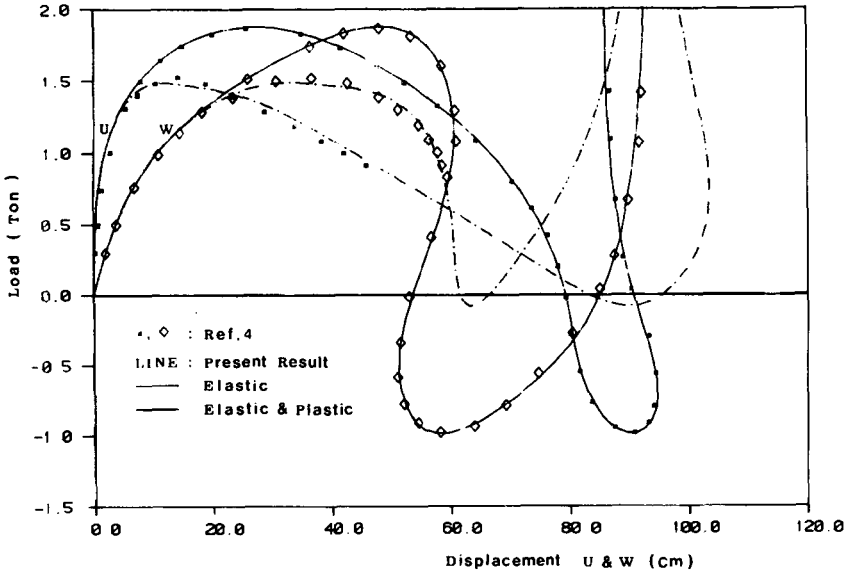


Fig. 7 Load point displacements for Lee's frame

6. 결 론

비선형 유한요소법을 사용하여 굽힘 변형과 압축 변형의 복합성, 대변형과 대변위에 의한 기하학적 비선형성, 재료의 비선형성 등을 고려하여 평면 프레임 구조의 비선형 거동 해석을 효과적으로 할 수 있었다. 탄성 또는 탄소성 영역에서 구조의 좌굴후 해석을 수행할 수 있게 하기 위하여 Newton-Raphson 축차 방법과 Crisfield의 일정 변위 증분 방법을 결합한 증분 축차 계산법을 사용하였으며 계산의 효율을 향상시키고 수치적 안정성과 사용자의 편의를 제고시키기 위하여 선형 탄성 거동을 이용한 초기 하중 증분량의 결정 방법, 하중의 증감 판정 방법, 변위 증분 길이의 예측 방법을 제안하였다. 선형 탄성 해석의 결과를 사용하여 각 적분점의 곡률 크기와 응력 크기를 제한하는 조건과 선형 좌굴 하중의 크기를 고려하는 조건으로 구성된 초기 하중 증분량의 결정 방법은 불필요한 시행 착오를 방지하여 계산 효율과 사용자의 편의를 증대시켰을 뿐만 아니라 비선형 프레임 구조물의 최적 설계 문제와 같이 비선형 구조 해석의 초기 하중 증분량을 자동으로 결정하게 할 필요가 있는 경우에는 유용하게 사용될 수 있을 것이다. 보의 좌굴 해석과 리 프레임의 해석에서 검토 하였듯이 변위

증분 벡터에 근거한 하중 증감 판정 방법은 매우 안정되게 수치 해석을 할 수 있는 판정 조건이었으며, 제안된 변위 증분 길이의 예측 방법은 수렴에 소요되는 축차의 수를 균일하게 하고 증분 단계의 수를 감소시켜 전체해석 시간을 줄여 주는 효과가 있다.

참 고 문 헌

- (1) Bathe, K.J. and Bolourchi, S., 1979, "Large Displacement Analysis of Three Dimensional Beam Structures", *Int. J. Num. in Eng.*, Vol. 14, pp. 961~986.
- (2) Bathe, K.J. and Cimento, A.P., 1980, "Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations", *Computer Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 22, pp. 59~85.
- (3) Meek, J. L. and Tan, H.S., 1984, "Geometrically Nonlinear Analysis of Space Frame by an Incremental Iterative Technique", *Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 47, pp. 261~282.
- (4) Cichon, C., 1984, "Large Displacements in-plane Analysis of Elastic-plastic Frames", *Computer & Structures*, Vol. 19, pp. 737~745.
- (5) Crisfield, M.A., 1981, "A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles Snap-through", *Computer & Structures*, Vol. 13, pp. 55

~62.

- (6) Owen, D.R.J. and Hinton, E., 1980, *Finite Elements in Plasticity*, Pineridge Press.
- (7) Bergan, P.G., Horrigmoe, G. Krakeland, B. and Soreide, T.H., 1978, "Solution Techniques for Non-linear Finite Element Problems", *Int. J. Num. Mech. Eng.*, Vol. 12, pp. 1677~1696.
- (8) Batoz, J.L. and Dhatt, G., 1979, "Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems", *Int. Num. Meth. Eng.*, Vol. 14, pp. 1262~1267.
- (9) Riks, E., 1979, "An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems", *Int. J. Solid and Struct.*, Vol. 15, pp. 529~551.
- (10) Crandall, S.H., Dahl, N.C. and Lardner, T.J. 1978, "An Introduction to The Mechanics of Solids", McGraw-Hill.
- (11) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., 1961, "The Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill.