

<論 文>

# 유한요소법을 이용한 정방형밀폐용기내의 플란틀수가 낮은 유체의 자연대류에 관한 연구

김무현\* · 이진호\*\* · 강신형\*\*\* · 손영석\*\*\*\*

(1988년 1월 6일 접수)

## Finite Element Analysis of Natural Convection of Fluids with Low Prandtl Number in a Square Enclosure

Moo-Hyun Kim, Jinho Lee, Shin-Hyung Kang and Young-Seok Son

**Key Words :** Natural Convection(자연대류), Square Enclosure(정방형 밀폐용기), Stream Function Vorticity Model(유동함수-와도 모델), Low Prandtl Number(낮은 Prandtl수), Nusselt Number(Nusselt수)

### Abstract

Natural convection in a square enclosure was investigated numerically for low prandtl number fluids using Finite Element Method. In case of  $Ra=10^4$ ,  $10^5$  and  $10^6$  the temperature gradient decreases gradually at the lower end of the hot wall(or at the upper end of the cold wall) as prandtl number decreases in the range of  $0.01 \leq Pr \leq 10$ . Maximum heat transfer occurs at a somewhat higher point from the lower end of hot wall(or at somewhat lower point from the upper end of the cold wall) and it draws near to the lower end of the hot wall(or draws near to the upper end of the cold wall) with increasing prandtl number at a fixed Rayleigh number and with increasing Rayleigh at a fixed Prandtl number. The flow in the enclosure appears as an Unicell Pattern for  $Ra \leq 10^4$  and secondary flows(or tertiary flows) appears in the core region for  $Ra \geq 10^5$ . The line joining the center of secondary cells skews in a clockwise direction as the Prandtl number decreases.

### 기 호 설 명

[A] : 계수행렬 (coefficient matrix)  
 {B} : Forcing벡터  
 [C] : 계수행렬  
 g : 중력가속도  
 H : 밀폐용기 높이  
 h : 대류열전달계수

[K] : 계수행렬  
 k : 열전도율  
 L : 밀폐용기 폭  
 [M] : 계수행렬  
 $N_j$  : 형태함수 (shape function)  
 Nu : 국소 Nusselt수,  $hH/k$   
 $\bar{Nu}$  : 평균 Nusselt수  
 n : 수직방향  
 P : 압력  
 Pr : Prandtl수,  $\nu/\alpha$   
 $qw''$  : 벽면에서의 열유속

\* 정회원, 울산대학교 공과대학 기계공학과

\*\* 정회원, 연세대학교 공과대학 기계공학과

\*\*\* 연세대학교 대학원

\*\*\*\* 한국에너지연구소 계통안전연구소

$Ra$	: Rayleigh수, $g\beta(T_H - T_C)H^3/\alpha\nu$
$T$	: 온도
$T_C$	: 저온수직벽 온도
$T_H$	: 고온수직벽 온도
$T_o$	: 기준온도, $(T_H + T_C)/2$
$U$	: $X$ -방향 속도
$u$	: $X$ -방향 무차원속도
$V$	: $Y$ -방향 속도
$v$	: $Y$ -방향 무차원속도
$W_i$	: Weighting함수
$X$	: 수평좌표축
$x$	: 무차원수평좌표축
$Y$	: 수직좌표축
$y$	: 무차원수직좌표축

#### 그리이스 문자

$\alpha$	: 열확산계수
$\beta$	: 체적팽창계수
$\Gamma^e$	: 요소경계 (boundary of element)
$\epsilon$	: 여유 (tolerance)
$\theta$	: 무차원온도, $(T - T_o)/(T_H - T_C)$
$\nu$	: 동점성계수
$\rho$	: 밀도
$\phi$	: 물리적 대표량
$\Psi$	: 유동함수
$\psi$	: 무차원유동함수
$\Omega$	: 와도
$\Omega^e$	: 요소의 영역 (domain in element level)
$\omega$	: 무차원와도

## 1. 서 론

밀폐용기내의 자연대류는 건물의 단열, 원자로설비, 결정성장, 환경공학 및 지구물리학등에 광범위하게 관련되어 지난 20여년간 많은 연구와 관심의 대상이 되어왔다. 그러나 밀폐용기내의 자연대류는 기하학적 형태나 경계조건에 매우 민감하고 또한 기본방정식이 비선형적이며 서로 연관(coupling)되어 있기 때문에 이론적 및 실험적 연구가 상당히 어렵고 제한적이다<sup>(1)</sup>. 특히 밀폐용기내에 경계층흐름이 존재하는 경우 이 경계층흐름은 일반적인 외적 문제(external problem)에서의 경계층흐름과는 달리 그 경계층흐름이 코어영역에서의 흐름과 서로 밀접하게 관련되므로 코어형상(core configura-

tion)을 주어진 물리적 조건으로부터 미리 예측하기가 매우 어렵다<sup>(2)</sup>.

밀폐용기내의 자연대류에 관한 대부분의 이론적 연구결과들<sup>(3~6)</sup>은 각자 특정한 가정 및 경계조건으로부터 비선형의 기본방정식을 단순화하여 근사적으로 직각 밀폐용기내의 온도장 및 유동장의 해를 얻었다. 그러나 실제로 직각밀폐용기내의 온도 및 유동현상은 경계조건, 밀폐용기의 기하학적 형태, 용기내의 유체의 종류 및 이에 부여되는 물리적 변수들에 따라 매우 민감하고 복잡한 형태로 나타났다. 즉 실험적 연구<sup>(7~11)</sup>와 수치적 연구결과<sup>(12~15)</sup>에 의하면 경계층흐름인 경우 용기내에는 이차흐름(secondary flow) 및 삼차흐름(tertiary flow)에 의한 국소적인 반류(back flow)현상과 정체흐름(stagnant flow)등이 나타났는데 이런 현상은 밀폐용기내 유동장 뿐 아니라 온도장의 해석을 매우 어렵게하는 요소들이다. 이러한 이유로 인하여 최근의 직각밀폐용기내의 자연대류에 관한 연구들은 다양한 경계조건 부여 및 용기의 기하학적 형태의 변화에 따른 유동 및 열전달특성을 실험 또는 수치해석적으로 구하여왔다. 그러나 이들연구는 물리적 변수로서 Rayleigh수와 종횡비(Aspect ratio : 용기의 폭에 대한 높이의 비)에 관해서는 비교적 상세히 연구하였으나 Prandtl수에 따른 유동 및 열전달특성에 대해서는 Graebel<sup>(16)</sup>과 Shembharkar등<sup>(17)</sup>의 연구외에는 아직 미흡한 상태이다.

일반적으로 직각밀폐용기에 관한 수치해석은 그 경계면의 단순함 때문에 유한차분법이 널리 적용되어왔다. 그러나 Rayleigh수가 충분히 커서 용기내의 수직 및 수평경계면근처에 경계층흐름이 존재하는 경우 정확하고 효율적인 해를 얻기 위해서 비균일한(Non-uniform) 격자 조직형태를 취하게 되면 서부터 유한요소법의 적용이 활발하기 시작하였다. 유한요소법을 이용한 직각밀폐용기에 관한 수치해석은 1977년 Tabarrok과 Lin<sup>(18)</sup>에 의해 본격적으로 시도된 이후 많은 연구가 이루어졌으며 최근 De Vahl Davis와 Jones<sup>(19)</sup>은 정방형일 때의 연구결과들을 비교, 정리하였다. 유한요소 해석모델은 유동함수-와도모델<sup>(20)</sup>, 페널티함수(Penalty-Function)모델<sup>(21)</sup> 그리고 원시변수(Primitive Variable)모델<sup>(22)</sup>이 있으나 Reddy등<sup>(23)</sup>과 손<sup>(24)</sup>의 연구결과에 의하면 이들중 유동함수-와도모델이 평균 Nusselt수를 구하는 데 있어 더 정확한 것으로 지적된 바 있다. 수평경계면이 단일인 정방형밀폐용

기내 자연대류에 관한 유한요소법에 의한 대부분의 연구들도 전술한 바와 같이 물리적 변수로서 Rayleigh수에 관해서 상세히 연구하였으나 Prandtl수에 관해서는 Reddy와 Satake<sup>(23)</sup>가  $Ra=10^3$  및  $10^4$  일 때  $Pr=10^2$  및  $10^{-2}$  인 경우 비교적 상세히 유동장과 온도장에 대해 연구하였을 뿐이며 Rayleigh수가  $10^4$  보다 커서 용기내에 경계층흐름이 존재할 때 자세한 Prandtl수의 영향 특히 낮은 Prandtl수의 영향에 대해서는 연구되지 않고 있다.

본 연구에서는 수평경계면이 단열이고 수직경계면이 서로 다른 온도로 유지되고있는 정방형밀폐용기내의 자연대류에 관해 유동함수-와도모형을 이용한 유한요소법을 통해 특히 낮은 Prandtl수의 영향에 중점을 두어 경계층흐름이 존재할 때의 유동 및 열전달특성을 조사하였다.

## 2. 이 론

Fig. 1과 같은 2차원 정방형밀폐용기내의 양단의 온도차이로 인한 층류 자연대류흐름에 대해 Boussinesq근사를 적용한 기본방정식을 유동함수 및 와도로 표시하면 다음과 같다<sup>(25)</sup>.

$$\nu \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \right) + g\beta \frac{\partial T}{\partial X} = 0 \quad (1)$$

$$\alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right) - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial T}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial T}{\partial Y} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} + \Omega = 0 \quad (3)$$

여기서 유동함수  $\Psi$  및 와도  $\Omega$ 는

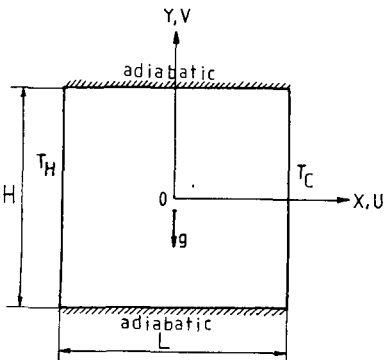


Fig. 1 Coordinate system of the problem

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (4)$$

$$\Omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \quad (5)$$

로 정의되며  $U$  및  $V$ 는 각각 수평 및 수직방향속도를 나타낸다.

### 2.1 기본방정식의 무차원화

기본방정식을 무차원화하기 위해 다음과 같은 무차원변수들을 도입한다.

$$x = \frac{X}{H}, \quad y = \frac{Y}{H}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_H - T_C}, \quad \psi = \frac{\Psi}{\alpha} \\ \omega = \frac{\Omega H^2}{\alpha}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Ra = \frac{g\beta(T_H - T_C)H^3}{\alpha\nu} \quad (6)$$

위의 무차원변수로 식(1)~(3)을 무차원화하면 다음의 식과 경계조건을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \omega = 0 \quad (9)$$

$x = -0.5$ 에서

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \theta = 0.5, \quad \omega_w = -\frac{2\psi_i}{(\Delta n)^2}$$

$x = 0.5$ 에서

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \theta = -0.5, \quad \omega_w = -\frac{2\psi_i}{(\Delta n)^2}$$

$y = -0.5$ 에서

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \omega_w = -\frac{2\psi_i}{(\Delta n)^2} \quad (10)$$

$y = 0.5$ 에서

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \omega_w = -\frac{2\psi_i}{(\Delta n)^2}$$

식(10)에서  $\Delta n$ 은 벽면으로부터의 수직거리, 첨자  $w$ 는 벽에서의 조건을 의미하고 와도경계조건은 Taylor급수전개에서 3차항 이상을 무시한 후 벽면에서의 조건  $\psi_w = 0, \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_w = 0$  및  $\omega_w = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} \Big|_w$ 를 적용해서 얻어진 것이다.

### 2.2 유한요소법의 적용

온도, 와도 그리고 유동함수의 근사해를 각각  $\hat{\theta}, \hat{\omega}, \hat{\psi}$ 로 놓으면 이들 근사해는 다음과 같이 가

정할 수 있다<sup>(26)</sup>.

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(x,y) &= \sum_{j=1}^n N_j(x,y)\theta_j \\ \hat{\omega}(x,y) &= \sum_{j=1}^n N_j(x,y)\omega_j \\ \hat{\psi}(x,y) &= \sum_{j=1}^n N_j(x,y)\psi_j \end{aligned} \quad (11)$$

여기서  $n$ 은 한 요소내의 격자점의 수를 나타내고  $N_j$ 는 형태함수(shape function)이다. 본 연구에서는 Galerkin방법을 적용, Weighting함수  $W_i$ 를 형태함수로 취하고 무차원방정식(7)~(9)에 Weighted Residual방법과 Green정리를 적용한 후 식(11)을 대입하여 행렬식형태로 나타내면 다음과 같은 유한요소방정식을 얻는다.

$$[K]\{\theta\} + [A(\psi, \theta)] = \{B(\theta_n)\} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} [K]\{\omega\} + \frac{1}{Pr}[A(\psi, \omega)] - Ra[C]\{\theta\} \\ = \{B(\omega_n)\} \end{aligned} \quad (13)$$

$$[K]\{\psi\} - [M]\{\omega\} = \{B(\psi_n)\} \quad (14)$$

여기서

$$[A] = \int_{\Omega^e} W_i \left( \frac{\partial N_k}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} - \frac{\partial N_k}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega^e$$

$$[C] = \int_{\Omega^e} W_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega^e$$

$$[K] = \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega^e$$

$$[M] = \int_{\Omega^e} W_i N_j d\Omega^e$$

$$\{B(\phi)\} = \int_{\Gamma^e} W_i \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma^e$$

### 2.3 속도 및 Nusselt수 계산

무차원속도분포는 속도와 유동함수의 관계식,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (15)$$

로부터 중앙차분근사(central difference approximation)를 적용하여 다음과 같이 구하였다.

$$u_i = \frac{\psi_{i+1} - \psi_{i-1}}{y_{i+1} - y_{i-1}}, \quad v_i = \frac{\psi_{i-1} - \psi_{i+1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (16)$$

한편 왼쪽 벽면에서의 열유속을

$$q''_w = -k \frac{\partial T}{\partial X} \Big|_{x=-0.5} = h(T_H - T_C) \quad (17)$$

와 같이 나타낼 때 Nusselt수는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} Nu = \frac{hH}{k} = -\frac{H}{T_H - T_C} \frac{\partial T}{\partial X} \Big|_{x=-0.5} \\ = -\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=-0.5} \end{aligned} \quad (18)$$

식(18)에 3점전진차분근사(3-point forward difference approximation)를 적용하면

$$Nu = \frac{3\theta_i - 4\theta_{i+1} + \theta_{i+2}}{x_{i+2} - x_i} \quad (19)$$

를 얻으며 평균Nusselt수는 다음과 같이 구한다.

$$\bar{Nu} = -\int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=-0.5} dy \quad (20)$$

### 2.4 수치계산방법

본 문제는 기본방정식이 비선형적이고 서로 연관되어 있기 때문에 보다 효율적인 수치계산방법이 필요하다. 수치계산방법으로는 Simultaneous Approach, Segregated Approach 그리고 Modified Segregated Approach 등<sup>(20)</sup>이 있다. Segregated Approach방법은 Rayleigh수가 높아지면 수렴이 어려운 단점이 있으므로 본 연구에서는 Simultaneous Approach(S.A.) 방법과 Modified Segregated Approach(M.S.A.)방법을 함께 사용한 결과 M.S.A. 방법이 S.A.방법보다 수렴기준을 더 빨리 만족시킴을 확인하였기 때문에<sup>(20,25)</sup> M.S.A.방법을 적용하였다. M.S.A. 방법은 기본방정식을 공식화하여 행렬식형태로 나타낸 식(12~14)를 다음과 같이 변형한다.

$$[K + A(\bar{\psi})]\{\theta\} = \{B(\theta_n)\} \quad (21)$$

$$\left[ K + \frac{1}{Pr} A(\psi) \right] \{\omega\} = Ra[C(\bar{\theta})] + \{B(\omega_n)\} \quad (22)$$

$$[K]\{\psi\} = [M]\{\bar{\omega}\} + \{B(\psi_n)\} \quad (23)$$

여기서 “-”로 표시된 값은 바로 전 반복계산(iteration)에서 구하여 알고 있는 값을 나타낸다. 풀이방법은 초기유동함수값을 가정하여 식(21)을 풀어 온도분포를 구한다. 여기서 구한 온도분포와 초기유동함수값을 식(22)에 대입하여 이로부터 와도를 구하고 이 와도를 식(23)에 대입하여 개선된 유동함수를 구한다. 이렇게하여 구한 유동함수를 다시 식(21)에 대입하여 개선된 온도분포를 구한다. 이러한 반복계산과정을 수렴기준이 만족될 때까지 반복하여 해를 구한다. 이때 수렴기준은

$$\left| \frac{\phi^n - \phi^{n-1}}{\phi_{\max}} \right| < \varepsilon \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (24)$$

이고  $\phi$ 는  $\theta, \omega$  및  $\psi$ 를 나타내며  $\varepsilon$ 은 온도, 와도 및 유동함수에 따라 다르나 0.01~0.05의 값으로 하였다. 한편 요소형태는 사각형이며 벽면근처에서는 작게, 코어영역에서는 크게 취하는 비균일한 격자조직을 택하였고 격자조직수는  $Ra$ 수가  $10^4$ 이하

일 때  $17 \times 17, 10^5$  이상일 때  $19 \times 19$ 로 하였다.

### 3. 결과 및 고찰

일반적으로 정방형밀폐용기내 자연대류 유동은 Rayleigh수가  $10^4$ 보다 크면 경계층흐름으로 나타난다<sup>(22,24)</sup>. 따라서 본 연구의 수치계산은 Rayleigh수  $10^3 \sim 10^6$ 범위에서 행하여 경계층흐름의 유동 및 열전달 특성을 조사하였다. Prandtl수는 10이상에서는 Pr수의 변화가 열전달특성에 거의 영향을 미치지

않으므로<sup>(14,27)</sup> Pr수는 0.01~10까지 변화시켜가며 계산하였다.

본 연구에 사용된 프로그램 및 결과의 타당성을 검토하기 위하여 Table 1 및 Fig. 2에 본 연구에서 구한 평균 Nusselt수를 다른 연구자들의 결과와 비교하였다. 비교 결과 3.5% 이내의 오차를 나타내었다. 또 Table 2에서 보는 바와 같이  $Pr=0.71$ 인 경우 중앙유동함수값과 최대유동함수값을 비교하였으며 그 결과 최대오차는 4.5%로 나타났다. 따라서 본 수치해석결과가 다른 연구자들의 결과와 비

Table 1 Comparison of average nusselt number with previous results

$Ra$ $Pr$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
0.01	1.104(P) 1.072(T) 1.258(R)	1.992(P) 1.975(S) 1.999(R)	3.931(P)	6.779(P)
0.1	1.129(P) 1.126(T) 1.137(R)	2.179(P) 2.215(T) 2.032(R)	4.374(P)	7.901(P)
0.71	1.132(P), 1.116(S) 1.136(T), 1.117(B) 1.139(R)	2.301(P), 2.241(S) 2.418(T), 2.236(B) 2.396(R)	4.486(P), 4.497(S) 4.77 (M) 4.489(B)	8.859(P), 8.767(S) 8.93 (M) 8.827(B)
10	1.135(P) 1.114(T) 1.139(R)	2.378(P) 2.444(T) 2.414(R)	4.711(P)	9.19(P)

(P) : Present, (T) : Taylor<sup>(22)</sup>, (R) : Reddy<sup>(23)</sup>, (M) : Marshall<sup>(21)</sup>,  
(S) : Stevens<sup>(20)</sup>, (B) : Betts<sup>(28)</sup>

Table 2 Comparison of Central and Maximum Stream Function with Previous results for  $Pr=0.71$

$Ra$	$Pr$		0.71			
	$\psi_c$	$\psi_m$				
$10^3$	$\psi_c$	1.19(P)	1.18(M)	.	1.18(B)	1.16(R)
	$\psi_m$	1.19(P)	1.18(M)	.	1.18(B)	1.16(R)
$10^4$	$\psi_c$	5.15(P)	5.12(M)	5.18(S)	.	5.15(R)
	$\psi_m$	5.15(P)	5.12(M)	5.18(S)	.	5.15(R)
$10^5$	$\psi_c$	9.19(P)	9.54(M)	9.11(S)	9.21(B)	.
	$\psi_m$	9.43(P)	.	9.64(S)	9.52(B)	.
$10^6$	$\psi_c$	17.1 (P)	17.32(M)	17.6 (S)	16.22(B)	.
	$\psi_m$	17.4 (P)	.	18.1 (S)	18.3 (B)	.

(P) : Present, (M) : Marshall<sup>(21)</sup>, (S) : Stevens<sup>(20)</sup>  
(B) : Betts<sup>(28)</sup>, (R) : Reddy<sup>(23)</sup>

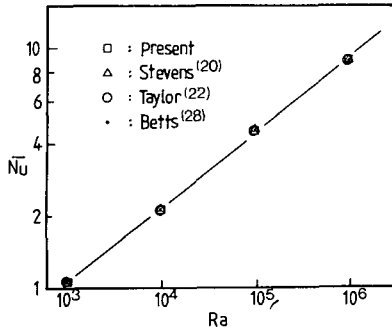


Fig. 2 Average Nusselt number for  $Pr=0.71$

교적 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다.

Fig. 3은 Rayleigh수가  $10^5$ 일 때 네가지  $Pr$ 수의 경우, 각  $Pr$ 수에 따른 등온선, 유선 그리고 등와도선을 나타내고 있다. 그림에서 모든 직각밀폐용기는 왼쪽 면이 고온벽이고 오른쪽 면은 저온벽이다. 등온선의 분포는 모든  $Pr$ 수의 경우 수직경계면근처의 열경계층영역과 그 바깥의 성층화된 온도 분포의 코어영역으로 나타났다.  $Pr$ 수의 변화에 따른 영향은  $Pr$ 수가 낮아질수록 경계층의 두께는 증가하며 고온벽면하단부(혹은 저온벽면상단부)에서의 온도구배는 점점 작아지고 있다. 이러한 경향은  $Ra$ 수가  $10^6$ 인 경우 더욱 뚜렷이 나타났다. 또한 코어영역에서  $Pr$ 수가 10인 경우 온도분포가 수직방향으로 고르게 성층화되었으나  $Pr$ 수가 낮아질수록 온도의 성층화정도가 감소함을 알 수 있었다. 유동장의 경우 타 연구자의 결과<sup>(23)</sup>와 같이 이차흐름이 관찰되었으며 이차흐름의 형태는  $Pr$ 수가 낮을수록 비(非)원형이며 그 위치는  $Pr$ 수가 10인 경우 두 셀의 중심을 잇는 축이 거의 수평을 유지하나  $Pr$ 수가 낮아질수록 축은 시계방향으로 회전하여 대각선으로 나타났다. 이와 관련하여 주흐름의 유선형태는  $Pr$ 수가 낮을수록 대각선에 관해 대칭형태로 나타났다. 그러나  $Ra$ 수가  $10^3$  및  $10^4$ 인 경우 이와같은 이차흐름은 관찰되지 않았으며  $Ra$ 수가  $10^6$ 인 경우는 코어에서 미세한 삼차흐름도 관찰되었다. 등와도선은 그림에서 보듯이 와도가 0인 선을 경계로하여 벽면쪽에는 양의 값을, 코어영역에서는 음의 값을 나타내었다. 음의 값은 유선의 회전방향과 유체입자의 회전방향이 같음을 의미하며 수직벽면의 매우 큰 와도 구배로부터 경계층흐름이 뚜렷이 발달한 것을 알 수 있다.

Fig. 4와 Fig. 5는  $Ra$ 수  $10^3 \sim 10^6$ 에서  $Pr$ 수 및

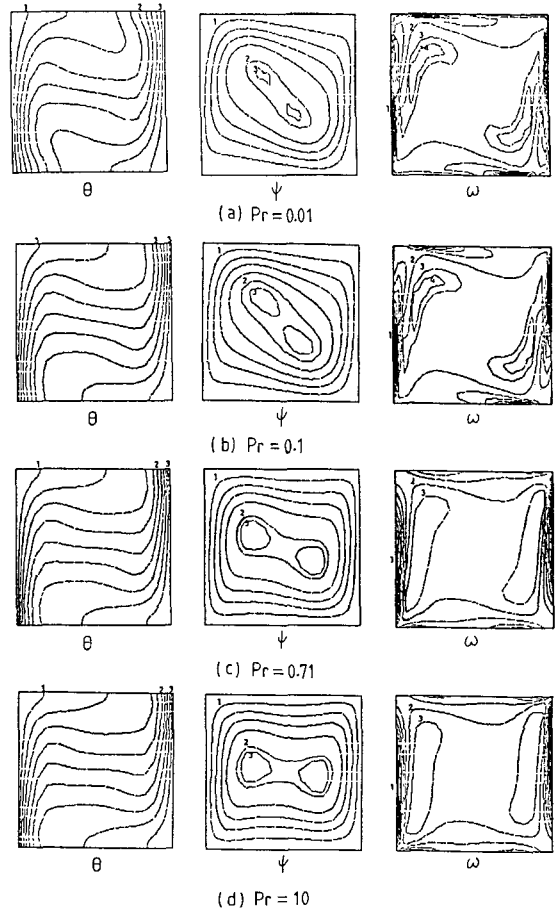


Fig. 3 Isothermal lines, stream lines and equi-vorticity lines for  $Ra=10^5$

- (a)  $\theta$  : 1 : 0.4, 2 : 0, 3 : -0.4  
 $\psi$  : 1 : -1.0, 2 : -9.0, 3 : -9.1  
 $\omega$  : 1 : 2100, 2 : 0, 3 : -300, 4 : -600
- (b)  $\theta$  : 1 : 0.4, 2 : 0, 3 : -0.4  
 $\psi$  : 1 : -1.0, 2 : -9.0, 3 : -9.3  
 $\omega$  : 1 : 2100, 2 : 0, 3 : -300, 4 : -600
- (c)  $\theta$  : 1 : 0.4, 2 : 0, 3 : -0.4  
 $\psi$  : 1 : -1.0, 2 : -9.0, 3 : -9.5  
 $\omega$  : 1 : 2100, 2 : 0, 3 : -300
- (d)  $\theta$  : 1 : 0.4, 2 : 0, 3 : -0.4  
 $\psi$  : 1 : -1.0, 2 : -9.0, 3 : -9.5  
 $\omega$  : 1 : 2100, 2 : 0, 3 : -300

$Ra$ 수의 변화에 따른  $Y/H=0$  및  $X/H=0$ 에서의 수평 및 수직온도분포이다. 계산결과 두 수직벽면간의 열전달은  $Ra=10^3$ 일 때 주로 전도에 의해 이루어지나  $Ra=10^4$ 일때는 대류열전달이 활발해짐을 관찰할 수 있었고 그림에서와 같이  $Ra \geq 10^5$ 일때는 수직벽면근처에 열경계층이 뚜렷이 나타났다. 한편

$Pr$ 수에 따른 영향은  $Ra$ 수가  $10^5$ 이하일 때는 미소하나  $10^6$ 일 때는 차이가 비교적 뚜렷하며  $Ra \geq 10^5$ 일 때 열경계층의 가장자리에서 온도반전현상이 나타났다. Fig. 5는 밀폐용기의 코어중심, 즉  $X/H = 0$ 에서의 수직온도분포를 나타내고 있다.  $Pr$ 수가 0.01인 경우가 다른  $Pr$ 수의 경우보다 약간 작은 값을 보이며  $Ra$ 수가 증가할수록 그 차이가 더 크게 나타났다.  $Ra = 10^5$ 일 때 수평온도분포에서 본 연구결과는  $Pr$ 수의 변화에 따라 경계층두께가 거의 같았으나 유한차분법을 사용한 Shembharkar 등<sup>(17)</sup>의 결과는  $Pr$ 수의 변화에 따라 경계층두께의 차이가 비교적 크게 나타났다.

Fig. 6과 Fig. 7은  $Ra$ 수  $10^5$  및  $10^6$ 일 때  $Pr$ 수의 변화에 따른 수직 및 수평 속도분포를 나타내고 있다. 먼저 수직속도분포는 계산결과  $Ra = 10^3$ 일 때 포물선 형태로 나타났고  $Ra = 10^4$ 일 때는 포물선 형태에서 경계층흐름으로 천이되는 속도형태가 관찰되었고 Fig. 6(a)에서 보듯이  $Ra = 10^5$ 일 때는 수직벽면근처에 속도경계층이 형성되었다.  $Pr$ 수에 따른 수직속도변화는  $Ra \leq 10^4$ 일 때는 근소하나

낮은  $Pr$ 수일 때 속도가 낮게 나타났으며  $Ra = 10^5$ 일 때는 Fig. 6(a)에서 나타나는 바와 같이 속도의 차이가 비교적 뚜렷하고  $Ra = 10^6$ 일 때는 현저한 차이를 나타내었다. 이는  $Ra$ 수가  $10^5$ 이상일 때, 즉 밀폐용기내 경계층흐름이 발달하는 경우  $Pr$ 수의 영향이 큼을 나타낸다. 수평속도분포는 Fig. 7(a)에서  $Ra \leq 10^5$ 일 때는 포물선형태로 나타나고  $Pr$ 수에 따라 별 차이가 없으나 Fig. 7(b)에서 보듯이  $Ra = 10^6$ 일 때는  $Pr \leq 0.1$ 인 경우 코어내부에 주흐름의 반대방향으로 반류가 관찰되었다. 이러한 반류는 낮은 중횡비의 경우 Bejan 등<sup>(9)</sup>에 의해 실험적으로 관찰되었으나 정방형밀폐용기에 대해서는 아직 실험적으로 관찰되지 않고 있다.

Fig. 8은 고온벽면에서의 국소 Nusselt수를, 그리고 Fig. 9는 평균 Nusselt수를 나타낸 것이다. Fig. 8에서 국소 Nusselt수는 낮은  $Pr$ 수일 때 낮게 나타났으며 높은  $Pr$ 수의 경우와는 달리 낮은  $Pr$ 수에서는  $Pr$ 수의 변화에 따른  $Nu$ 수의 차이가 크게 나타나고 있다. 한편 최대 국소 Nusselt수는 단일 가열수직평판의 경우와는 달리 고온벽면의 하

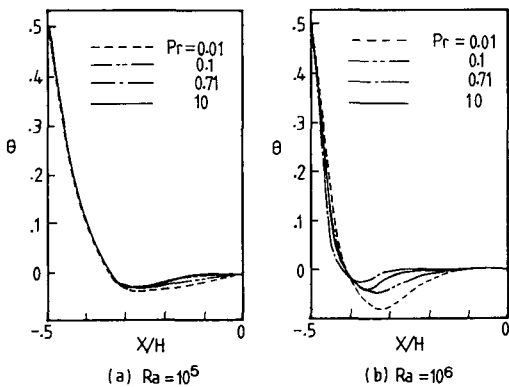


Fig. 4 Horizontal temperature distributions at  $Y/H = 0$

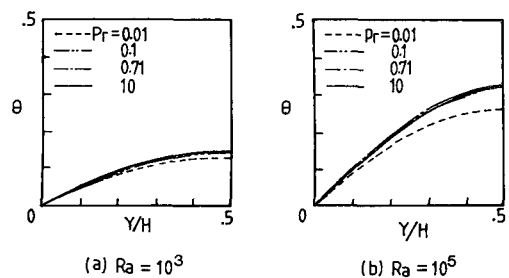


Fig. 5 Vertical temperature distributions at  $X/H = 0$

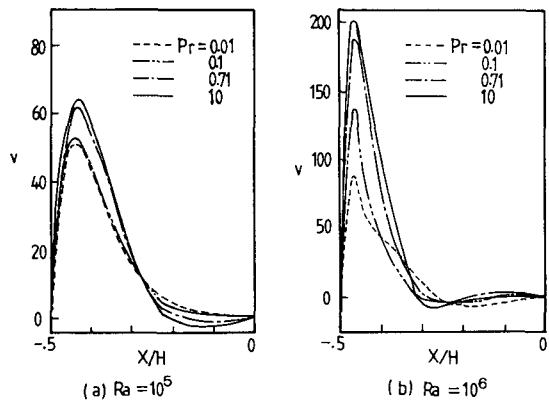


Fig. 6 Vertical velocity distributions at  $Y/H = 0$

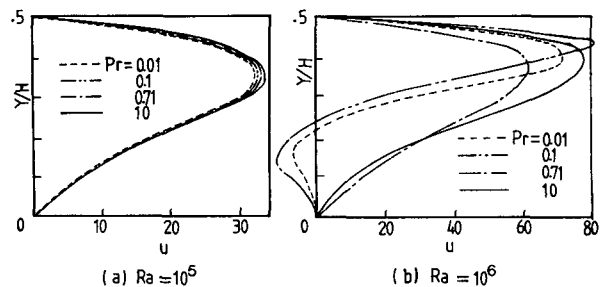


Fig. 7 Horizontal velocity distributions at  $X/H = 0$

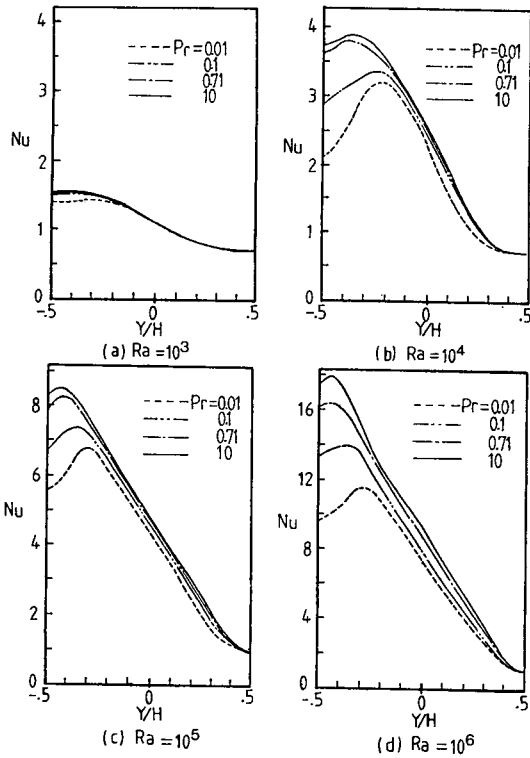


Fig. 8 Local Nusselt number distributions at hot wall

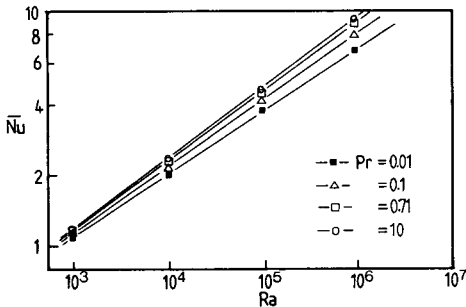


Fig. 9 Average Nusselt number at hot wall

단부 조금 윗쪽에서 나타나며 그 위치는 일정  $Ra$  수일 때  $Pr$ 수가 증가할수록, 일정  $Pr$ 수일 때  $Ra$  수가 증가할수록 더 하단부쪽에서 나타남을 알 수 있다. 또한 국소열전달은  $Ra$ 수가  $10^4$  이상 일때  $Pr$ 수의 영향이 크게 나타나고 있으며 Fig. 3에서 고찰된 바와 같이 대략 최대국소열전달이 일어나는 지점의 하단부쪽에서  $Pr$ 수의 영향은 매우 크게 나타나  $0.01 \leq Pr \leq 10$  범위에서  $Pr$ 수가 낮아질수록 국소  $Nu$ 수는 낮게 나타났다.

Fig. 9는 Fig. 8의 결과를 평균값으로 나타낸 것

으로  $Ra$ 수에 따른  $Pr$ 수의 영향을 보여준다. 그림에서  $Ra$ 수가 일정할 때  $Pr$ 수가 증가하면 평균  $Nu$ 수가 증가하였는데 그 증가폭은 전술한 바와 같이  $Pr$ 수가 0.71보다 클 경우에는 작게 나타나지만  $Pr$ 수가 0.1 이하인 경우에는 뚜렷이 나타났다.  $Pr$ 수가 0.1 이하에서 평균 Nusselt수 대  $Ra$ 수의 관계는 근사적으로  $Pr=0.1$ 인 경우  $\bar{Nu} \propto Ra^{0.29}$ ,  $Pr=0.01$ 인 경우  $\bar{Nu} \propto Ra^{0.26}$ 로 나타났다. 이 결과는 유한요소법을 사용한 기존 연구결과가 없어 비교할 수 없었으나 유한차분법을 사용한 Shiralkar와 Tien<sup>(29)</sup>의 결과는  $Pr=0.1$ 인 경우  $\bar{Nu} \propto Ra^{0.277}$ ,  $Pr=0.01$ 인 경우  $\bar{Nu} \propto Ra^{0.259}$ 로 나타나 본 연구의 결과와 좋은 일치를 보였다.

#### 4. 결 론

유한요소법을 사용하여 정방형밀폐용기내 양단의 온도차로 인한 자연대류현상을 수치해석하였으며 낮은 Prandtl수에 중점을 두고  $Pr$ 수의 변화에 따른 온도장 및 유동장의 특성을 조사한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1)  $Ra$ 수가  $10^5$ 이하에서는  $Pr$ 수가 0.71 이상인 경우 온도장은  $Pr$ 수에 크게 영향을 받지 않는다. 그러나  $Pr$ 수가 0.1 이하인 경우에는  $Pr$ 수가 낮아질수록 수직벽면의 열경계층이 증가하며 따라서 고온 벽면하단부(혹은 저온벽면상단부)에서 온도구배가 점차 작아진다. 이러한 경향은  $Ra$ 수가  $10^6$ 인 경우에 더욱 뚜렷이 나타났다.

(2) 고온벽면의 최대국소 Nusselt수가 생기는 지점은 벽면하단부 조금 윗쪽에 위치하였고 그 위치는  $Pr$ 수가 일정할 때  $Ra$ 수가 증가할수록,  $Ra$ 수가 일정할 때  $Pr$ 수가 증가할수록 더 하단부에 접근하였다.

(3)  $Ra$ 수가  $10^5$ 이상에서  $Pr$ 수에 관계없이 밀폐용기내 코어중심부에 이차셀이 관찰되었다. 셀의 형태는  $Pr$ 수가 낮을수록 비(非)원형이고 그 생성 위치는  $Pr$ 수가 10인 경우 두 셀의 중심을 잇는 축이 거의 수평이나  $Pr$ 수가 감소할수록 그 축은 시계방향으로 회전하여 나타났다.

(4) 수직 및 수평속도분포에 대한  $Pr$ 수의 영향은  $Ra$ 수가  $10^5$ 이하에서는 작으나  $Ra$ 수가  $10^6$ 일때는  $Pr$ 수의 영향이 크게 나타났다. 특히 수평속도분포에서  $Ra$ 수가  $10^6$ 일때  $Rr$ 수 0.1 이하인 경우 코어내부에 주흐름의 반대방향으로 반류가 관찰되



었다.

참 고 문 헌

- (1) Ostrach, S., 1972, "Natural Convection in Enclosures", *Advances in Heat Transfer*, Vol. 8, Chap. 3, Academic Press.
- (2) Lee, J. and Ostrach, S., 1982, "Prediction of Natural Convection Flow Pattern in Low Aspect Ratio Enclosures", FTAS/TR-82-158, Case Western Reserve Univ., Cleveland, Ohio.
- (3) Gill, A. E., 1966, "The Boundary Layer Regime for Convection in a Rectangular Cavity", *J. Fluid Mech.*, Vol. 26, pp. 515~536.
- (4) Cormack, D.E., Leal, L.G. and Imberger, J., 1974, "Natural Convection in a Shallow Cavity with Differentially Heated End Walls, Part 1, Asymptotic Theory", *J. Fluid Mech.*, Vol. 65, pp. 209~229.
- (5) Bejan, A. and Tien, C. L., 1978, "Laminar Natural Convection Heat Transfer in a Horizontal Cavity with Different End Temperatures", *J. Heat Transfer*, Vol. 100, pp. 641~647.
- (6) Tichy, J. and Gadgil, A., 1982, "High Rayleigh Number Laminar Convection in Low Aspect Ratio Enclosure with Adiabatic Horizontal Walls and Differentially Heated Vertical Walls", *J. Heat Transfer*, Vol. 104, pp. 103~110.
- (7) Elder, J. W., 1965, "Laminar Free Convection in a Vertical Slot", *J. Fluid Mech.*, Vol. 23, Part 1, pp. 77~98.
- (8) Imberger, J., 1974, "Natural Convection in a Shallow Cavity with Differentially Heated End Walls, Part 3, Experimental Results", *J. Fluid Mech.*, Vol. 65, pp. 247~260.
- (9) Bejan, A., Al-Homoud, A.A. and Imberger, J., 1981, "Experimental Study of High Rayleigh Number Convection in a Horizontal Cavity with Different End Temperature", *J. Fluid Mech.*, Vol. 109, pp. 283~299.
- (10) Sernas, V. and Lee, E. I., 1981, "Heat Transfer in Air Enclosure of Aspect Ratio Less than One", *J. Heat Transfer*, Vol. 103, pp. 617~622.
- (11) 황규석, 1984, "중횡비가 낮은 밀폐용기내의 Prandtl수가 큰 유체의 자연대류에 관한 실험적 연구", 석사학위논문, 연세대학교 대학원
- (12) Elder, J. W., 1966, "Numerical Experiment with free Convection in a Vertical Slot", *J. Fluid Mech.*, Vol. 24, pp. 823~843.
- (13) Lee, E.I. and Sernas, V., 1980, "Numerical Study of Heat Transfer in Rectangular Air Enclosures of Aspect Ratio Less Than One", ASME Paper 80-WA/HT-43.
- (14) 강종석, 1987, "완전히 밀폐된 직각용기내의 자연대류에 관한 수치해석", 석사학위논문, 연세대학교 대학원.
- (15) Cormack, D. E., Leal, L. G. and Seinfeld, J.H., 1974, "Natural Convection in a Shallow Cavity with Differentially Heated End Walls, Part 2, Numerical Solutions", *J. Fluid Mech.*, Vol. 65, pp. 231~246.
- (16) Graebel, W.P., 1981, "The Influence of Prandtl Number on free Convection in a Rectangular Cavity", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 24, pp. 125~131.
- (17) Shembharkar, T.R., Gururaja, J. and Krishna Prasad, K., 1977, "Prandtl Number Effects on steady state Natural Convection Flow and Heat Transfer in a Square Cavity", 4th National Heat & Mass Transfer Conference, Nov. India.
- (18) Tabarrok, B. and Lin, R.C., 1977, "Finite Element Analysis of Free Convection Flows", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 20, pp. 945~952.
- (19) De Vahl Davis, G. and Jones, I.P., 1983, "Natural Convection in a Square Cavity : A Comparison exercise", *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 3, pp. 227~248.
- (20) Stevens, W.N.R., 1982, "Finite Element, Stream Function-Vorticity Solution of Steady Laminar Natural Convection", *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 2, pp. 349~366.
- (21) Marshall, R.S., Heinrich, J.C. and Zienkiewicz, O. C., 1978, "Natural Convection in a Square Enclosure by a Finite Element, Penalty Function Method Using Primitive Fluid Variables", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 1, pp. 315~330.
- (22) Taylor, C. and Ijam, A.Z., 1979, "A Finite Element Numerical Solution of Natural Convection in Enclosed Cavities", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 19, pp. 429~446.
- (23) Reddy, J.N. and Satake, A., 1980, "A Comparison of a Penalty Finite Element Model with the Stream Function-Vorticity Model of Natural Convection in Enclosure", *J. Heat Transfer*, Vol. 102, pp. 659~666.
- (24) 손영석, 1986, "유한요소법에 의한 직각밀폐용기내에서의 자연대류에 관한 수치해석", 석사학위논문, 연세대학교 대학원.
- (25) 강신형, 1987, "유한요소법을 이용한 정방형밀폐용기내의 자연대류에 관한 연구", 석사학위논문, 연세대학교 대학원.

- (26) Zien Kiewicz, O.C., 1976, "The Finite Element Method, 3rd ed.", McGraw-Hill Book Co.
- (27) 황기영, 1986, "중횡비가 낮은 직각밀폐용기내의 자연대류에 관한 유한차분해석", 석사학위논문, 연세대학교 대학원.
- (28) Betts, P.L. and Haroutunian, V., 1983, "A Stream Function Finite Element Solution for Two-Dimensional Natural Convection with Accurate Representation of Nusselt Number Variations near a corner", Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 3, pp. 605 ~ 622.
- (29) Shiralkar, G.S. and Tien, C.L., 1981, "A Numerical Study of Laminar Natural Convection in Shallow Cavities", J. Heat Transfer, Vol. 103, pp. 226~231.