

<論 文>

다점선정법에 의한 “슬랩상사 응력확대계수 해석법”의 정도향상에 관한 연구

김 종 주* · 최 선 호**

(1988년 9월 16일 접수)

Improvement of Slab Analogy Experimental Analysis by Using Multi-Point Selection Method

Joung Joo Kim and Sun Ho Choi

Key Words : Multi-Point Selection Method(다점 선정법), Slab Analogy(슬랩상사), Slab Constant(슬랩상수), Shadow Moire(새도우 모아레)

Abstract

The experimental analysis method of stress intensity factors by “slab analogy” which was developed by authors proved itself effective to the determination of stress intensity factors of various shape of through cracks. Its experimental results, however, still has errors more or less 10% in comparison with known theoretical values. In this paper, a newly evaluating method, multi-point selection method, is presented by which these errors were decreased by more than 2%.

1. 서 론

상사이론에 의해서 실험적으로 응력확대계수를 해석하는 방법은 막막상사(membrane analogy)이론에 의한 K_{III} 의 해석법⁽¹⁾, 슬랩상사(slab analogy)이론에 의한 K_I , K_{II} 의 해석법^(2~4)을 들 수 있다. 이들 상사이론에 의한 해석법은 타 실험법과는 달리 균열(crack)을 강체로 변환시킬 수 있기 때문에 굴절, 분기, 분포 및 임의형균열의 제작이 용이하고, 실제에 가까운 예리한 균열을 얻을 수 있는 것이 타 실험법에 비하여 가장 큰 장점이다.

이 방법들 중 슬랩상사 이론에 의한 종래의 K_I , K_{II} 해석법은 이론 전개시 균열 첨단부의 극좌표를 (r, θ) 에서 각 θ 가 일정한 방향($\theta=0$ 혹은 $-\pi/2$)으로 변위를 측정하게 되어 있어 균열 첨단부근에서

많은 데이터(data)를 얻을 수 없다. 또 파괴역학의 이론에 의하면 변위의 측정위치가 균열 첨단에서 멀어질수록 많은 오차가 발생한다. 이런 점들을 고려할 때 임의의 방향으로 변위를 측정하여 균열 첨단에서 많은 데이터를 얻을 수 있는 새로운 해석법이 요구된다.

본 연구에서는 이 점을 감안하여 균열 첨단부의 극좌표를 직각좌표 (x, y) 로 변환시킨 후 슬랩상사 이론을 적용시켜 균열첨단 부근에서 많은 데이터의 측정이 가능한 새로운 해석법인 다점 선정법(multi-point selection method)을 개발하였다. 또 이 해석법으로 유한판 중앙 직선균열의 응력확대계수를 해석하여 종래 해석법의 결과와 비교 검토하여 그 유용성을 확인하였다.

2. 기초이론

2.1 슬랩상사 이론에 의한 다점 선정법

슬랩상사 이론에 의하면 Airy의 응력함수 U 로

*정회원, 영남공업전문대학 기계과

**정회원, 영남대학교 공과대학 기계설계학과

표시되는 응력성분과 슬랩 변위곡면의 곡률 성분 사이의 관계는 다음과 같다⁽⁵⁾.

$$\sigma_x = \gamma \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \gamma \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = \gamma \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

$$U = \gamma W \quad (1)$$

여기서 γ 는 응력과 곡률 사이의 관계를 나타내는 슬랩상수 (slab constant)이고, W 는 슬랩의 수직변위이다. 또 이때 임의의 경계 C_i 에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\gamma W_{C_i} = \int_0^s (B_i l + A_i m) ds + \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i$$

$$\gamma \left[\frac{\partial W}{\partial \nu} \right]_{C_i} = A_i l + B_i m + \alpha_i l + \beta_i \quad (2)$$

$$A_i = - \int_0^s \bar{Y} ds, \quad B_i = \int_0^s \bar{X} ds \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

여기서 l , m 는 방향여현, α_i , β_i , γ_i 는 적분상수, s 는 경계의 접선방향, ν 는 경계의 법선방향, \bar{X} , \bar{Y} 는 경계에 작용하는 외력을 나타낸다.

Fig. 1과 같이 중앙 경사균열을 가진 유한판이 균일 인장응력 σ_0 을 받을 경우 균열 첨단부근의 특이 응력장에서의 응력성분은 다음과 같다⁽⁶⁾.

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \sigma_0 \cos 2\beta$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

중래 해석법은 Fig. 1의 균열첨단 극좌표 (r, θ) 에서 각 $\theta = -\pi/2$ 및 $\theta = 0$ 을 각각 식 (3)의 제 1식 및 제 2식에 대입하여 슬랩상사 이론을 적용시키면 것으로 다음과 같다⁽²⁾.

$$K_I / K_0 = \frac{3}{2\sqrt{2}a} \frac{Rx Wx}{x^{3/2}} \quad (4)$$

$$K_{II} / K_0 = \frac{Rx Wy}{\sqrt{a} y^3} - \frac{1}{3} \frac{K_I}{K_0} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{a}} \cos 2\beta \quad (5)$$

여기서 $K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$, Rx 는 균열에서 충분히 떨어진 원방에서의 곡률반경, Wx 및 Wy 는 각각 x 및 y 방향의 슬랩의 수직변위이다.

식 (4) 및 식 (5)에서 무차원 응력확대계수 K_I / K_0 및 K_{II} / K_0 는 실험을 통해서 Rx , Wx , Wy 만 측정하면 구할 수 있다. 그러나 변위의 측정이 x

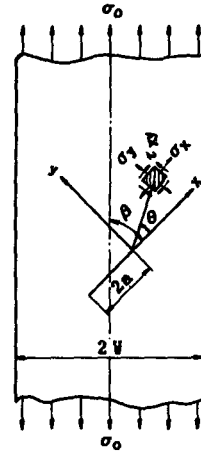


Fig. 1 Singular stress notation of crack tip

및 y 방향으로 한정되어 있기 때문에 균열첨단 부근에서 많은 데이터를 얻을 수 없으므로 실험과정에서 발생할지도 모르는 오차가 응력확대계수의 해석에 영향이 미칠 것으로 생각되어 왔다. 이 점을 보완하기 위하여 다점 선정법을 제안하며 그 개요는 다음과 같다.

식 (3)의 제 2식에서 균열첨단의 극좌표 (r, θ) 을 직각좌표 (x, y) 로 변환시키면 아래와 같다.

$$\sigma_y = \frac{K_I}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{r+x}}{r} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \frac{x}{r} - \frac{x^2}{r^2} \right) + \frac{K_{II}}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{r-x}}{r} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{x}{r} + \frac{x^2}{r^2} \right) \quad (6)$$

여기서 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 이다. 식 (6)에 슬랩상사이론을 적용시키면

$$\gamma \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{K_I}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{r+x}}{r} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \frac{x}{r} - \frac{x^2}{r^2} \right) + \frac{K_{II}}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{r-x}}{r} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{x}{r} + \frac{x^2}{r^2} \right) \quad (7)$$

이다. 식 (7)을 x 에 대하여 2회 적분하면 식 (8) 및 (9)와 같다.

$$\gamma \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{K_I}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{r+x} \left(1 + \frac{x}{r} \right) - \frac{K_{II}}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{r-x} \left(1 + \frac{x}{r} \right) + C_1 \quad (8)$$

$$\gamma W = \frac{K_I}{2\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{3} (r+x)^{3/2} + \frac{y^2}{\sqrt{r+x}} + 2x\sqrt{r+x} \right] - \frac{K_{II}}{2\sqrt{\pi}} \left[-(r-x)^{3/2} + \frac{3y^2}{\sqrt{r-x}} - 2x\sqrt{r-x} \right] + C_1 x + C_2 \quad (9)$$

여기서 적분상수 C_1 및 C_2 는 y 의 함수이다. 식 (2)

의 경계조건에서 변위 W 의 원점을 균열첨단으로 하면 $C_2=0$ 이고, 또 균열의 첨단에서 변위곡선의 기울기($\partial W/\partial x$)가 0이므로 $C_1=0$ 이다. 식 (9)를 정리하면 다음과 같다.

$$\gamma W = \frac{K_I}{3\sqrt{\pi}}(r+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi}}(r+x)\sqrt{r-x} \quad (10)$$

여기서 슬랩상수 γ 는 응력과 곡률사이의 척도 계수(scale factor)로서 균열에서 충분히 떨어진 원방의 슬랩 변위곡선에서 구할 수 있다.

즉 균열에서 충분히 떨어진 원방에서의 응력 $\sigma_y = \sigma_0$ 이므로

$$\sigma_0 = \gamma \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \gamma \frac{1}{Rx}, \quad \gamma = \sigma_0 Rx \quad (11)$$

이 된다. 식 (10)에 식 (11)의 슬랩상수를 대입하고 다시 극좌표(r, θ)로 변환시키면 다음과 같다.

$$W = \frac{2\sqrt{2a}}{Rx} r^{\frac{3}{2}} \cos^3 \frac{\theta}{2} \left(\frac{1}{3} \frac{K_I}{K_0} - \tan \frac{\theta}{2} \frac{K_{II}}{K_0} \right) \quad (12)$$

식 (3)의 제 1 식($\sigma_0 \cos 2\beta$ 항을 무시할 경우) 및 제 3 식도 같은 방법으로 정리하면 식 (12)와 동일한 결과를 얻을 수 있고, 또 식 (12)에 $\theta=0$ 및 $-\pi/2$ 를 대입시키면 식 (4), (5)와 일치한다.

실험을 통해서 곡률반경 Rx 와 균열첨단에서 임의의 각 θ 방향으로 r 만큼 떨어진 점의 변위 W 만 측정하면 무차원 응력확대계수 K_I/K_0 및 K_{II}/K_0 을 구할 수 있다. 또 균열 첨단 부근에서 많은 데이터의 측정이 가능하기 때문에 응력확대계수의 해석에 Newton Raphson 반복법에 의한 최소자승법(least squares method)의 적용이 가능하고, 또 실험오차가 응력확대계수의 해석에 미치는 영향을 줄일 수 있을 것으로 생각된다.

2.2 최소자승법에 의한 응력확대계수의 해석

식 (12)는 Newton Raphson 반복법에 의한 최소자승법⁽⁷⁾을 적용하기 위하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G_k = \frac{2\sqrt{2a}}{Rx} r^{\frac{3}{2}} \cos^3 \frac{\theta}{2} \left(\frac{1}{3} F_1 - \tan \frac{\theta}{2} F_2 \right) - W = 0 \quad (13)$$

여기서 $k=1, 2, 3, \dots, n$ 이고, F_1 및 F_2 무차원 응력확대계수 K_I/K_0 및 K_{II}/K_0 이다. 식 (13)에 F_1, F_2 의 추정치를 대입하면 등식은 성립하지 않는다. 정확한 F_1, F_2 를 구하기 위해서 함수 G_k 를 Taylor 전개하여 반복 방정식(iteration equation)

을 표시하면 다음과 같다.

$$(G_k)_{i+1} = (G_k)_i + \left(\frac{\partial G_k}{\partial F_1} \right)_i \Delta F_1 + \left(\frac{\partial G_k}{\partial F_2} \right)_i \Delta F_2 \quad (14)$$

여기서 i 는 반복회수를 나타내며, ΔF_1 및 ΔF_2 는 F_1 및 F_2 의 보정값이다. 이 보정값을 구하기 위하여 식 (14)을 0로 놓으면

$$\left(\frac{\partial G_k}{\partial F_1} \right)_i \Delta F_1 + \left(\frac{\partial G_k}{\partial F_2} \right)_i \Delta F_2 = -(G_k)_i \quad (15)$$

이다. 식 (15)는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_k \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial F_1} & \frac{\partial G_1}{\partial F_2} \\ \frac{\partial G_2}{\partial F_1} & \frac{\partial G_2}{\partial F_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_k}{\partial F_1} & \frac{\partial G_k}{\partial F_2} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \end{bmatrix}_i \quad (16)$$

식 (16)을 매트릭스(matrix)로 표시하면 다음과 같다.

$$[G] = [A][\Delta F] \quad (17)$$

여기서 $[\Delta F]$ 는 식 (17)의 양변에 매트릭스 $[A]$ 의 전치(transpose) $[A]^T$ 를 곱하여 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$[\Delta F] = [C]^{-1}[D] \quad (18)$$

여기서 $[D] = [A]^T[G]$, $[C] = [A]^T[A]$ 이고, $[C]^{-1}$ 는 매트릭스 $[C]$ 의 역 매트릭스이고, 식 (18)의 해는 다음과 같다.

$$(K_I/K_0)_{i+1} = (K_I/K_0)_i + \Delta F_1 \quad (19)$$

$$(K_{II}/K_0)_{i+1} = (K_{II}/K_0)_i + \Delta F_2$$

2.3 곡률반경 Rx 의 결정

슬랩상사 이론의 경계조건 식 (2)를 만족하는 슬랩 변위곡면상의 임의의 점(x, y)에서의 곡률 성분 $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} (=1/Rx)$, $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} (=1/Ry)$, $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} (=1/Rxy)$ 는 일정하다. 즉 슬랩은 일정 곡률곡면으로 변형하며 변위 W 는 아래와 같이 표시할 수 있다.

$$W = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} y^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} xy \quad (20)$$

식 (20)의 우변에 $c_1x + c_2y + c_3$ (단, c_1, c_2, c_3 는 상수)를 첨가하여도 식 (1)을 만족한다. 이와같은 x, y 의 0차 및 1차의 항은 곡면의 곡률성분(곡면형상)에는 관계가 없고 변위 곡면상의 위치에만 관계하는 것으로서 변위곡선의 평행이동 및 강제적인 회전만을 표시한다⁽⁸⁾.

슬랩 곡면상의 임의의 점 (x, y) 들에서의 변위 W 를 측정하여 식 (20)에 전술한 최소자승법을 적용하면, 곡률반경 R_x, R_y, R_{xy} 를 구할 수 있다.

3. 실험

3.1 실험장치 및 실험방법

슬랩의 재료는 두께 $(t=0.3\text{mm})$ 가 균일하고 탄성이 큰 경질 비닐판을 사용하였고, 새도우 모아레 (shadow moire)법으로 변위를 측정하기 위하여 표면에는 수성페인트를 균일하게 도포하였다. 강체 균열은 두께 0.15mm의 강판을 사용하여 해석대상과 동일한 모양을 만들고 시험편에 균열형상과 동일한 슬릿 (slit)을 만든 후 삽입하여 강력 접착제로 부착하였다.

슬랩상사 이론의 경계조건을 만족하는 변위를 얻기 위하여 Fig. 2와 같은 하중장치를 제작하여 사용하였다.

3.2 측정방법

Fig. 3은 슬랩의 변위를 측정하기 위한 새도우 모아레 광학계이다. 여기서 매스터 그레이팅 (master grating)의 피치를 P , 평행 입사광과 카메라 광축 사이의 각을 α , 등고선의 차수 (fringe order)를 N 라 하면 슬랩의 수직변위 W 는 다음과 같다⁽⁹⁾.

$$W = \frac{PN}{\tan \alpha} \quad (21)$$

본 실험에서는 피치 p 가 0.152mm인 매스터 그레이팅을 사용하였다.

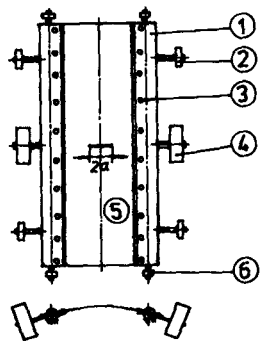


Fig. 2 Schematic diagram of loading device

- ① Clamping plate ② Balancing weight
- ③ Set screw ④ Loading weight
- ⑤ Specimen ⑥ Bearing

Fig. 4는 유한판 중앙균열을 가진 슬랩의 모아레 무늬 사진을 예시한 것으로 A는 균열에서 충분히 떨어진 원방에서의 변위곡면의 모아레 무늬 형상이고, B 및 C는 각각 $\beta=90^\circ$ 인 경우 시험편의 폭

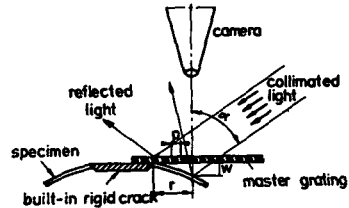


Fig. 3 Schematic diagram of shadow Moire's optical system

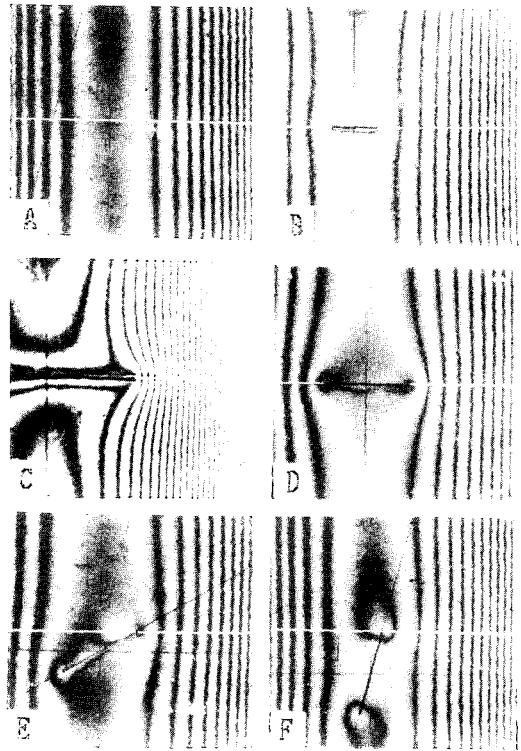
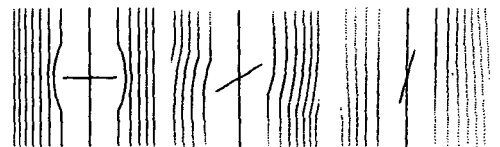


Fig. 4 Moire fringe patterns



$\beta = 90^\circ$ $\beta = 60^\circ$ $\beta = 15^\circ$

Fig. 5 Moire fringe patterns by computer simulation ($a/W=0.2$)

2W와 균열의 길이 2a의 비 a/W가 0.1 및 0.4인 경우이다. 또 D, E, F는 각각 a/W=0.2인 경우 각 β가 90°, 60° 및 15°인 경우의 모아레 무늬 사진이다. 또 Fig. 5는 a/W=0.2인 경우 각 β가

90°, 60° 및 15°인 경우의 모아레 무늬를 컴퓨터 시뮬레이션에 의해서 그래픽한 것으로서 Fig. 4의 D, E, F와 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

4. 실험결과 및 고찰

Fig. 4의 A는 식 (12)의 곡률반경 Rx의 계산을 위한 균열에서 충분히 떨어진 원방에서의 모아레 무늬 사진을 예시한 것이다. 이와 같은 사진을 이용하여 슬랩 변위 곡면상의 점들의 변위 W를 측정하여 식 (20)에 대입하여 최소자승법을 적용하면 곡률반경 Rx가 계산된다. 이 결과와 Fig. 4의 B, C, D, E, F와 같은 모아레 무늬 사진으로부터 균열의 첨단에서 r만큼 떨어진 점들에서의 변위 W를 측정하여 최소 자승법을 적용시키면 무차원 응력확대계수 F₁ 및 F₂를 결정할 수 있다.

Fig. 6은 유한판 중앙직선 균열(β=90°)의 무차원 응력확대계수 F₁을 Tada의 결과⁽¹⁰⁾와 비교한 것으로서 ○는 종래 해석법의 결과이고, ●는 다점 선정법의 결과이다. 이 두 결과를 Tada의 결과와 비교해보면 종래의 해석법은 최대오차가 10% 정도인데 비하여 다점 선정법은 8%로 2% 정도의 오차가 줄어든 것을 볼 수 있다. Fig. 7은 시험편의 폭과 균열의 길이의 비 a/W=0.2인 경우 크랙의 경사각 β의 변화에 따른 무차원 응력확대계수 F₁ 및 F₂를 Kitagawa 및 Yuuki의 결과⁽¹¹⁾와 비교한 것으로 최대오차는 7% 정도이다.

이상의 결과를 미루어 볼 때 다점 선정법은 응력확대계수의 해석법으로 충분한 정도를 가진 것으로 생각된다.

5. 결 론

이상의 고찰 결과에서 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

본 연구에서 개발된 다점 선정법은 균열 첨단 부근에서 많은 데이터를 측정할 수 있기 때문에 최소자승법에 의한 응력확대계수의 해석이 가능하여 실험오차가 응력확대계수에 미치는 영향을 줄일 수 있고, 또 종래의 해석법보다 20~30%의 실험정도를 개선시킬 수 있다.

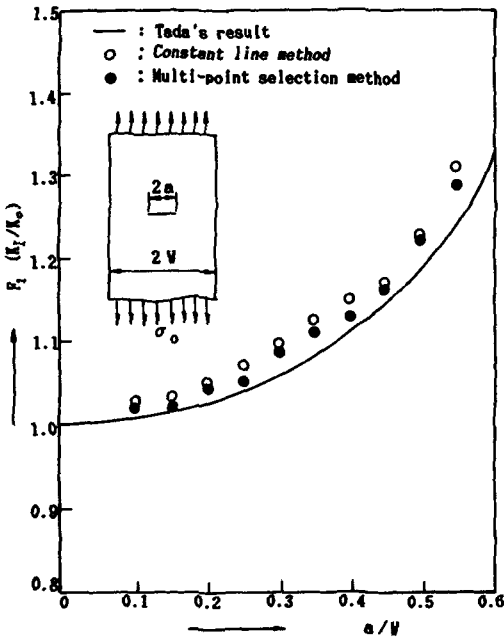


Fig. 6 Normalized stress intensity factors F₁ as a function of a/W

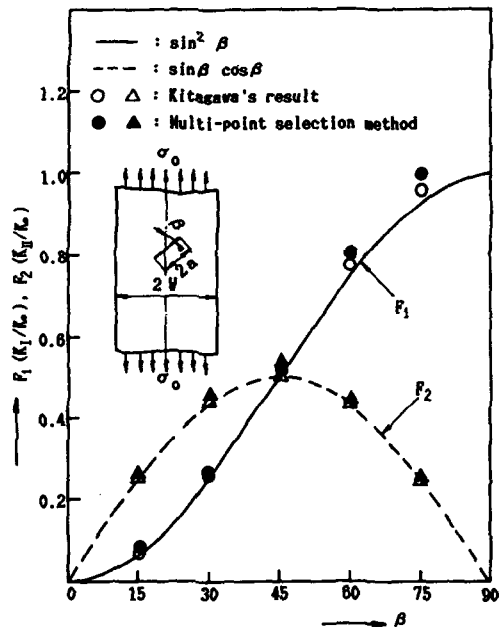


Fig. 7 Normalized stress intensity factors F₁ and F₂ as a function of β(a/W=0.2)

참 고 문 헌

- (1) 崔善浩, 權在度, 北川英夫, 1986, “軸方向き裂のモードⅢ應力擴大係數の變位凍結類似法による解析”, 日本機械學會論文集, 第52卷, 第484號, pp. 2653~2661.
- (2) 崔善浩, 金鍾周의 3인, 1982, “모아레법과 슬랩상사의 복합에 의한 응력확대계수의 해석법”, 대한기계학회논문집, 제 6 권, 제 4 호, pp. 315~322.
- (3) 崔善浩, 金鍾周의 2인, 1983, “변위동결법에 의한 응력확대계수의 실험적 결정법”, 대한기계학회논문집, 제 7 권, 제 4 호, pp. 434~440.
- (4) Sun Ho Choi and Joung Joo Kim, 1986, “Analysis of Stress Intensity Factor, K_I and K_{II} , by Displacement Freezing Method”, Proceedings of APCS-86, pp. 519~525.
- (5) M. Hetenyi, 1950, “Handbook of Experimental Stress Analysis”, John Wiley & Sons, pp. 700~827.
- (6) E.E. Gdoutos and P.S. Theocaris, 1978, “A Photoelastic Determination of Mixed-mode Stress Intensity Factors”, Experimental Mechanics, pp. 87~96.
- (7) R.J. Sanford and J.W. Dally, 1978, “Stress Intensity Factors in the Third Stage Fan Disk TF-30 Turbine Engine”, NRL Report 8202. pp. 1~22.
- (8) 栖原二郎, 1975, “平板の曲げ理論”, 培風館, pp. 1~34.
- (9) A.J. Durelli and V.J. Parks, 1970, “Moire Analysis of Strain”, Prentice Hall, pp. 251~256.
- (10) H. Tada, 1971, “A Note on the Finite Width Corrections to the Stress Intensity Factor”, Eng. Frac. Mechanics, Vol. 3, No. 3, pp. 345~347.
- (11) H. Kitagawa and R. Yuuki, 1977, “Analysis of Arbitrarily Shaped Crack in a Finite Plate Using Conformal Mapping”, Trans. Japan Soc. Mech. Eng., Vol. 43, No. 376, pp. 4354~4362.