

〈論 文〉

난류구조의 조건와류에 대한 선형적 평가

성 형 진*

(1988년 5월 17일 접수)

Linear Estimation of Conditional Eddies in Turbulence

Hyung Jin Sung

Key Words : Isotropic Turbulence(등방성 난류), Conditional Eddy(조건와류), Coherent Structure(고유구조)

Abstract

Linear estimation in isotropic turbulence is examined to approximate conditional averages in the form of fluctuating velocity fields conditioned on local velocity. The conditional flow fields and their associated vorticity field are computed using experimental data [Van Atta and Chen] and energy spectrum model [Driscoll and Kennedy]. It appears that ring vortices could be the dominant structure. Due to the extremely large vorticity in the viscous region of a conditional ring vortex, the energy spectrum model can be used appropriately by changing the Reynolds number. The hairpin vortex could be detected by combining vortices in isotropic field with an anisotropic orientation imbedded in a uniform mean shear flow and this is consistent with other studies [Kim and Moin].

1. 서 론

복잡하고 일정치 않다고 여겨온 난류유동에도 그 유동장의 고유한 조직적인 구조(organized structure)가 존재하는 것이 최근의 연구결과 밝혀지고 있다. 이것은 어떤 특수한 상황에서만 적용되는 매우 제약적인 것이지만, 이 조직적인 난류구조를 알아내기 위한 연구와 노력은 현 난류연구의 주된 방향이라고 말할 수 있으며, 실험적, 수치적 방법 등 여러 방법으로 시도되고 있다. Brown과 Roshko⁽¹⁾는 유동의 가시화로써 고유구조라 할수 있는 조직적인 큰 척도(large scale)의 움직임을 관찰하였으며, Lumley^(2,3)는 수학적, 통계적 정의를 통하여 이 구조를 규명하고 있다(characteristic eddy). 하

지만 아무런 조건이 없는(unconditional) 수많은 자료로부터 일관된 정보를 얻는것은 불가능하며, 유동의 가시화는 유동장의 질적인 분석은 가능하지만, 양적인 정보를 추출하기는 어렵다. 요사이는 조건부검색방법(conditional sampling technique)^(4,5)이 주로 난류 경계층 유동에서 중요한 레이놀즈 응력을 발생시키는 와동(vorticity)의 양적구조를 규명하는데 사용되고 있는데, 이는 와류(eddy)의 병합(coalescing)이나 버어스트(burst)등과 같이 짧은 시간 동안에 급격한 유동상승이 수반되는 현상을 조건으로 하여(trigger) 앙상블(ensemble) 평균을 취하는 방법이다.

고유의 조직적인 난류구조(coherent structure)를 알아내기 위한 조건와류(conditional eddy)의 추출방법이 Adrian에 의해 등방성 난류에 대하여 시도 되었다^(6,7). 이 방법은 어떤 정해진 점과 시간에서의 순간속도가 어느 미리 정해진 수치가 되는

*정회원, 한국과학기술대학 기계재료공학부

경우 다른시간 또는 다른점에서 속도에 대한 기대치 형태로 나타내어지는 조건부 평균(conditional average; $\langle u'/u \rangle$)이 바로 일반적인 통계처리 방법인 평균자승오차를 최소화할때의 속도의 평가치와 같다는 것을 응용한 것이다⁽⁸⁾. 복잡한 난류유동에서 어떤 조건을 부여하였을때의 난류구조(이를 조건와류라 명명)를 파악하는 것은 중요한 것으로서, 이 조건와류를 추출하는 방법으로 실제 유동과의 평균자승오차를 최소화 하는 평가치를 구하는 것이다. 이 평가치는 높은 차수항까지 포함해야 보다 정확한 값을 예측하겠지만 선형적 평가치도 실제와 상당히 근사하고 있음이 밝혀져 간편히 난류구조를 구할수 있게 되었다⁽⁹⁾. 등방성난류유동에서 구한 조건와류는 반지모양의 와동(ring vortex)을 나타내고 있는데, 이 와동의 내부 위치와 그 크기는 전체 난류 에너지 및 운동량 전달에 중요한 역할을 하고 있다⁽¹⁰⁾.

조건와류를 추출하려면 우선 속도상관관계를 알아야 하는데, 이를 위하여 실험적 데이터와 이론적 모델을 모두 적용하였다. 전자는 Van Atta와 Chen⁽¹¹⁾의 그리드 난류에서의 등방성에 가까운 속도상관관계 데이터를 취하여 이용하였으며, 후자는 Driscoll과 Kennedy⁽¹²⁾의 난류에너지 스펙트럼 모델을 해석하여 적용하였다. 이 이론적 모델은 레이놀즈수를 변화시킬수 있는 장점이 있으며, 특히 벽면근처에서의 와동구조해석을 위해서는 레이놀즈수가 작은 조건와류가 필요하다. 조건와류의 반지모양의 와동은 이방성분포인 평균전단유동에 중첩되어 전체 와동장을 구성하는데, 난류유동의 vortex stretching과정에서 중요한 역할을 하는 머리핀 와동(hairpin vortex)과 비슷한 구조를 이 전체 와동에서 구할 수 있다. 이는 조건와류의 와동장의 크기와 평균전단에 의한 평균 와동장의 상호크기에 따라 결정되는데, 실제 난류유동장에서 난류전달과 레이놀즈 응력과 밀접한 관계가 있다.

2. 조건와류

2.1 선형적 평가(Linear Estimation)

일반적으로 실제치에 접근할수 있는 근사평가치를 구하는 좋은 방법으로서 평균자승오차(mean-square error)를 최소화하여 근사평가치를 구하는 것이다. 이렇게 구한 근사평가치는 평균자승영역에서는 가장 좋은 해이며, 이를 복잡한 난류구조해석

에 적용하면 어떤 조건하에서의 난류구조의 조직적인 해석이 가능하게 된다. 난류유동장에서 어떤 주어진 점 x 에서의 속도 $u(x)$ 에 대하여 r 만큼 떨어진 곳에서의 속도 $u(x+r)$ 를 정확히 묘사할수 있으며, 난류유동장에서 운동량 전달에 중요한 역할을 하고 있는 와동의 구조등 여러 정보를 얻을수 있게 된다. 이 $u(x)$ 에 대한 $u(x+r)$ 의 기대치의 근사평가치를 $\check{u}(x+r)$ 로 표시할때 실제 $u(x+r)$ 에 대한 평균자승오차 e 는

$$e = \langle \{u(x+r) - \check{u}(x+r)\}^2 \rangle \quad (1)$$

이 된다. 여기서 $\langle \rangle$ 는 앙상블 평균이며, 통계적인 기대치이다. 그런데, 이 평균자승오차를 최소화 하는 근사평가치 $\check{u}(x+r)$ 는 바로 조건부 평균(conditional average)인 $\langle u(x+r) | u(x) \rangle$ 이 됨을 알 수 있는데, 이는 평균자승오차를 근사평가치에 대한 미분하여 0이 됨과 $\langle u(x+r) | u(x) \rangle = \langle u(x+r) \rangle$ 임을 이용하면 구할 수 있다^(8,13). 그러므로 근사평가치인 $u(x+r)$ 은 조건와류 $\langle u(x+r) | u(x) \rangle$ 의 제일 좋은 해가 되며 바로 거리 r 과 속도 $u(x)$ 의 함수로 나타낼 수 있다.

$$\check{u}(x+r) = \langle u(x+r) | u(x) \rangle = F\{r, u(x)\} \quad (2)$$

이 조건와류 $\langle u(x+r) | u(x) \rangle$ 의 직접적인 측정은 어려우며, 이에 대한 이론적인 수식표현에서 근사평가치를 가정하여 미정계수를 구하면 된다. 등방성 난류의 $u(x)$ 에 대하여 r 만큼 떨어진 곳에서의 속도를 $u(x)$ 에 대한 Taylor급수로 표시한다면 다음과 같이 표시할 수 있다⁽¹⁴⁾.

$$\begin{aligned} \check{u}_i(x+r) = & A_{ij}(r) u_j(x) + B_{ijk}(r) u_j(x) u_k(x) \\ & + C_{ijkl}(r) u_j(x) u_k(x) u_l(x) \\ & + D_{ijklm}(r) u_j(x) u_k(x) u_l(x) u_m(x) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 계수 A, B, C, D 는 미지수이다. 만일 식(3)과 같이 높은차수항을 포함하여 $i=1, 2, 3$ 에 대하여 평균자승오차를 최소화시키는 계수를 구하면 모두 120개의 선형 방정식을 풀어야 될 것이다. 이는 엄청난 계산량으로서, Tung과 Adrian⁽⁹⁾이 수치계산으로 수행하였는바, 결과는 다행히 높은 차수항을 무시하였을때와 ($C=D=0$) 별로 차이가 없음을 발견하였다. 이는 높은 차수항을 무시한 선형적 평가로서 조건와류를 잘 묘사해 주고 있음을 증명하고 있다.

Ditter⁽¹⁰⁾는 차수가 2인 $u_i u_j$ 에 대한 등방성 조건와류 대신 국소변형에 대한 등방성 조건와류를 해석하였는데, 이는 어느 주어진 점에 대한 조그만

영역에서의 속도항은 1차항으로서 속도의 병진 (translation), 순수 변형 (pure straining motion) 그리고 어떤 각속도 ω 를 가진 회전 (rotation)의 중첩으로 나타낼 수 있다⁽¹⁴⁾. 이들을 대칭과 비대칭항의 합으로 나타낼때 국소변형 tensor로 표시될 수 있는데, 이 국소변형 tensor $d_{ij}(x)$ 는

$$d_{ij}(x) = s_{ij}(x) - \epsilon_{ijk}\omega_k(x) \quad (4)$$

로 표시되며, 여기서 순수변형 tensor s_{ij} 는 $\frac{1}{2}(\partial u_i(x)/\partial x_j + \partial u_j(x)/\partial x_i)$ 이며, 각속도는 국소와동인 $\epsilon_{ijk}\partial u_k(x)/\partial x_j$ 이다. 조건와류에 대한 선형적 평가는 i 에 대하여 표시하면,

$$\tilde{u}_i(x+r) = A_{ij}u_j(x) + B_{ijk}d_{jk}(x) \quad (5)$$

이 되며, 평균자승오차 $e_i = \langle [\tilde{u}_i(x+r) - u_i(x+r)]^2 \rangle$ 를 최소화 하기 위해서는 A_{im} 과 B_{ilm} ($i=1, 2, 3, \ell=1, 2, 3$ 그리고 $m=1, 2, 3$)에 대하여 미분을 취하여 그 값이 0이 되면 된다.

$$\partial e_i / \partial A_{im} = 0 \quad (6)$$

$$\partial e_i / \partial B_{ilm} = 0 \quad (7)$$

식 (5)를 e_i 에 대입하고 식 (6)과 (7)을 수행하면 다음과 같은 관계식을 유도할수 있다.

$$\langle u_i(x+r) u_i(x) \rangle = A_{ij}(r) \langle u_j(x) u_i(x) \rangle + B_{ijk}(r) \langle (u_i(x) d_{jk}(x)) \rangle \quad (8)$$

$$\langle u_i(x+r) d_{lm}(x) \rangle = A_{ij}(r) \langle u_j(x) d_{lm}(x) \rangle + B_{ijk}(r) \langle d_{jk}(x) d_{lm}(x) \rangle \quad (9)$$

등방성 난류에서 $\langle u_j(x) u_i(x) \rangle = \sigma_u^2 \delta_{ji}$ 이며, σ_u 는 $\sigma_u^2 = \langle u_i u_i \rangle / 3$ 의 RMS 값이다. 또한 속도상관관계 (velocity correlation)는 $x' = x+r$ 로 될때 $R_{ij}(r) = \langle u_i(x) u_j(x') \rangle$ 이며, 식 (8)에서

$$\langle u_i(x) d_{jk}(x) \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \langle u_i(x) \partial u_j(x') / \partial x_k \rangle = \partial R_{ij}(0^+) / \partial r_k \quad (10)$$

로서, 등방성 난류에서 $R_{ij}(r) = R_{ji}(-r)$ 이므로 $\partial R_{ij}(0) / \partial r_k = 0$ 이 된다. 그러므로 식 (10)의 값은 무시할 수 있으므로, 식 (8)에서

$$A_{ij}(r) = R_{ji}(r) / \sigma_u^2 = R_{ij}(r) / \sigma_u^2 \quad (11)$$

이다.

다시 $\langle u_i(x) d_{lm}(x) \rangle = 0$ 을 이용하여, 식 (9)에서

$$\langle u_i(x+r) d_{lm}(x) \rangle = -R_{li,m}(r) = B_{ijk}(r) \langle d_{jk}(x) d_{lm}(x) \rangle \quad (12)$$

이 되며, 여기서 $\langle d_{jk}(x) d_{lm}(x) \rangle$ 은 속도미분의 상관관계이다. 이에 대한 속도분포장은 Panchev⁽¹⁵⁾에 의해 Taylor의 길이척도인 λ 를 이용하여 각 j, k, l, m 의 경우에 대하여 잘 정리되어 있다. 이 국

소변형을 여러가지 경우(순수회전, 순수전단, 평면 변형 그리고 축대칭변형 등)에 대하여 조건와류를 계산 하였지만⁽¹⁰⁾, 그 영향이 전체적으로 크지 않음을 발견하였다. 여기에서는 국소변형을 제외한 조건와류를 생각하면,

$$\tilde{u}_i(x+r) = R_{ij}(r) u_j(x) / \sigma_u^2 \quad (13)$$

이 되며, $u(x)$ 에 대한 조건와류의 선형적 평가는 속도상관관계인 $R_{ij}(r)$ 과 σ_u 의 값을 알면 측정할 수 있다. 이 조건와류를 이용하여 난류구조의 중요한 현상인 와동에 대한 선형적 평가도 측정할 수 있다.

$$\tilde{\omega}_i(x+r) = \epsilon_{ijk} \partial \tilde{u}_k(x+r) / \partial r_j \quad (14)$$

이상과 같은 선형적 평가에 대한 기본가정 및 성질을 관찰해 보면⁽¹⁶⁾,

$$\partial \tilde{u}_i(x+r) / \partial r_i = 0 \quad (15)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{u}(x+r) = u(x) \quad (16)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{u}(x+r) \rightarrow 0 \quad (17)$$

$$\langle \tilde{u}(x+r) \rangle = 0 \quad (18)$$

$$\langle u_i(x) \tilde{u}_j(x+r) \rangle = \langle u_i(x) u_j(x+r) \rangle \quad (19)$$

$$\langle \epsilon_{ijk} \partial \tilde{u}_k(x+r) / \partial r_j \rangle = \langle \tilde{\omega}_i(x+r) \rangle = 0 \quad (20)$$

등이다. 식 (15)는 비압축성 조건이며, 식 (16)과 (17)은 조건와류가 $u(x)$ 에 접근할때와 멀어질때를 나타내며, $\langle u(x) \rangle = 0, \langle d(x) \rangle = 0$ 의 조건이 식 (18), (19) 그리고 식 (20)에 포함되어 있다.

2.2 등방성 난류의 속도상관관계

등방성 난류는 방향성이 없으므로 대칭이며, 회전 (rotation)과 반사 (reflection)에 무관하며, 이에 대한 2점 속도상관관계 tensor는 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다⁽¹⁴⁾.

$$R_{ij}(r) = F(r) r_i r_j + G(r) \delta_{ij} \quad (21)$$

여기서 $F(r)$ 과 $G(r)$ 은 임의의 스칼라량인 거리 $r = \sqrt{r_i r_i}$ 의 함수이며, 연속방정식의 조건을 만족하고 있다 ($R_{ij,i} = 0$).

$$4F + r \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} = 0 \quad (22)$$

보다 이해를 돕기 위해 Fig. 1과 같이 거리 r 만큼

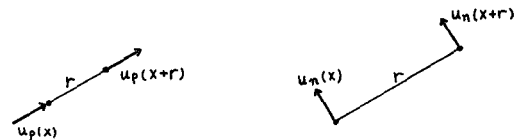


Fig. 1 Longitudinal and lateral velocity correlation

떨어진 벡터 \vec{r} 에 서로 평행한 2점속도상관관계 (f ; longitudinal velocity correlation)와 서로 수직인 2점속도상관관계 (g ; lateral velocity correlation)로 정의하면 다음과 같다.

$$f(r) = \frac{\langle u_p(x) u_p(x+r) \rangle}{\sigma_u^2},$$

$$g(r) = \frac{\langle u_n(x) u_n(x+r) \rangle}{\sigma_u^2} \quad (23)$$

식 (21)에서

$$\langle u_p(x) u_p(x+r) \rangle = r^2 F(r) + G(r) = \sigma_u^2 f(r) \quad (24)$$

$$\langle u_n(x) u_n(x+r) \rangle = G(r) = \sigma_u^2 g(r) \quad (25)$$

이 되어, 등방성 난류에서의 속도상관관계는 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$R_{ij}(r) = \sigma_u^2 \left\{ \frac{f-g}{r^2} r_i r_j + g \delta_{ij} \right\} \quad (26)$$

그런데, 식 (22)와 같이 연속방정식의 관계에서

$$g = f + \frac{1}{2} r f' \quad (27)$$

이며, $f' = df(r)/dr$ 이다. 그러므로, 식 (13)에서와 같이 조건와류의 선형적 평가는 r 과 $f(r)$ 로서 표시할 수 있다.

$$\tilde{u}_i(x+r) = \left[-\frac{1}{2} f'(r) \frac{r_i r_j}{r} + \left\{ f(r) + \frac{1}{2} r f'(r) \right\} \delta_{ij} \right] u_j(x) \quad (28)$$

또한 와동에 대한 선형적 평가는 다음과 같다.

$$\tilde{\omega}_i(x+r) = \frac{\epsilon_{imj}}{2} \left\{ f''(x) \left(r_m \delta_{ij} - \frac{r_i r_j r_m}{r^2} \right) + f'(r) \left(\frac{r_i r_j r_m}{r^3} - \frac{r_j \delta_{jm}}{r} \right) + 3 \frac{r_m \delta_{ij}}{r} \right\} u_j(x) \quad (29)$$

2.3 선형적 평가의 무차원화

난류유동은 넓은 영역의 길이척도(length scale)를 갖고 있다. 일반적으로, 이 길이 척도는 적분길이척도, Taylor의 길이척도, 그리고 Kolmogorov의 길이척도로 무차원화 되고 있는데, 이들 각각은 난류에너지의 생성, 전달 그리고 소멸을 나타내는 척도들이다. 주어진 속도에 대한 조건와류의 선형적 평가는 속도의 RMS 값인 σ_u 로서 무차원하고, 또 길이척도의 무차원화는 큰 척도의 측정으로서, 적분길이척도($L_{11} = \int f(r) dr$)로써 무차원한다.

$$u_j^*(x) = u_j(x)/\sigma_u, \quad R_{ij}^*(r) = R_{ij}(r)/\sigma_u^2 \quad (30)$$

$$r^* = r/L_{11} \quad (31)$$

조건와류의 와동 측정은 큰 척도인 경우 적분길이척도를 이용하지만, 벽면 근처의 길이척도는 Taylor의 길이척도 λ 를 이용한다. λ 는 정의에서 $\lambda^2 = -1/f''(0)$ 로 구할 수 있으며, 적분길이척도 L_{11} 와의 관계식은 등방성난류인 경우 다음과 같다.⁽¹⁷⁾

$$\frac{\lambda}{L_{11}} = \frac{18.75}{Re_\lambda} \quad (32)$$

여기서 Re_λ 는 Taylor의 길이척도를 기본으로 한 레이놀즈 수이다.

3. 등방성 난류 모델 적용

조건와류의 와동에 대한 선형적 평가를 구하려면 식 (28)과 식 (29)에서 알 수 있는바와 같이 세가지 스칼라량인 σ_u , λ 그리고 $f(r)$ 의 값을 알면 구할 수 있다. 등방성 난류에서의 이들 값들을 구하는 방법은 실험 데이터의 적용과 또한 이론적 모델을 적용할 수 있는데, 전자는 Van Atta와 Chen의 실험 데이터를 이용하고 후자는 Driscoll과 Kennedy의 등방성 난류 스펙트럼 모델에서 이들 스칼라량들을 계산하여 적용하였다.

3.1 Van Atta와 Chen의 실험 데이터

Van Atta와 Chen은 풍동에서 그리드를 설치하여 난류를 생성하고, 소멸영역에서 가능한한 등방성 난류를 얻어 속도상관관계를 얻었다. 그들의 실험조건은 평균속도 $U = 15.7 \text{ m/sec}$, RMS값은 $\sigma_u = 0.24 \text{ m/sec}$ 이고, 그리드의 간격은 $M = 0.0254 \text{ m}$ 로서 $x/M = 48$ 의 위치에서 속도상관관계를 구하였다. 이들 실험데이터에서 조건와류해석에 필요한 차원의 속도상관관계 $f(r)$ 를 구하기 위해, 우선 $r_m = r/M$ 으로 하여, 실험데이터에서 곡선식을 최소자승법으로 구할 수 있다.

$$f(r_m) = (1.0 - 0.848 r_m + 0.713 r_m^2 - 0.193 r_m^3) \exp(-1.221 r_m) \quad (33)$$

여기에서 L_{11} 을 계산하면 0.013m이다. 다시 무차원수 $r^* = r/L_{11}$ 로서 무차원 $f(r^*)$ 을 구하면 다음과 같다.

$$f(r^*) = (1.0 - 0.435 r^* + 0.188 r^{*2} - 0.026 r^{*3}) \exp(-0.626 r^*) \quad (34)$$

Fig. 2에 이들 속도상관관계 $f(r^*)$, $g(r^*)$ 을 나타내었으며, 이때 Taylor의 길이척도를 기본으로 한 레이놀즈 수는 61.5이다(편의상 r^* 는 r 로 표시). 이 $f(r)$ 를 이용하여 주어진 $u(x)$ 에 대한 선형적

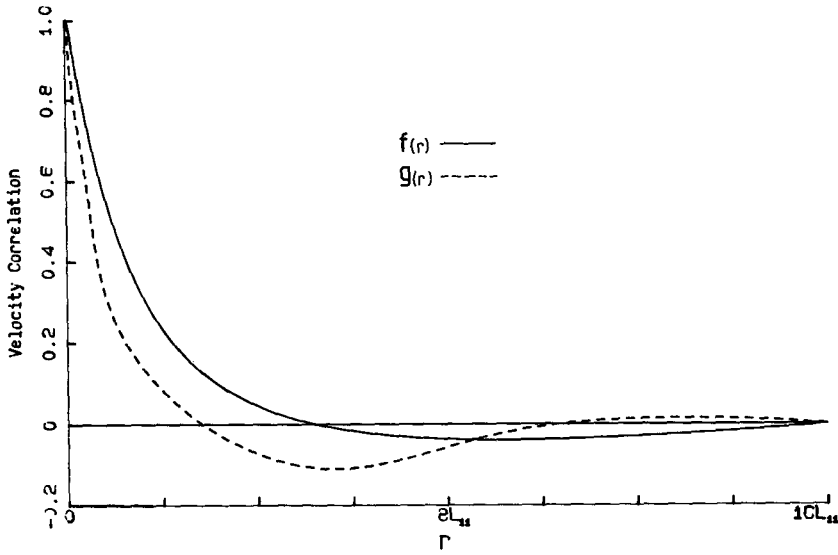


Fig. 2 Velocity correlation data of Van Atta and Chen ($Re_\lambda=61.5$)

조건와류를 식(28)에서 구하면 Fig. 3의 (a)와 같이 반지 모양의 와동이 생김을 알 수 있다. 이 반지모양 와동을 그리기 위한 유선(streamline)과 와동들은 $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$ 를 적분하여 구하였으며, NCAR (National Center for Atmospheric Research)의 프로그램을 이용하였다. 이 조건와류의 유선은 Adrian⁽⁷⁾과 Ditter⁽¹⁰⁾에 의해 해석되었으며, 다음의 Driscoll과 Kennedy의 스펙트럼 모델과 비교하기

위해 새로이 계산하였다.

r_1-r_2 평면에서의 주어진 $u(x)$ 에 대한 조건와류의 선형적 평가가 Fig. 3의(a)에 두개의 반지모양 와동으로 나타나짐을 발견할 수 있다. 등방성 난류 유동에서 주어진 속도에 대한 와동의 구조를 알수 있음은 바로 일반 이방성 난류유동에서 에너지 및 운동량의 전달에서 중요한 역할을 하고 있다는 머리핀와동의 구조해석을 할 수 있는 가능성⁽¹⁸⁾과 조직적이고 균일한 구조(coherent structure) 해석을

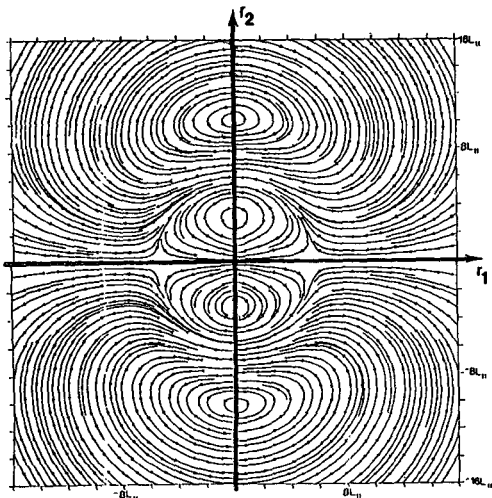


Fig. 3 (a) Streamlines in r_1-r_2 plane

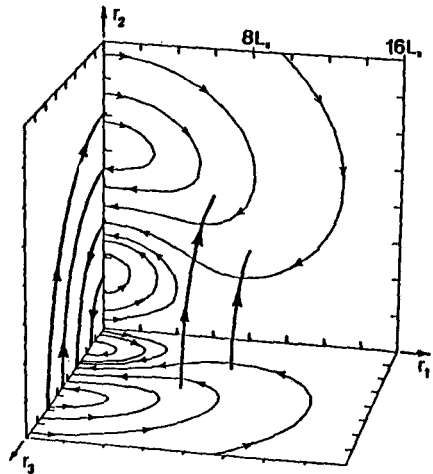


Fig. 3 (b) Selected streamlines and vortex lines

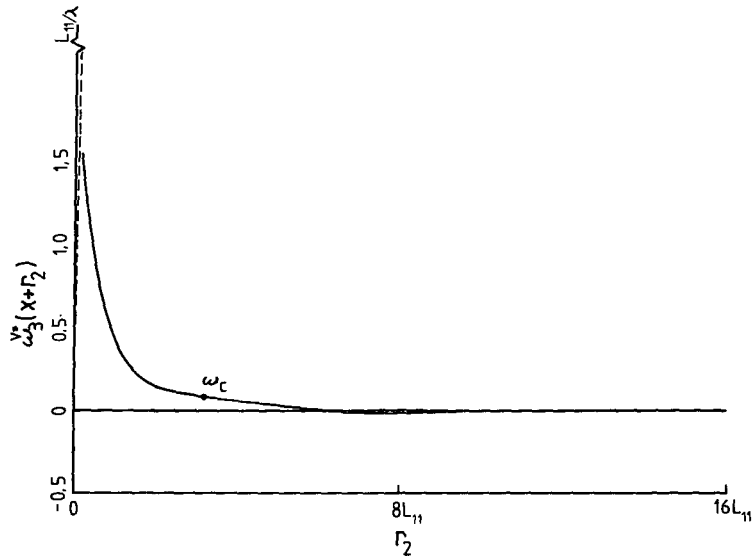


Fig. 4 Distribution of $\tilde{\omega}_3^*(x+r)$ along the r_2 -axis in the r_1 - r_2 plane

할 수 있을 것이다. Fig. 3의 (b)에는 3차원에 대하여 대표적인 유선과 와동들을 골라서 그려보았으며, 축 대칭임을 알 수 있다. Fig. 2와 비교하여 알 수 있듯이 반지모양 와동의 수는 바로 $g(r^*)$ 이 r^* 축과 교차하는 수와 일치하며, $(g(r^*)$ 이 r^* 축과 교차하는 점이 반지모양 와동의 중심) $f(r^*)$ 와는 그렇게 민감하게 유선에 영향을 미치지 않는다.

조건와류의 반지모양의 와동에 대한 와동은 r_1 축에 대해 대칭이다. 식 (29)에서 알 수 있듯이, $\tilde{\omega}_1(x+r)=0$ 이며 r_3 방향에 대한 와동분포는 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\tilde{\omega}_3(x+r) = -\frac{r_2}{2} \left\{ f''(r) + 4 \frac{f(r)}{r} \right\} u(x) \quad (35)$$

벽면근처의 점성영역 ($|r| < \lambda$)에서의 속도상관관계 $f(r)$ 은 $f(r) = 1 - r^2/2\lambda^2$ 의 식으로 전개할 수 있다⁽¹⁷⁾. 그러므로 와동분포는

$$\tilde{\omega}_3(x+r) = \frac{5r_2}{2\lambda^2} u(x), \quad r \ll \lambda \quad (36)$$

만일 길이척도를 적분길이척도 L_{11} 으로 잡으면, 주어진 속도 $u(x)$ 에 대한 시간척도는 $L_{11}/|u(x)|$ 로 될 수 있으며, 무차원 와동은 다음과 같다.

$$\tilde{\omega}_3^*(x+r) = \tilde{\omega}_3(x+r) L_{11}/|u(x)| \quad (37)$$

이러한 무차원 형태를 식 (35)와 식 (36)에 적용하여 r 축에 따라 r_3 방향의 와동분포를 나타낸 것이 Fig. 4이다. 여기서 벽면근처의 경계층 형태를 알 수 있는데, 점성영역의 $r=0$ 근처에서 급격히 증가하고

(점선), 이 영역 바깥에서는 점차적으로 감소하고 있다. Van Atta와 Chen의 데이터로는 벽면근처의 관성저층(inertial sublayer)에서의 와동분포를 얻기는 불가능하며, 이 영역이 바로 파동수(wavenumber)가 높은 영역으로 난류가 소멸되고 있다. 또한 Fig. 4에서는 구분이 확실하지 않지만 $r=7L_{11}$ 에서 $r=14L_{11}$ 까지는 음의 값을 나타내고 있음을 알 수 있다. ω_c 는 반지모양 와동의 중심으로서 바로 $g(r)$ 이 r 축과 교차하는 점이다.

3.2 Driscoll과 Kennedy의 난류에너지 스펙트럼 모델

만일 레이놀즈수가 작을 때의 속도상관관계를 얻을 수 있으면 관성저층에서의 와동분포를 얻을 수 있을 것이다. Driscoll과 Kennedy⁽¹²⁾는 등방성 난류 에너지 스펙트럼의 모델을 개발하였는데, 그들은 von Karman의 3차원 에너지 스펙트럼 $E(k)$ 를 수정하여, 다음의 관계식에서 1차원 에너지 스펙트럼 $E_1(k_1)$ 을 얻었다.

$$E_1(k_1) = \int_{k_1}^{\infty} \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2}\right) \frac{1}{k} E(k) dk \quad (38)$$

여기서 k 는 파동수이며, 그들은 에너지 스펙트럼을 얻기 위해 power 시리즈를 이용, Hill⁽²⁰⁾의 방정식에서 미정계수를 정하였으며, 시간척도에 대해서는 소멸영역을 고려한 Lin⁽¹⁹⁾과 Hill⁽²⁰⁾의 모델을 적용하였다. 이 모델은 기존의 von Karman 모델을 수

정한 복합적인 에너지 스펙트럼 모델로서 무차원화 한 1차원 에너지 스펙트럼 $\hat{E}_1(\hat{k}_1)$ 은 다음의 관계 식을 만족할때까지 반복계산한다.

$$Re_\lambda = (15)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \hat{E}_1(\hat{k}) d\hat{k} \quad (39)$$

에너지 영역에서의 주파수를 k_e 라 할때, 무차원 \hat{k}_e 는

$$\hat{k}_e = 4.35 (\alpha / Re_\lambda)^{\frac{3}{2}}, \quad \alpha = \text{const} \quad (40)$$

인데, 여기서부터 Driscoll과 Kennedy의 복합스펙

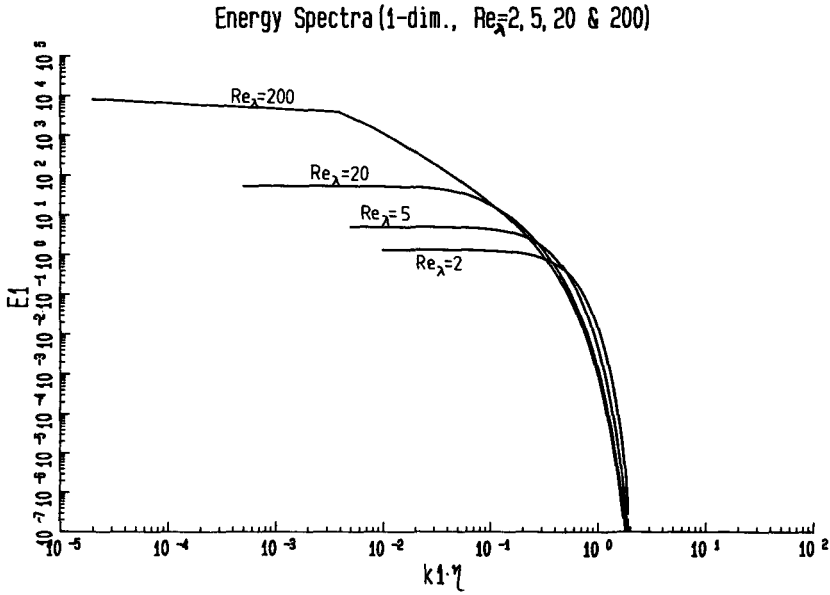


Fig. 5 (a) One dimensional energy spectra for $Re_\lambda = 2, 5, 20$ and 200

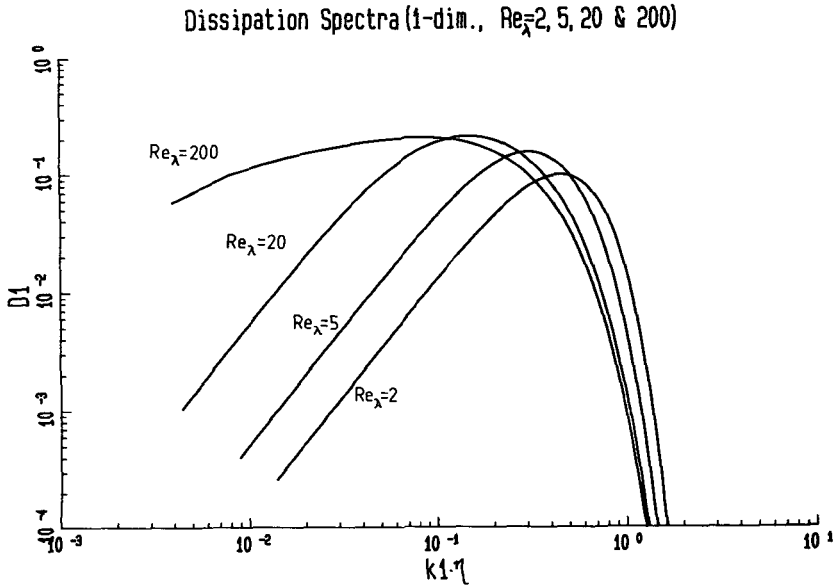


Fig. 5 (b) One dimensional dissipation spectra for $Re_\lambda = 2, 5, 20$ and 200

트럼 모델을 계산해 나가며, 식 (38)과 식 (39)를 만족 할때까지 계산한다. 본 연구에서는 그들의 모델을 적용, $Re_\lambda=2, 5, 20$ 그리고 200에 대하여 1차원 에너지 스펙트럼과 1차원 소멸 스펙트럼을 Fig. 5의 (a)와 (b)와 같이 얻을 수 있다. 여기서 소멸

스펙트럼은 $\hat{k}_i^2 \hat{E}_i(k_i)$ 로서 그들의 계산과 일치함을 발견할수 있다.

한편, 에너지 스펙트럼 tensor(Φ_{ij})와 속도 상관 관계의 관계식에서, 이들은 상호 Fourier transform으로 나타난다.

Longitudinal vel. corr. 'coef. ($Re_\lambda=2, 5, 20$ & 200)

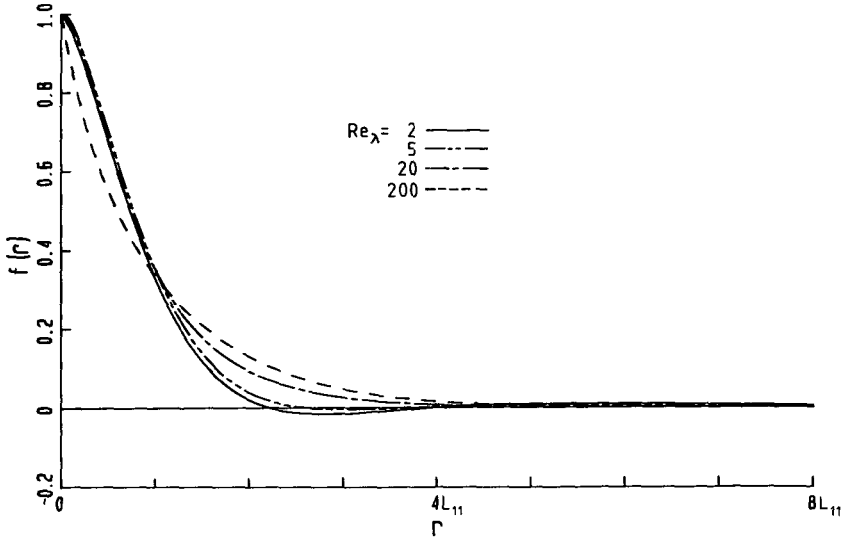


Fig. 6 (a) Velocity correlation, $f(r)$ for $Re_\lambda=2, 5, 20$ and 200

Lateral vel. cor. coef. ($Re=2, 5, 20$ & 200)

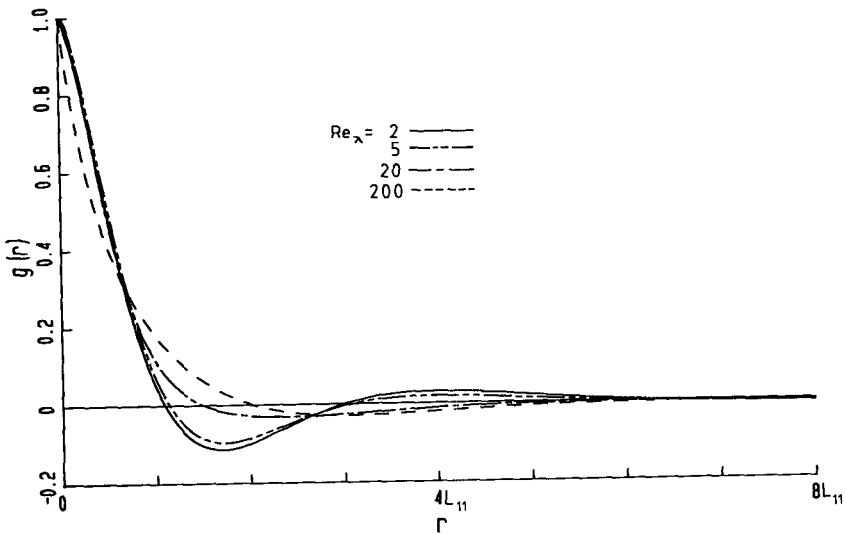


Fig. 6 (b) Velocity correlation, $g(r)$ for $Re_\lambda=2, 5, 20$ and 200

Table 1 Integral length scale and Taylor microscale for $Re_\lambda=2, 5, 20$ and 200

| Re_λ | 2 | 5 | 20 | 200 |
|--------------|--------|--------|--------|--------|
| L_{11} | 0.0031 | 0.0043 | 0.0107 | 0.1539 |
| λ | 0.0281 | 0.0162 | 0.0112 | 0.0145 |

$$\Phi_{ij}(k) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_V R_{ij}(r) e^{-ik \cdot r} dV \quad (41)$$

여기에서 1차원 에너지 스펙트럼에서 Nyquist

Criterion $\left(\Delta r = \frac{\pi}{k_{max}}\right)^{(21)}$ 을 만족하면서 역 Fourier transform을 취하면 1차원 속도상관관계를 구할수 있다.

$$A(r) = \int_0^\infty \hat{E}_1(\hat{k}_1) e^{i\hat{k}_1 r} d\hat{k}_1, \quad f(r) = \frac{A(r)}{A(0)} \quad (42)$$

4개의 Re_λ 수에 따른 $f(r)$ 과 $g(r)$ 이 Fig. 6에 나타나 있다.

적분길이척도 L_{11} 과 Taylor 길이척도 λ 는 정의에 의해

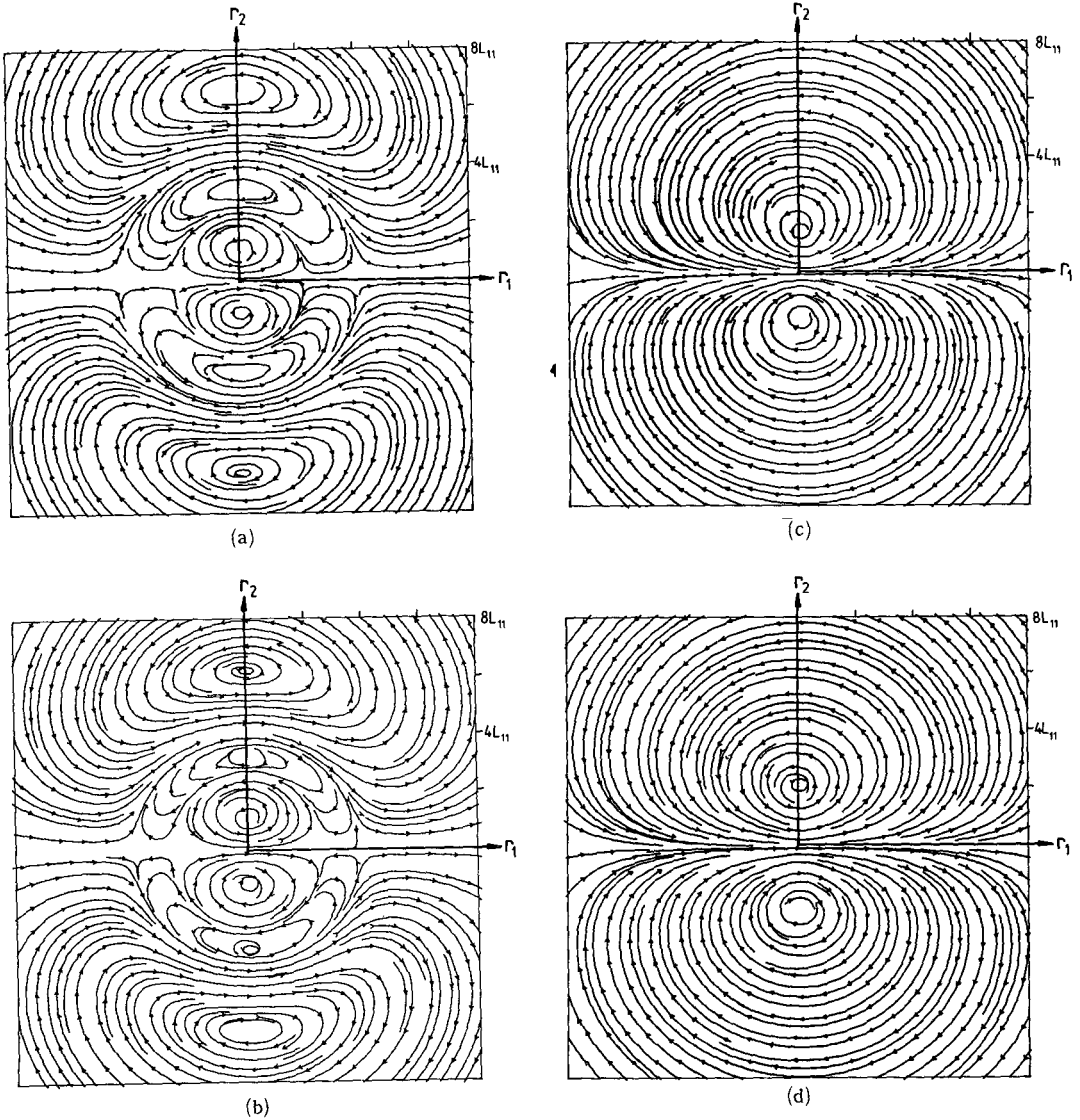


Fig. 7 Streamlines in r_1-r_2 plane for (a) $Re_\lambda=2$, (b) $Re_\lambda=5$, (c) $Re_\lambda=20$, and (d) $Re_\lambda=200$

$$L_{11} = \frac{1}{A(0)} \int_0^\infty A(r) dr = \frac{\hat{E}_1(0)}{A(0)} \quad (43)$$

$$\lambda \equiv \left[-\frac{2A(0)}{A''(0)} \right]^{\frac{1}{2}} \text{로} \quad (44)$$

구할수 있으며, 이들 값들은 Table 1에 정리되어 있다.

에너지 스펙트럼 모델로 부터 구한 1차원 속도상관 관계를 이용, 각 Re_λ 수에 따른 조건 와류를 Fig. 7에 보여주고 있다. Fig. 6의 (a)의 $f(r)$ 에서 알수 있듯이 $Re_\lambda=20$ 과 $Re_\lambda=200$ 은 r 이 커짐에 따라 점차적으로 감소하고 있으나, $Re_\lambda=2$ 와 $Re_\lambda=5$ 는 감소후 아주 약하게 증가하고 있다. 그러므로 Fig.

7에서는 $Re_\lambda=20$ 과 $Re_\lambda=200$ 에서는 $r=8L_{11}$ 까지에서 1개의 반지모양의 와동을 발견할수 있으며, $Re_\lambda=2$ 와 $Re_\lambda=5$ 에서는 3개의 반지모양의 와동을 보여주고 있다. 보다 이해를 돕기위해 각 Re_λ 수에 따른 속도상관관계의 등고선(isocorrelation line)을 그려보면, 전체 3차원에서의 속도상관관계를 예측할수 있는데, Fig. 8에 $R_{11}(r_1, r_2, 0)$ 과 $R_{12}(r_1, r_2, 0)$ 이 나타나 있다.

Re_λ 수에 따른 r_3 방향의 와동분포는 식 (35)와 같이 구할수 있는데, 적분길이 척도로서 무차원하여 구하면 Fig. 9와 같다. 벽면근처 관성저층에서의 와동분포를 잘 알수 있으며, 최대 와동의 크기

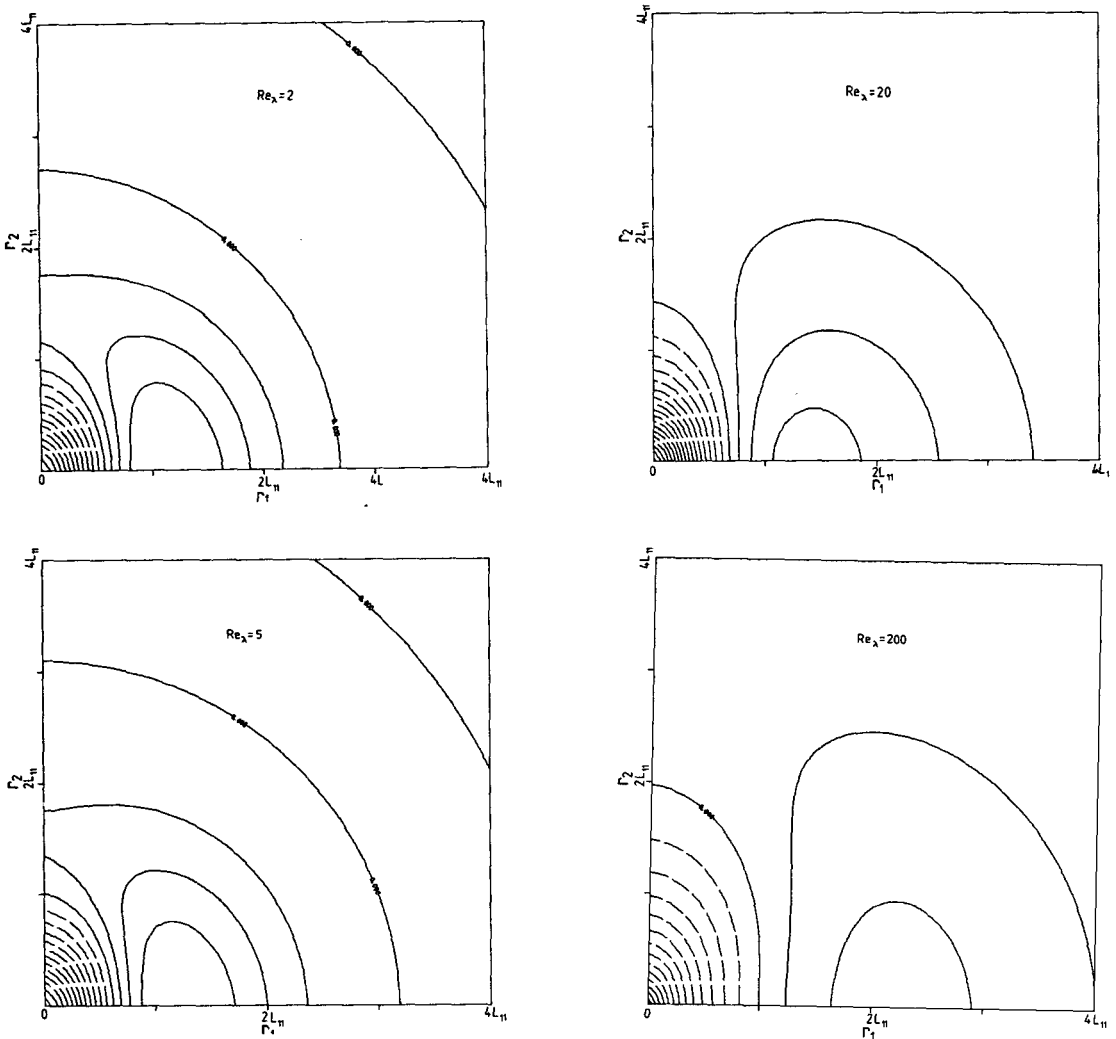


Fig. 8 Contours of (a) $R_{11}(r_1, r_2, 0)$.

(ω_{max})와 내부 반지모양의 와동에서의 와동의 크기(ω_c)의 비를 표로 나타내면 Table 2와 같다. 여기서 ω_c 는 $g(r)=0$ 인 $r=r_c$ 에서의 와동의 크기이다.

Re_λ 수가 2에서 20까지는 와동이 벽면에서부터 증가하여 ω_{max} 을 가진후 감소함을 알수 있으나, Re_λ 수가 200일때는 ω_{max} 에서 그대로 감소함을 보여주고 있다. 이는 적분길이척도로서, 와동을 무차원화할 경우, Re_λ 가 어느값 이상 커지면 큰 척도를 나타내는 척도로는 불가능함을 알수 있다. Taylor 길이척도로서 나타내면 Fig. 4처럼 벽면 가까이에서 급격히 증가함을 예측할수 있다. Re_λ 수

Table 2 Ratio of peak vorticity versus vorticity at the center of the ring vortex

| Re_λ | 2 | 5 | 20 | 200 |
|---------------------------------|--------|--------|--------|--------|
| ω_{max} | 1.577 | 1.591 | 1.723 | 2.675 |
| ω_c | 0.7143 | 0.6538 | 0.2142 | 0.1374 |
| $\frac{\omega_{max}}{\omega_c}$ | 2.2 | 2.4 | 8.0 | 19.5 |

가 클수록 반지모양 와동의 중심은 벽면에 접근하고, ω_{max} 는 증가하며 ω_{max}/ω_c 는 더욱 증가하고 있다. 이러한 예측은 벽면 가까이에서의 난류운동

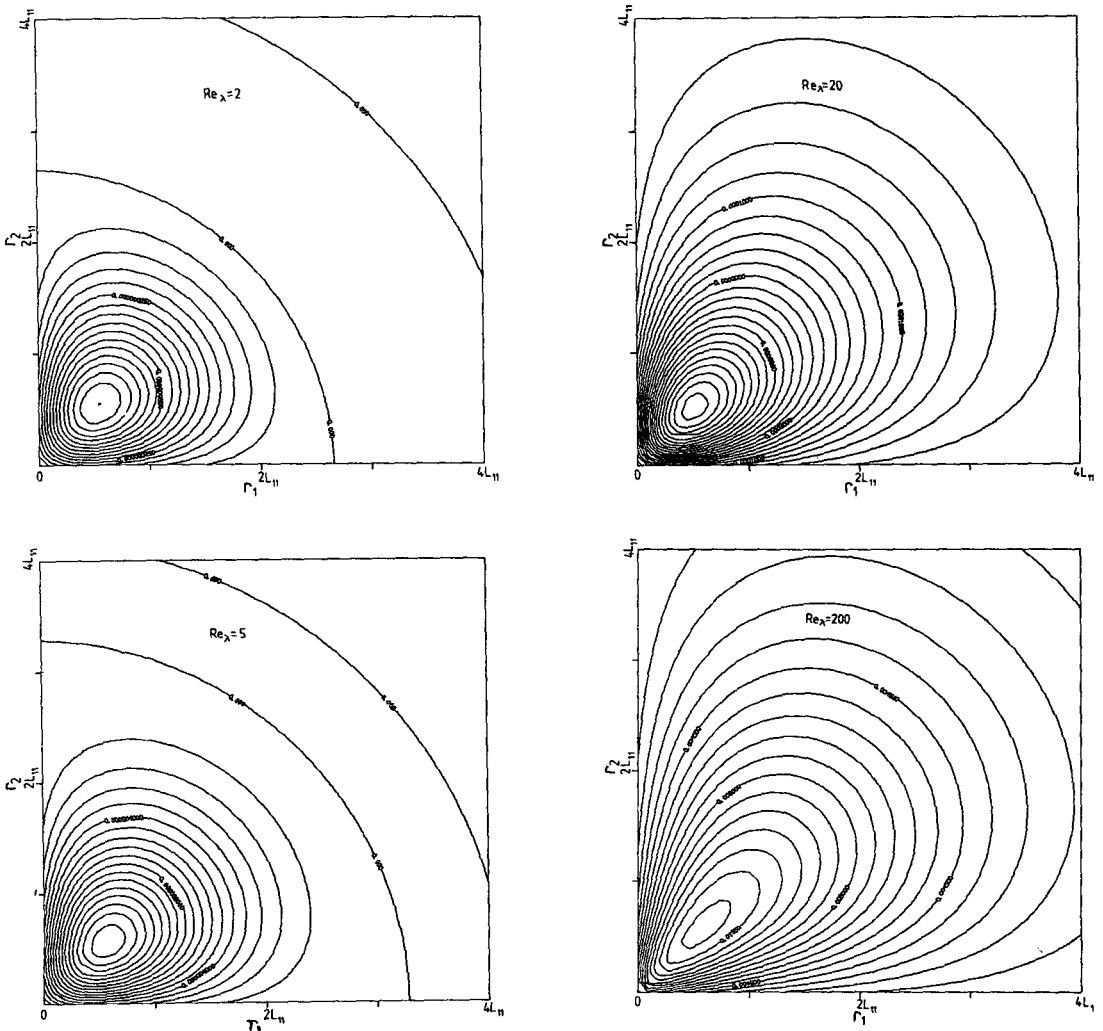


Fig. 8 Contours of (b) $R_{12}(r_1, r_2, 0)$

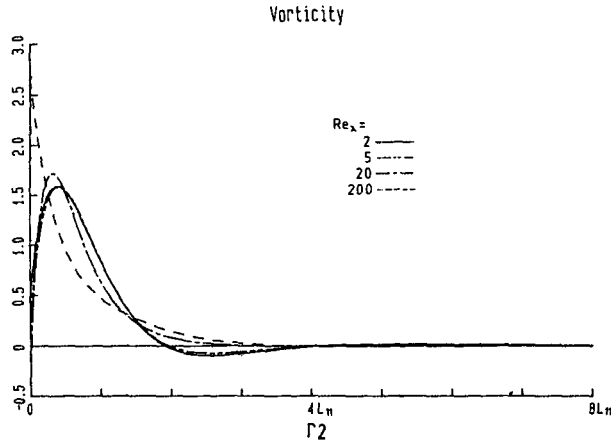


Fig. 9 Distribution of $\tilde{\omega}_3^*(x+r)$ along the r_2 -axis for $Re_\lambda=2, 5, 20$ and 200

에너지와 그에 대한 소멸율을 예측하는데 도움을 줄 것이다.

한편, Driscoll과 Kennedy의 스펙트럼 모델의 결과와 Van Atta와 Chen의 실험결과를 비교하기 위하여 같은 레이놀즈수($Re_\lambda=61.5$)에 대해 계산을 수행한 것이 Fig. 10에 나타나 있다. 상당히 일치하고 있음을 보여주고 있으나, r 이 커질수록 실험치가 음의 값으로 치중되고 있다.

4. 이방성분포에 대한 해석

4.1 평균전단유동에서의 와동구조

등방성 난류에서의 임의의 속도에 대한 조건와류의 형태는 반지모양 와동으로 나타내어짐을 발견할 수 있다. 그러면, 이방성 난류에서의 반지모양 와동의 형태는 일반 난류유동에서 여러가지 복합적인 형태로 조합되어 있음을 예측할 수 있으며, 여러 난류유동 실험에서 관측되는 와동구조와 비교할 수 있을 것이다.

우선 측정하고 싶은 유동장은 균일전단유동으로 $U=(Sx_2, 0, 0)$ 이며, 따라서 평균와동장은 $\langle \omega_i = \epsilon_{ijk} \partial U_k / \partial x_j \rangle = (0, 0, -S)$ 이 될 것이다. 와동의 크기를 특징지을 수 있는 무차원 와동수를 정하기 위해 내부 반지모양 와동의 중심에서의 와동의 크기 ω_c 와 그때의 적분길이척도 L_{11} 로써 다음과 같은 무차원와동수를 정의한다.

$$\Gamma_c = \omega_c L_{11} | u(x) | \tag{45}$$

한편 균일한 평균전단유동의 평균 와동장은 $(0, 0,$

$-S)$ 가 되므로, 이 평균와동장을 특정하기 위한 변수로 Γ_m 를 정의하여 Γ_c 와 Γ_m 의 비에 따라 전체 와동장의 구조를 해석한다.

$$\Gamma_m = SL_{11} / | u(x) | \tag{46}$$

4.2 전체와동장의 구조

평균전단유동장내의 전체 와동장은 식 (46)과 식 (29)로 주어지는 와동구조의 합이 된다.

$$\omega_i^{total} = \langle \omega_i \rangle + \tilde{\omega}_i(x+r) \tag{47}$$

여기서 식 (20)을 적용하면 $\langle \omega_i^{total} \rangle = \langle \omega_i \rangle$ 이다. 앞서 서술한대로 Γ_c 와 Γ_m 의 크기를 변화시키면서 전체 와동장 구조를 해석하려면, 변수로 $\Gamma = \Gamma_m / \Gamma_c = S / \omega_c$ 를 잡는다. $\Gamma = 1.0$ 일때는 바로 평균와동장은 조건와류의 반지모양 와동의 중심에서 와동과 상쇄되는 조건과 일치하며, 그때의 r_2-r_3 면에서의 전체 와동구조는 Fig. 10의 a)와 같이, 본래의 반지모양 와동은 $r=0$ 근처에서 $(0, 0, S)$ 그대로 보존되어 있으며, 그 바깥에서는 오메가형(Ω)의 와동구조가 나타남을 알 수 있다. 이런 오메가 형태의 와동구조는 일명 머리핀(hairpin) 모양과 비슷하다 하여 머리핀 와동이라고도 하며, 혹은 말발굽모양(horse-shape)와동이라고도 한다.

전체 와동장에서 Γ 의 값의 영향은 와동구조의 변화보다는 와동의 크기 즉 반지모양의 직경에 영향을 주고 있다. 예를 들어 $\Gamma=2.0$ 과 $\Gamma=0.5$ 를 비교하면 $\Gamma=0.5$ 일때 반지모양의 직경이 큼을 알 수 있다. 반면 Γ 의 값이 아주 커지면, 이러한 머리핀 와동현상이 나타나지 않는데, 이는 Γ_m 와 Γ_c

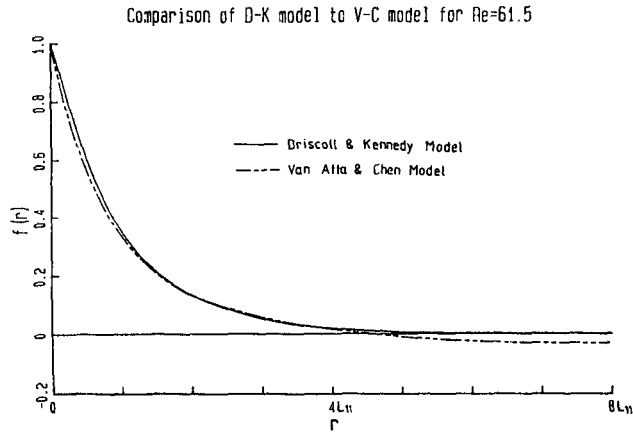


Fig. 10 Comparison of Driscoll and Kennedy model to Van Atta and Chen model for $Re_\lambda=61.5$

의 길이척도와 연관이 있다(Van Atta와 Chen의 경우 $\Gamma=150$ 임). 벽면근처에서는 Taylor의 길이척도를 사용해야 하는데(식 36), 이 경우 평균와동장의 크기가 $|u(x)|/\lambda$ 의 값을 초과하지 않으면 벽면근처에서도 조그만 머리핀와동이 발생함을 예측할 수 있다.

이러한 머리핀 와동이 실제유동에서 실험적으로 직접 관찰하기는 어렵지만 슈퍼컴퓨터를 사용해서 LES(large eddy simulation)을 수행한 데이터에서 여러가지 조건부 검색방법을 사용하여 이러한 머리핀 와동을 추출해 낼 수 있다. Kim과 Moin⁽¹⁸⁾은 이 머리핀 와동들이 바로 높은 레이놀즈 응력과 연관 지어지며, 난류운동 에너지를 생성하는데 중요한 역할을 한다고 서술하였지만 자세한 역할과 정성적, 정량적 분석은 아직 연구단계라고 볼 수 있다. 한 평면에서의 전체 와동장보다는 여러면에서의 와동선(vortex line)을 적분하여 3차원으로 그리면 Fig. 11의 (b)와 같은 와동군(vortex sheet)을 그릴 수 있다. 이는 Kim과 Moin⁽¹⁸⁾의 국소속도섭동에 의해 야기되는 머리핀 와동의 생성과정에서의 vortex-stretching mechanism과 거의 일치하고 있음을 발견할 수 있는데, 여기에서는 평균전단유동과 평균와동장이 서로 수직일때와 적당한 크기의 Γ 일때로서, 그렇지 않는 일반적인 경우에는 더욱 복잡한 와동현상이 나타날 것이다.

5. 결 론

주어진 난류속도(velocity fluctuation)에 대한 선

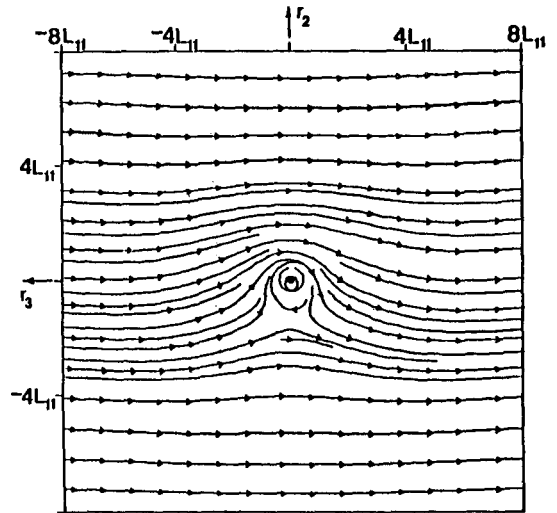


Fig. 11 (a) Vortex lines in total flow given by $\Gamma=1.0$

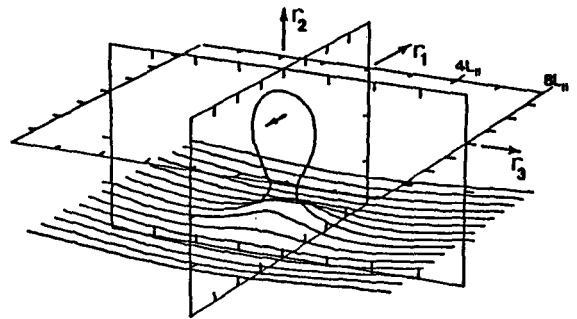


Fig. 11 (b) Vortex sheet in total flow given by $\Gamma=1.0$

형적 조건과류를 등방성 난류에 대하여 수행하였다. 이 경우 속도의 상관관계, Taylor의 길이척도 그리고 속도의 RMS값인 σ_v 의 스칼라량들로서 조건과류와 와동장 구조의 해석이 가능하다. 이들 해석을 위해서는 Van Atta와 Chen의 등방성 난류실험치로부터, 그리고 레이놀즈수의 영향을 고려할수 있는 Driscoll과 Kennedy의 등방성 난류에너지 스펙트럼을 사용하여 속도상관관계 등을 계산, 적용하였다. 점성의 영향이 없는 반지모양 와동의 중심에서 큰 와동이 존재하며, 이는 각층기법의 실험에서의 발견과 일치하고 있다. 최대와동크기(ω_{max})와 반지모양 와동중심에서의 와동크기(ω_c)를 구함으로써 와동구조의 정량적 해석이 가능하며, 레이놀즈수가 커짐에 따라 평균전단유동과 선형조건과류의 와동장을 중첩함으로써 이방성 난류분포를 해석하였는데, 적당한 크기의 변수 L 와 평균전단유동과 와동장이 서로 수직일때 난류전단응력과 서로 연관되어 있는 머리핀모양 와동이 발생됨을 알 수 있다. 이 결과는 LES의 결과인 Kim과 Moin의 결과와 일치하고 있으며, 벽면 근처의 아주 큰 와동은 전체와동장에 큰 영향을 주고 있다.

이 머리핀모양 와동의 중요성은 인정되고 있으나, 이에 대한 연구는 아직 미흡한 상태이다.

후 기

본 연구는 1986년도 한국과학재단의 연구비에 의해 연구되었으며, 관계자 여러분께 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

- (1) B. Cantwell, 1981, "Organized Motion in Turbulent Flow", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 13, p. 457.
- (2) J. L. Lumley, 1970, "Stochastic Tools in Turbulence", Academic Press.
- (3) J. L. Lumley, 1981, "Coherent Structure in Turbulence", "In Transition and Turbulence" (Ed. R. E. Meyer), pp. 215~241. Academic Press.
- (4) P. Moin and J. Kim, 1985, "The Structure of the Vorticity Field in Turbulent Channel Flow, Part 1. Analysis of Instantaneous Fields and Statistical Correlations", *J. Fluid Mech.*, Vol. 155, pp. 441~464.
- (5) J. Kim, 1985, "Turbulence Structures Associated with the Bursting Event", *Phys. fluids*, Vol. 28, No. 1, pp. 52~58.
- (6) R. J. Adrian, 1977, "On the Role of Conditional Averages in Turbulence Theory", In *Turbulence in Liquids: Proceedings of the Fourth Biennial Symposium on Turbulence in Liquids*, Sep. 1975. Ed. J. L. Zakin and G. K. Patterson, Science Press. pp. 323~332.
- (7) R. J. Adrian, 1979, "Conditional Eddies in Isotropic Turbulence", *Phys. Fluids* Vol. 22, No. 11, pp. 2065~2070.
- (8) A. Papoulis, 1984, "Probability, Random Variables and Stochastic Theory", 2nd Ed., McGraw-Hill.
- (9) T. C. Tung and R. J. Adrian, 1980, "Higher-Order Estimates of Conditional Eddies in Isotropic Turbulence", *Phys. Fluids*, Vol. 23, No. 7, pp. 1469~1470.
- (10) J. Ditter, 1987, "Stochastic Estimates of Eddies Conditioned on Local Kinematics; Isotropic Turbulence", M.S. Thesis, Dept. of Theoretical and Applied Mechanics, Univ. Illinois, Illinois.
- (11) C. W. Van Atta and W. Y. Chen, 1968, "Correlation Measurements in Grid Turbulence Using Digital Harmonic Analysis", *J. Fluid Mech.*, Vol. 34, pp. 497~515.
- (12) R. J. Driscoll and L. A. Kennedy, 1983, "A Model for the Turbulent Energy Spectrum", *Phys. Fluids*, Vol. 26, pp. 1228~1233.
- (13) J. B. Thomas, 1984, "An Introduction to Applied Probability and Random Process," Robert E. Krieger Publishing Comp. Inc.
- (14) S. Panchev, 1971, "Random Functions and Turbulence", Pergamon Press.
- (15) R. J. Adrian and P. Moin, 1987, "Stochastic Estimation of Organized Turbulent Structure: Homogeneous Shear Flow", To appear in *J. Fluid Mech.*
- (16) H. Tennekes and J. L. Lumley, 1972, "A First Course in Turbulence", The MIT Press.
- (17) J. Kim and P. Moin, 1986, "The Structure of the Vorticity Fields in Turbulent Channel Flow. Part 2. Study of Ensemble-Averaged Fields", *J. Fluid Mech.*, Vol. 162, pp. 339~363.
- (18) J. T. Lin, 1972, "Velocity Spectrum of Locally Isotropic Turbulence in the Inertial and Dissipation Ranges", *Phys. Fluids*, Vol. 15, pp. 205~207.
- (19) R. J. Hill, 1978, "Models of the Scalar Spectrum for Turbulent Advection", *J. Fluid Mech.*, Vol. 88, pp. 541~562.
- (20) E. O. Brigham, 1980, "The Fast Fourier Transform", Prentice-Hall Inc.