

<論 文>

스프링특성의 근사법과 입력토크 평형문제에의 응용

신 재 균*

(1988년 6월 14일 접수)

A Method of Approximating Spring Characteristic and Its Application to the Problem of Balancing Input Torques

Jae Kyun Shin

Key Words : Balancing(평형), Spring(스프링), Input Torque(입력토크), Four Bar Mechanism(4절 기구)

Abstract

An efficient method for designing balancing springs to be used for dynamic balancing of planar mechanisms was studied. In spite of its wide application in the field of balancing problems such as balancing of input torques, clearance effects etc., there have been few efficient ways of determining the specifications of the balancing springs. To improve this problem, a method of approximating the characteristic of linear springs was suggested and its validity was checked through an analysis of errors. Further, through an example of a balancing problem to reduce the fluctuation of input torques of a 4bar mechanism, it was shown that the proposed method of approximation simplifies the design equations and a satisfactory result can be found efficiently.

기 호 설 명

A : 스프링의 고정점
 a : A 점의 x 좌표
 $a_{1t}, a_{1n}, a_{2t}, \dots$: 연결력 표현에 사용된 계수
 $b_{1t}, b_{1n}, b_{2t}, \dots$: 연결력 표현에 사용된 계수
 E : 스프링력의 상대오차
 F_0, F_1, \dots : 조인트의 연결력
 I_2, I_3 : 링크2, 3의 R_1, R_3 에 대한 회전관성능률
 J : 입력토크 평형문제의 목적함수
 k : 스프링 상수
 l_0 : 스프링의 자유길이
 $l_1 - l_4$: 링크길이
 l_s : 스프링피봇의 커플러 상의 위치
 $l_{1c} - l_{3c}$: 무게중심의 위치
 $m_1 - m_3$: 링크질량

R_{min} : 스프링 이동피봇의 궤적을 포함하는 최소원반경
 S, S' : 스프링력의 근사크기, 참크기
 T : 입력토크
 U : 스프링의 탄성에너지
 $u_0 - u_3$: 입력토크식의 표현에 사용된 변수
 XY : 전체좌표계
 xy : 스프링좌표계
 $x_1 - x_3$: 입력토크식의 표현에 사용된 변수
 X_0, Y_0 : xy 좌표계 원점의 XY 좌표
 α_s : 스프링 이동피봇의 커플러상의 각도
 δ : 스프링의 변형량
 $\phi_1 - \phi_3$: 링크의 각도
 θ : xy 좌표계와 XY 좌표계 사이의 각도

상첨자
 o : 원래기구에 대한 값을 표현
 s : 스프링만 있는 계에 대한 값을 표현

*정회원, 영남대학교 공과대학 기계설계학과

: RMS 값을 표시

1. 서 론

생산성의 향상을 위한 기계나 기구의 고속화는 바람직하지 못한 진동이나 소음 등의 문제를 야기시킨다. 이러한 진동의 동역학적 원인으로서는 기계의 위상에 따른 관성력의 변화가 지적된다. 구체적으로 기계를 지지하는 틀(frame)에 전달되어 진동을 유발케 되는 불균형력(shaking force), 불균형모멘트(shaking moment)^(1,2) 기계의 부드러운 회전을 방해하거나 필요 이상의 용량을 가진 모터를 요구케하는 입력토크의 지나친 변동⁽³⁾ 등과 같이 전체기계에 관계되는 현상이나, 조인트에 존재하게 되는 간극(clearance)에 의한 간극효과^(4~6)나 연결력(joint force)의 크기 문제 등과 같이 각각의 조인트에 관계되는 국부적인 현상 등이 모두 이러한 불균일한 관성력에 기인한다고 볼 수 있다. 이런 여러 가지의 불균형량들을 소거하기 위한 평형방법은 여러 연구가들에 의하여 수행되었으며, 이들의 연구에 나타난 대표적인 평형수단으로서는 평형질량법^(1~3,7,13)과 평형스프링법^(5,6,8~11) 등을 들 수 있다. 이들 중 스프링의 이용법은 주로 기구의 입력토크 특성의 향상이나 간극효과의 완화라는 측면에서 이용되었는데, 그 이유는 기존의 기구에 스프링을 부착할 경우 불균형력이나 불균형모멘트 등에는 영향을 주지 않기 때문이다. 스프링법은 질량법과 달리 기구의 작동조건, 예를 들어 기구의 속도가 달라지면 그 체원이 달라져야 한다는 점과, 설치상의 문제점 등 외에, 특히 그 설계체원을 결정하는 손쉬운 방법이 없었기 때문에, 비교적 제한적으로 사용되었다. 그러나, 기구에 링크들의 관성 부하 이외의 작동부하가 존재할 때, 스프링의 이용법은 질량법보다 더 효과적이며, 질량법의 단점으로 생각되는 연결력의 증대문제의 해결에도 스프링의 이용이 효과적일 수 있음은 지적된 바 있다⁽⁶⁾. 또한, 스프링의 체원을 비교적 간단한 계산으로 결정할 수 있는 방법에 대한 연구로서 Matthew 등의 연구를 들 수 있다^(10,11). 이들의 연구에서는 자유길이(free length)가 0인 스프링을 가정함으로써, 예를들어 기구의 입력토크 특성의 향상을 위한 평형스프링의 설계문제 등이 해석적으로 접근될 수 있음을 보였다. 그러나, 자유길이 0인 스프링은 일반적으로 그 실현성에 어려움이 있으며, 이 점은

이들 연구의 중요한 문제점의 하나로 지적되었다. 본 연구에서는 이러한 문제점을 해결하여, 실제적인 평형스프링을 비교적 단순한 계산에 의해 설계할 수 있는 방법의 하나로서, 선형스프링의 근사법을 제시하였으며, 이 근사법을 4절 기구의 입력토크 특성 of 的 향상문제에 적용하여 유용한 결과가 얻어짐을 보였다.

2. 스프링 특성의 근사

먼저 Fig. 1(a)와 같은 선형스프링을 생각하자. 스프링의 한 고정점은 A(a, 0)에 있고, 스프링 상수는 k, 자유길이는 l₀인 인장 스프링이라고 한다. 만약, δ₀=a-l₀라고 두면, δ₀는 스프링의 이동피봇 Q(x, y)가 xy 좌표계의 원점 o에 있을 때의 인장량을 나타낸다. 그림의 상태에서 스프링의 인장량 δ는 다음식으로 주어진다.

$$\delta = \sqrt{(a-x)^2 + y^2} - l_0 \tag{1}$$

이때, 스프링의 탄성에너지 U는 다음식과 같다.

$$U = 1/2k\delta^2 \tag{2}$$

만약 스프링의 이동피봇의 Q의 위치가 xy 좌표계의 원점 o의 주위에 한정되어서

$$|x/a|, |y/a| \ll 1 \tag{3}$$

을 만족한다면, Taylor 급수전개에 의하여 식 (1)을 제곱한 δ²는 근사적으로 다음식과 같이 됨을 쉽게 보일 수 있다.

$$\delta^2 \cong \delta_0^2 - 2\delta_0x + x^2 + (\delta_0/a)y^2 \tag{4}$$

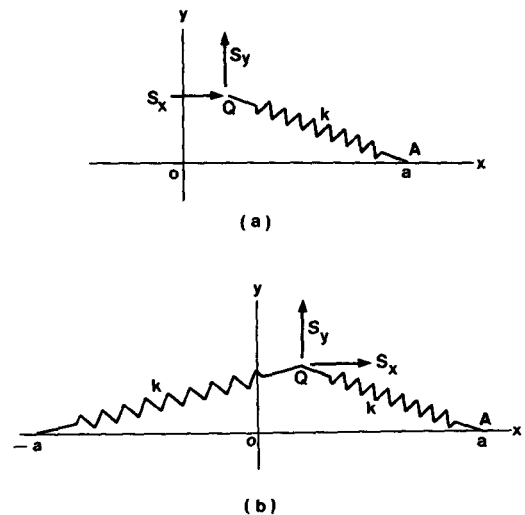


Fig. 1 (a) Single spring (b) Twin springs

식 (4)를 식 (2)에 대입하면

$$U \cong 1/2k(\delta_0^2 - 2\delta_0x + x^2 + (\delta_0/a)y^2) \quad (5)$$

로 쓸 수 있다. 또한 스프링력의 x , y 의 방향성분 S_x , S_y 는 근사적으로

$$S_x = \partial U / \partial x \cong k(-\delta_0 + x) \quad (6)$$

$$S_y = \partial U / \partial y \cong k(\delta_0/a)y \quad (7)$$

로 주어지며, 그 크기 $S = (S_x^2 + S_y^2)^{1/2}$ 는 식 (7)과 같다.

$$S = ka((\delta_0/a)^2 - 2(\delta_0/a)(x/a) + (x/a)^2 + (\delta_0/a)^2(y/a)^2)^{1/2} \quad (7)$$

한편, 스프링력의 참크기 S' 는 식 (1)로부터, 다음과 같으며,

$$S' = k(\sqrt{(a-x)^2 + y^2} - l_0) \quad (8)$$

식 (7)로 근사된 스프링력의 참크기에 대한 상대오차 E 는

$$E = (S - S') / S' = \frac{\{[(\delta_0/a) - (x/a)]^2 + (\delta_0/a)^2(y/a)^2\}^{1/2} - \sqrt{(1-x/a)^2 + (y/a)^2} - (\delta_0/a) + 1}{\sqrt{(1-x/a)^2 + (y/a)^2} + \delta_0/a - 1} \quad (9)$$

로 표현되어, $E = E(x/a, y/a, \delta_0/a)$ 로 나타남을 알 수 있다. 한편, Fig. 1(b)와 같이 대칭적으로 분포된 한 쌍의 스프링의 경우, 이상의 논의와 동일한 방법으로 다음의 근사식을 유도할 수 있다.

$$U \cong k(\delta_0^2 + x^2 + (\delta_0/a)y^2) \quad (10)$$

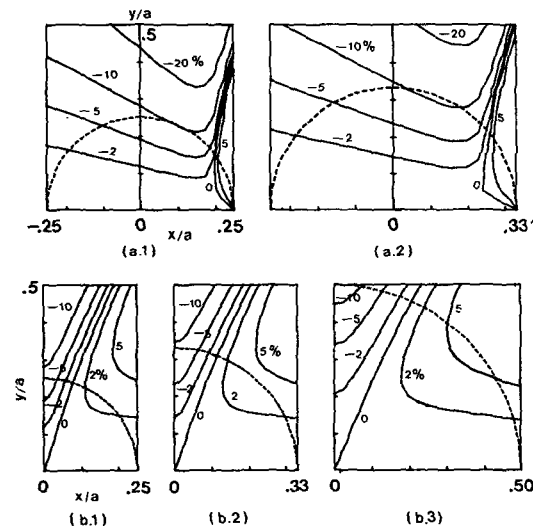


Fig. 2 Relative errors of approximate spring forces
 (a. 1) Single spring ($\delta_0/a = .25$)
 (a. 2) Single spring ($\delta_0/a = .33$)
 (b. 1) Twin springs ($\delta_0/a = .25$)
 (b. 2) Twin springs ($\delta_0/a = .33$)
 (b. 3) Twin springs ($\delta_0/a = .50$)

$$S_x \cong 2kx$$

$$S_y \cong 2k(\delta_0/a)y \quad (11)$$

또한, 이 경우에도 근사스프링력의 상대오차는 $E = E(x/a, y/a, \delta_0/a)$ 로 표현됨을 보일 수 있다.

이상에서 유도된 스프링력의 오차를 식 (9)등을 이용하여 계산하고, 그 결과를 Fig. 2에 나타내었다. 전술한대로 오차는 δ_0/a , x/a , y/a 에만 의존하므로 δ_0/a 를 변화시켜 가면서 조사하였다. 먼저 Fig. 2(a)에는 Fig. 1(a)의 경우와 같이 하나의 스프링의 경우에 대한 오차를 등고선형태로 표시하였는데, 식 (9)를 주어진 δ_0/a 에 대하여 $(x/a, y/a)$ 를 변화시켜가며 계산한 것이다. 오차의 크기는 (x/a) 축에 대하여 대칭이므로 (y/a) 가 +인 경우만 그렸으며, 인장스프링을 고려하였기 때문에 (x/a) 의 값이 δ_0/a 보다 큰 경우는 표시하지 않았다. 제 3절에서 자세히 논의될 것이지만, 본 연구에서 관심을 가지는 $x/a, y/a$ 의 범위는 $\sqrt{(x/a)^2 + (y/a)^2} \leq \delta_0/a$ 의 범위이며, 이러한 범위는 각 그림에 나타난 점선으로 표시된 원호의 내부가 된다. $\delta_0/a = 0.25, 0.33$ 어느 경우나 원호 내부의 영역에 대해서는 상대오차의 크기가 최대 10% 정도이며, 대부분의 영역에서 5% 이내로 작아짐을 볼 수 있다. 한편, Fig. 2(b)에는 2개의 대칭스프링의 경우에 대한 근사 스프링력의 상대오차를 표시하였다. 이 경우에는 오차가 (x/a) 축, (y/a) 축에 대하여 대칭이므로 제 1사분면만 그림에 나타내었다. 이 경우에도 단일 스프링의 경우와 비슷한 오차의 경향을 말할 수 있다.

3. 4절 기구의 입력토크의 평형

3.1 개 요

앞 절에서 논한 스프링 특성의 근사법을 이용하여 입력토크의 평형을 위한 평형스프링의 설계문제를 시도하였다. Fig. 3과 같이 한쌍의 스프링이 부착된 4절기구를 생각하자. 스프링의 이동피봇 Q 는 커플러 상에 있다고 가정하였다. 스프링의 갯수가 달라지거나, 이동피봇이 출력링크상에 있는 경우에도, 앞으로 설명될 설계절차가 유사하게 적용될 수 있을 것이다. Fig. 3에 나타난 한 쌍의 대칭스프링의 제원을 결정하기 위해서는 최대 8개의 변수를 결정해야 한다. 이들을 살펴보면, 스프링상수 k , 자유길이 l_0 , x 축상의 고정피봇과 xy 좌표계의

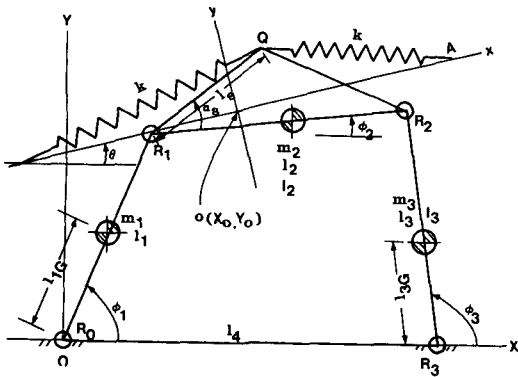


Fig. 3 Four bar mechanism with balancing springs

원점과의 거리 a , xy 좌표계의 원점의 좌표 X_0, Y_0 , xy 축의 XY 축에 대한 기울기 θ 및 이동피봇의 커플러상의 위치 l_s, α_s 등이다. 이들 8개의 변수중, 본 연구에서는 스프링의 이동피봇 l_s, α_s 의 값이 주어졌 있다고 가정하고 나머지 6개의 변수를 최적적으로 결정하는 문제를 고려하였다. 이를 위하여 먼저 스프링이 있는 계에 대한 동역학적 해석을 통하여 입력토크나 조인트의 연결력 등을 구하고, 최적 설계문제로 유도한 뒤 간단한 방법으로 해를 구하고, 구해진 평형스프링이 입력토크와 특히 연결력 등에 어떤 정도의 영향을 끼치는지 예로써 조사하였다.

스프링이 부착된 계에 대한 입력토크나 조인트의 연결력 등은 스프링이 없는 원래기구에 대한 해석과 질량이 없고 스프링만 있는 경우에 대한 정역학적 해석의 결과를 중첩하여 얻을 수 있음은 잘 알려져 있다⁽⁶⁾. 스프링이 없는 원래기구에 대한 해석⁽¹⁴⁾은 생략하였다. 원래기구에 대한 해석에서는 입력토크, 조인트의 연결력 등이 계산되었으며, 이러한 량들을 표시하기 위하여 상첨자 0을 사용하였다.

3.2 스프링만 고려한 계의 해석

스프링만 있는 계에 대한 정역학적 해석은 다음과 같다. Fig. 4에는 이 경우의 해석을 위한 자유물체도가 그려져 있다. 스프링만 고려한 계에 대한 연결력 등은 모두 상첨자 s 를 써서 표기하였다. 또한, 해석의 편의를 위하여 조인트의 연결력을 모두 입·출력링크에 대한 접선 및 수직성분으로 나누었고 각각 하첨자 t, n 을 써서 기술했다. Fig. 4에서 S_x, S_y 는 스프링력의 x, y 성분을 나타낸다. 먼저 커플러 R_1 조인트에 대한 모멘트 평

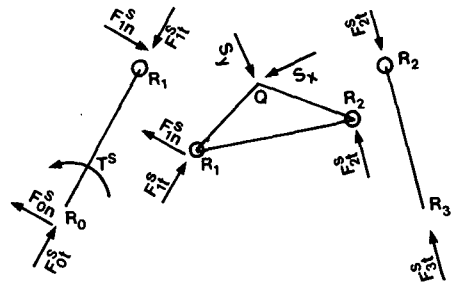


Fig. 4 Free body diagram for the static analysis of sprung system

형조건은 다음 식과 같다.

$$l_2 \sin(\phi_3 - \phi_2) F_{2t}^s = l_s \cos(\alpha_s + \phi_2) (S_x \sin \theta + S_y \cos \theta) - l_s \sin(\alpha_s + \phi_2) (S_x \cos \theta - S_y \sin \theta) \quad (12)$$

식 (12)를 정리하면 F_{2t}^s 는 다음과 같이 쓸 수 있음을 알 수 있다.

$$F_{2t}^s = a_{2t} S_x + b_{2t} S_y \quad (13)$$

$$\text{단, } \begin{cases} a_{2t} = \frac{l_s \sin(\theta - \alpha_s - \phi_2)}{l_2 \sin(\phi_3 - \phi_2)} \\ b_{2t} = \frac{l_s \cos(\theta - \alpha_s - \phi_2)}{l_2 \sin(\phi_3 - \phi_2)} \end{cases}$$

또, 커플러에 대한 두 개의 힘의 평형조건에서부터 F_{1t}^s, F_{1n}^s 등을 구하면 다음과 같다.

$$F_{1t}^s = a_{1t} S_x + b_{1t} S_y \quad (14)$$

$$\begin{cases} a_{1t} = a_{2t} \cos(\phi_3 - \phi_1) + \cos(\theta - \phi_1) \\ b_{1t} = b_{2t} \cos(\phi_3 - \phi_1) - \sin(\theta - \phi_1) \end{cases}$$

$$F_{1n}^s = a_{1n} S_x + b_{1n} S_y \quad (15)$$

$$\begin{cases} a_{1n} = -a_{2t} \sin(\phi_3 - \phi_1) + \sin(\theta - \phi_1) \\ b_{1n} = -b_{2t} \sin(\phi_3 - \phi_1) + \cos(\theta - \phi_1) \end{cases}$$

또,

$$\begin{cases} F_{0t}^s = F_{1t}^s \\ F_{0n}^s = F_{1n}^s \\ F_{3t}^s = F_{2t}^s \end{cases} \quad (16)$$

이고, 입력토크는 다음식과 같이 된다.

$$T^s = l_1 F_{1n}^s \quad (17)$$

3.3 전체계에 대한 입력토크식 등의 유도

전체계에 대한 입력토크 T 는 스프링이 없는 계에 대한 입력토크 T^0 와 스프링만 고려한 입력토크 T^s 의 합으로 구해지므로, 다음 식과 같이 된다.

$$T = T^s + T^0 = l_1 F_{1n}^s + T^0 \quad (18)$$

또, 식 (15)에 식 (11)을 대입하면

$$F_{1n}^s = a_{1n}Sx + b_{1n}Sy = a_{1n} \cdot 2kx + b_{1n} \cdot 2k(\delta_0/a)y \quad (19)$$

여기서 x , y 는 스프링의 특성을 기술하기 위한 국부좌표계로서, 전체좌표계 X , Y 와의 좌표변환공식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} x \\ y \end{cases} = \begin{cases} \cos \theta, \sin \theta \\ -\sin \theta, \cos \theta \end{cases} \begin{cases} X - X_0 \\ Y - Y_0 \end{cases} \quad (20)$$

식 (20)을 식 (19)에 대입하면, F_{1n}^s 는 다음과 같이 정리된다.

$$F_{1n}^s = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 \quad (21)$$

$$\text{단, } x_1 = 2k, \quad x_2 = 2kX_0, \quad x_3 = 2kY_0 \quad (22)$$

$$\begin{cases} u_1 = (\cos \theta \cdot X + \sin \theta \cdot Y) a_{1n} - (\delta_0/a) \\ \quad (\sin \theta \cdot X - \cos \theta \cdot Y) b_{1n} \\ u_2 = -\cos \theta \cdot a_{1n} + (\delta_0/a) \sin \theta \cdot b_{1n} \\ u_3 = -\sin \theta \cdot a_{1n} - (\delta_0/a) \cos \theta \cdot b_{1n} \end{cases} \quad (23)$$

식 (15), (23)으로부터 $u_i = u_i(\delta_0/a, \theta, l_s, \alpha_s; t)$ 로 됨을 알 수 있다. 또, 식 (21)을 (18)에 대입하면 최종적으로 전체계에 대한 입력토크는

$$T = l_1(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) + T^0 \quad (24)$$

로 표현된다. 또, 표현의 간편화를 위하여

$$u_0 = T^0/l_1 \quad (25)$$

이라 두면, 식 (24)는 다음과 같이 된다.

$$T = l_1(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + u_0) \quad (26)$$

이상과 동일한 방법으로 나머지 조인트의 연결력 성분을 구하여 정리하면 다음식과 같다.

$$F_{1t} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + F_{1t}^0 \quad (27)$$

$$F_{2t} = x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 + F_{2t}^0 \quad (28)$$

$$\text{단, } \begin{cases} v_1 = (\cos \theta X + \sin \theta Y) a_{1t} - (\delta_0/a) \\ \quad (\sin \theta \cdot X - \cos \theta \cdot Y) b_{1t} \\ v_2 = -\cos \theta a_{1t} + (\delta_0/a) \sin \theta b_{1t} \\ v_3 = -\sin \theta a_{1t} - (\delta_0/a) \cos \theta b_{1t} \end{cases} \quad (29)$$

또, 식 (28)에서 w_1 , w_2 , w_3 는 식 (29)의 v_1 , v_2 , v_3 에 a_{1t} 대신 a_{1n} , b_{1t} 대신 b_{1n} 를 대입하여 얻을 수 있고, 식 (23)과 식 (29)는 유사하게 표현됨을 볼 수 있다.

3.4 입력토크 평형문제의 정의 및 해법

기구의 입력토크 특성을 흔히 한 주기에 대한 RMS(Root-Mean-Square) 값으로 평가하며⁽¹³⁾, RMS 값이 작을수록 입력토크의 특성이 향상된 것으로 간주한다. 본 연구에서도 이 방법을 채택하여, 평형스프링을 최적화하여 입력토크의 RMS 값을 최소화하는 문제를 생각하였다. 입력토크의 한 주기에 대한 RMS값을 T^* 로 표시하면, 식 (26)

으로부터 T^* 는 다음과 같이 정의된다.

$$T^* = \{l/P \int_0^P l^2 (x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + u_0)^2 dt\}^{1/2} \quad (30)$$

단, 식 (30)에서 P 는 기구의 한 주기를 나타낸다. 또, T^* 를 최소화하는 문제는 다음의 J 값을 최소화하는 문제와 동일함을 알 수 있다. 즉,

$$J = \int_0^P (x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + u_0)^2 dt \quad (31)$$

따라서, Fig. 3에 보인 바와 같은 평형스프링을 써서 입력토크 특성을 최적화하는 문제는 식 (31)로 주어지는 J 값을 최소화하는 문제로 귀결된다. 스프링의 설계변수는 8개이나 식 (23)의 u_i 의 식에서 a , δ_0 는 언제나 δ_0/a 의 형태로만 주어지므로 실제로는 7개의 설계변수인 경우로 축소된다. 이들중 α_s , l_s 가 주어진 경우를 생각하면, 결정해야 할 변수는 5개로 되며, 그중 δ_0/a , θ 는 u_i 에, 나머지 k , X_0 , Y_0 는 x_i 에 포함되어 있다. 먼저 δ_0/a , θ 가 x_i 에 관계없이 독립적으로 결정될 수 있다면, J 를 최소로 하는 x_i 들은

$$\partial J / \partial x_i = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (32)$$

를 만족하여야 하므로, 다음과 같은 선형방정식을 해로 주어진다.

$$\begin{cases} \int_0^P u_1^2 dt, & \int_0^P u_1 u_2 dt, & \int_0^P u_1 u_3 dt \\ & \int_0^P u_2^2 dt, & \int_0^P u_2 u_3 dt \\ \text{SYMM.} & & \int_0^P u_3^2 dt \end{cases} \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases} = \begin{cases} -\int_0^P u_0 u_1 dt \\ -\int_0^P u_0 u_2 dt \\ -\int_0^P u_0 u_3 dt \end{cases} \quad (33)$$

또, 식 (33)으로부터 x_1 , x_2 , x_3 가 결정되면, 이들로부터 3개의 설계변수 k , X_0 , Y_0 는 식 (22)에 의해 다음과 같이 결정된다.

$$\begin{cases} k = 1/2x_1 \\ X_0 = x_2/(2k) \\ Y_0 = x_3/(2k) \end{cases} \quad (34)$$

이제 θ 및 δ_0/a 의 결정방법에 대하여 논의하기로 한다. 변수 δ_0/a 는 스프링의 실제성을 고려한 제한조건과 연관되어 있다. 여기서의 제한조건이란, 스프링의 인장상태 유지, 변형정도 제한, 자유길이의 제한 등을 말한다. 구체적으로 이들을 설명하기 위해 Fig. 5와 같이 스프링의 이동퍼트 Q 의

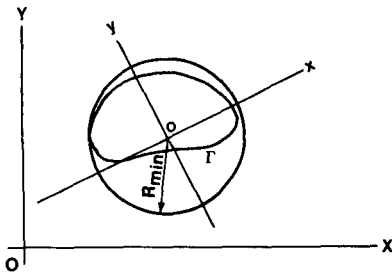


Fig. 5 Relation between trajectory of moving pivot and R_{min}

체적 Γ 와 원점이 X_0, Y_0 에 있고 Γ 를 완전히 포함하는 최소원을 생각하고 그 반경을 R_{min} 이라고 하자. 제 2 절의 논의에 의해, $\delta_0 \geq R_{min}$ 으로 취하면 한쌍의 스프링은 언제나 인장상태에 있게 되며, 근사식으로 계산된 스프링력의 오차가 최대 10% 이내로 된다. 또, δ_0 가 클수록, 주어진 δ_0/a 에 대하여 스프링의 자유길이 l_0 는 길어지므로, 가능한 한 짧은 스프링을 얻는다는 의미에서, 본 연구에서는 $\delta_0 = R_{min}$ 으로 두었다. 이 경우 l_0 와 스프링의 최대 인장량 δ_{max} 는,

$$l_0 = a - \delta_0 = \delta_0(1/(\delta_0/a) - 1) = R_{min}(1/(\delta_0/a) - 1) \quad (35)$$

$$\delta_{max} \leq 2R_{min} \quad (36)$$

으로 주어지며, 따라서 원래 길이에 대한 스프링의 최대변형률은

$$\delta_{max}/l_0 \leq \frac{2(\delta_0/a)}{1 - (\delta_0/a)} \quad (37)$$

로 됨을 알 수 있다. 식 (35), (37)에서 δ_0/a 가 커지면, 스프링의 변형률이 커지며 δ_0/a 가 작아지면, l_0 가 커짐을 알 수 있다. 본 연구에서는, δ_0/a 의 값으로 0.25, 0.33을 주로 사용하였는데, 이 경우 l_0 는 각각 $3R_{min}, 2R_{min}$ 으로, 최대변형률은 2/3, 1로 주어진다.

마지막으로, θ 의 결정은 일차원 탐색에 의존했는데, Fig. 3에 나타난 스프링의 y축에 대한 대칭성에 의해 θ 는 $[0, \pi]$ 구간에서 결정하면 되므로, 실제로는 $[0, \pi]$ 구간을 10 등분으로 나눈 점들에

서 계산된 J 값들에서 최소치를 찾는 방법을 택하였다. 임의의 θ 에 대하여 설계변수들의 결정절차를 요약하면 다음과 같다.

- (1) $l_s, a_s \dots$ 주어짐.
- (2) $\delta_0/a = 0.25, 0.33 \dots$ 변형정도, 자유길이 등에 대한 고려.
- (3) $\theta = \theta \dots 0 \leq \theta \leq \pi$ 내의 어떤 값에 대하여.
- (4) k, X_0, Y_0 구함...식 (3), (34)에 의한.
- (5) $J = J(\theta)$ 의 계산...식 (31)에 의한.

3.6 예제 및 검토

제 3.4절에서 논의한 입력토크의 평형문제를 Table 1에 보인 아와 같은 4절기구에 대하여 적용하여 보았다. 이 기구는 링크의 길이비가 1:4:4:4인 크랭크 록커 기구이다. 스프링이 없는 원래 기구에 대한 해석결과 입력토크의 한 주기에 대한 RMS값 T^* 는 $2.422 N \cdot m$ 로 계산되었다. 한쌍의 평형 스프링을 커플러 링크에 부착하고 행한 최적설계의 결과가 Table 2에 정리되어 있다.

Table 2에는 θ 에 대한 일차원 탐색을 마친 최적 스프링의 제원 및 성능들을 스프링의 이동피봇의 위치를 바꾸어가면서 비교해보았다. 모두 7가지 경우를 나타내었는데, 첫번째 경우는 원래기구를 나타내고 있다. 또한 스프링의 이동피봇의 위치는 Case 7을 제외하고는 모두 커플러의 중심선상에 위치하고 있다. 평형 스프링에 의하여 입력토크의 분산치는 어느 경우나 원래기구의 약 40% ~ 20% 수준까지 줄어들어서 상당한 평형효과가 얻어졌음을 말해준다. Table 2에는 T^* 의 값이나 조인트의 연결력의 크기들의 RMS값인 $F_0^*, F_1^* \dots$ 들을 2개의 값으로 표시하였는데, 이들은 각각 본 연구에서 제시한 근사스프링법에 의하여 계산된 값과 엄밀 계산에 의한 값들이다. 여기서 엄밀 계산이란, 스프링력의 크기로서 식 (8)과 같은 참값을 이용한 계산결과를 나타낸다. Table 2에 보인 모든 경우에 대하여 근사계산의 오차는 충분히 작아서, 오차의 측면에서 볼 때 본 연구에서 제시한 스프링 특성의 근사법이 실용성이 있음을 보여주고 있다.

Table 1 Numerical data for the example of four-bar mechanism

Link lengths(m)				Link masses(kg)			Crank speed	C. M. position			Inertia(kg-m ²)	
l_1	l_2	l_3	l_4	m_1	m_2	m_3	ϕ_1 (rpm)	l_{1c}	l_{2c}	l_{3c}	I_2	I_3
.060	.240	.240	.240	1.186	1.615	1.530	270.	.010	.120	.073	.4523	.02211

Table 2 Examples of optimal springs

Case	l_s	α_s	δ_0/a	θ	k	δ_0	l_0	X_0	Y_0	T^*	F_0^*	F_1^*	F_2^*	F_3^*
	m	Deg			N/m	m	m	m	m	$N \cdot m$	N	N	N	N
1	—	—	—	—	0.0	—	—	—	—	2.42	107.00	100.40	46.06	46.58
2	.12	0	.25	1.257	917.2	.083	.249	.084	.107	①1.05	55.16	45.63	47.84	46.08
										②1.04	55.12	45.59	47.95	46.18
3	.12	0	.33	1.257	923.1	.080	.163	.080	.109	①1.03	52.89	43.46	46.80	45.17
										②1.01	52.87	43.42	46.97	45.34
4	.08	0	.33	1.257	954.3	.078	.158	.057	.076	①1.10	49.46	41.02	47.42	46.73
										②1.09	49.32	40.88	47.49	46.75
5	.21	0	.25	2.199	2782.1	.083	.248	.123	.187	① .69	45.18	34.63	43.41	35.38
										② .74	45.19	34.53	44.47	36.06
6	.24	0	.33	2.513	2245.0	.096	.194	.135	.155	① .52	45.13	35.18	210.18	194.79
										② .56	42.48	33.91	207.90	192.50
7	.17	45	.25	2.827	1799.8	.099	.296	.03	.175	① .76	20.16	20.98	67.35	64.66
										② .69	20.03	20.71	66.82	64.12

*① Approximate ② Exact

예를 들어, 참값과 근사값의 상대오차가 최대로 나타난 경우를 생각해 보자. 이 경우는 Case 7의 T^* 계산에서 나타나며, 상대오차의 크기는 $(.76 - .69)/.69$ 로서 약 10% 정도이다. 그러나, 이 오차는 스프링 특성 근사의 오차를 직접 말해주는 것이 아니다. 스프링에 의하여 줄어든 T^* 의 값은 $(2.42 - .79) = 1.73$ 이므로, 실제오차는 $(.76 - .69)/1.73 \approx 0.04$ 로서 4% 정도에 지나지 않는다. 참고로 기구의 한 주기를 통한 입력토크의 변화를 Fig. 6에 나타내었는데, 원래기구와 Case 5의 평형스프링이 부착된 경우를 예로 하였으며, 평형스프링이 있는 경우에는 근사계산과 엄밀계산 결과를 비교하여 두었다. 이 그림을 통하여 입력토크의 RMS 값 뿐만 아니라 최대변동폭도 평형결과 많이 줄어 들었음을 알 수 있다.

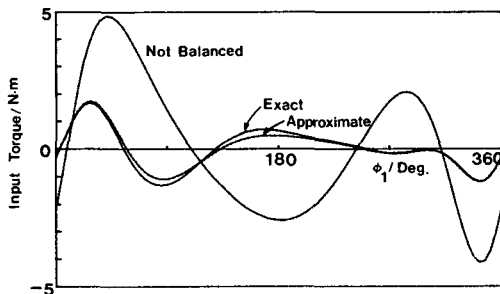


Fig. 6 Input torques as a function of input angle

설계된 최적스프링들은 l_s , α_s 의 값 즉 이동피봇 Q 의 위치에 관계없이, 그 길이 l_0 가 링크들의 길이와 비교하여 지나치게 길어진다든지 하는 비실제적인 해가 얻어지지 않았음을 볼 수 있다. 그러나, 최적 T^* 의 값은 l_s , α_s 의 값에 따라 상당히 큰 폭으로 변하는 것을 볼 수 있고, 이것은 실제 최적설계에 l_s , α_s 를 중요한 설계변수로 고려하여야 할 것임을 보이고 있다. 그러나 l_s , α_s 를 설계변수로 고려하는 경우, 근사스프링 특성을 이용하더라도 설계식이 그리 단순치 않으며, 따라서 최적해를 얻는 방법도 어려워질 것이다.

한편, 평형스프링을 사용한 입력토크의 평형결과 조인트의 연결력이 원래기구에 비하여 증가할 때도 있지만(Case 6), 감소하는 경우도(Case 2-5, 7) 발견된다. 이는 기존의 기구에 부가질량을 첨가한 경우, 부가된 질량으로 인한 관성의 증가가 이유가 되어 연결력이 항상 증대하는 것⁽¹⁵⁾과는 대조를 이루며, 평형스프링 방법의 장점이라 생각된다.

4. 고 찰

스프링 특성의 근사법을 제시하고, 이를 이용함으로써 제한조건까지 고려한 입력토크의 평형문제가 θ 에 대한 일차원 탐색문제로 단순화됨을 보였다. 이러한 설계과정의 단순화는 식 (6)이나 식

(11)에서 주어진 것과 같은 스프링력 표현의 단순화에 기인한다. 만약 이러한 단순화가 없었다면, 제 3절에서 취급된 문제는 일차원 탐색문제에 비하여 훨씬 복잡한 다차원 비선형 계획법 문제⁽¹²⁾로 취급되었을 것이다.

한편, 본 연구에서 제시한 근사법은 Matthew 등^(10,11)이 가정한 자유길이 0인 스프링의 비실제성을 보완한다고 생각한다. 스프링의 운동이 일차원이 아닌 한 자유길이 0인 스프링을 엄밀히 실현할 방법은 본 연구자가 아는 한 없다. 본 연구의 표현을 그대로 사용한다면, 자유길이 0인 스프링은 식 (11)의 S_x , S_y 가 각각 $S_x = k'x$, $S_y = k'y$ 의 형태로 표현되어야 할 것이며, 근사적으로 이와 같은 특성을 갖는 스프링을 구현하는 방법의 하나는 120° 간격으로 대칭분포된 3개의 인장스프링을 사용하는 것이다. 그러나, 본 연구에서는 식 (11)에서와 같이 변수 δ_0/a 를 도입함으로써 일반적인 근사식을 유도하였으며, 자유길이 0인 스프링에 비하여 계산상의 어려움을 더하지는 않은 것으로 사료된다.

5. 결 론

평면기구의 동적특성의 향상을 위한 설계기법의 하나인 평형스프링의 이용방법을 연구함에 있어서, 선형 인장스프링의 특성을 근사화하는 근사법을 제시하고, 이를 4절기구의 입력토크의 평형문제에 적용, 수치계산을 통하여 다음의 결론을 얻었다.

(1) 제시된 선형스프링 특성의 근사법은 인장으로 인한 스프링력의 표현식이 단순하며, 예를들어 원래길이의 100% 정도의 변형량에 대해서도 근사식의 오차가 최대 10% 이내로 된다.

(2) 4절기구의 입력토크 평형문제에 적용한 예제에서, 제시된 근사법이 설계식을 단순화하여 다차원 비선형 계획법 문제를 일차원 탐색문제로 바꾸면서도 실제성을 고려한 제한조건 등을 만족시켜 준다.

(3) 예제의 4절기구의 경우, 한 주기를 통한 입력토크의 RMS값이 원래기구의 40%~20% 정도까지 줄어드는 평형효과를 얻을 수 있다.

(4) 평형스프링법으로 입력토크를 평형하였을 때, 동시에 각 조인트의 연결력이 원래기구에 비하여 감소하는 경우가 관찰되었다.

본 연구에서 제시한 스프링 특성의 근사법은 단순한 예제로서, 관성 이외의 부하가 없는 기구에

대하여 적용되었지만, 유사한 방법이 부하가 있는 기구에 대해서도 적용될 수 있을 것이라 믿으며, 또한 입력토크의 평형문제 외에도 간극효과의 완화나, 조인트의 연결력의 감소 등 조인트와 관련된 문제에 두루 적용될 수 있다고 보며, 이들은 앞으로의 연구과제이다.

후 기

본 연구는 1986년 한국과학재단의 신진연구지원으로 이루어졌으며, 이에 대해 동재단 관계자 여러분께 감사사를 드린다.

참 고 문 헌

- (1) R. S. Berkof, 1973, "Complete Force and Momentum Balancing of Inline Four-Bar Linkage", *Mech. & Mach. Thy*, Vol. 8, pp. 397~410.
- (2) J. L. Elliott & D. Tesar, 1977, "The Theory of Torque, Shaking Force and Shaking Moment Balancing of Four Link Mechanisms", *Trans ASME Ser. B*, Vol. 99, pp. 715~722.
- (3) R. S. Berkof, 1979, "The Input Torque in Linkages", *Mech. & Mach. Thy*, Vol. 14, pp. 61~73.
- (4) R. S. Haines, 1981, "Survey ; 2-Dimensional Motion and Impact at Revolute Joints", *Mech. & Mach. Thy*, Vol. 15, pp. 361~370.
- (5) J. N. Fawcett & J. S. Burdess, 1972, "Control of Clearance Effects in Linkages", *Engng Mater. Des.*, Vol. 16(1), pp. 26~27.
- (6) J. K. Shin & B. M. Kwak, 1985, "A Design Method for Reducing the Effects of Clearances at Revolute Joint", *Proc. Instn Mech Engrs*, Vol. 199, pp. 153~158.
- (7) K. Oldham & M. J. Walker, 1978, "A Procedure for Force Balancing Planar Linkages Using Counterweights", *Journal Mech. Engng Science*, Vol. 20(4), pp. 177~182.
- (8) L. Maunder, 1971, "The Balancing of elastically Coupled Mechanisms", *Proc. 3rd World Cong. for Thy of Machines & Mechanisms*, pp. 103~114.
- (9) C. E. Benedict & D. Tesar, 1982, "Optimal Torque Balance for a Complex Stamping and Indexing Machine", *ASME Paper*, No. 70-Mech-82.
- (10) G. K. Matthew & D. Tesar, 1977, "Synthesis of Spring Parameters to Satisfy Specified Energy Levels in Planar Mechanisms", *Trans ASME Ser. B*, Vol. 99, pp. 341~346.

- (11) G. K. Matthew & D. Tesar, 1977, "Synthesis of Spring Parameters to Balance General Forcing Functions in Planar Mechanisms", *Trans ASME Ser. B*, Vol. 99, pp. 347~352.
- (12) E. J. Haug & J. S. Arora, 1979, *Applied Optimal Design*, John Wiley & Sons, Inc., pp. 77~89.
- (13) B. A. Hockey, 1972, "The Minimization of the Fluctuation of Input-Shaft Torque in Plane Mechanisms", *Mech. & Mach. Thy*, Vol. 7, pp. 335~346.
- (14) 신재균, 광병만, 1987, "부가질량이 첨가된 평면기구의 입력토크 특성과 간극효과의 관련성", *대한기계학회논문집*, 제11권, 제 4 호, pp. 607~615.
- (15) G. G. Lowen et al., 1974, "The Quantitative Influence of Complete Balancing on the Forces and Moments of Certain Families of Four Bar Linkages", *Mech. & Mach. Thy*, Vol. 9, pp. 299~323.