

<論 文>

비직교 좌표변환에 의한 선회연소기내 난류재순환유동의 수치해석

신 종 근* · 최 영 돈**

(1988년 4월 27일 접수)

Numerical Analysis of Turbulent Recirculating Flow in Swirling Combustor by Non-Orthogonal Coordinate Transformation

Jong Keun Shin and Young Don Choi

Key Words : Non-Orthogonal Coordinate System(비직교 좌표계), Turbulent Flow(난류유동), Stream Line Curvature Correction(유선곡률수정), Algebraic Stress Model(대수 응력모델), QUICK Scheme(QUICK 수치해법)

Abstract

A numerical technique is developed for the solution of fully developed turbulent recirculating flow in the passage of variable area using the non-orthogonal coordinate transformation. In the numerical analysis, primitive pressure-velocity finite difference equations were solved by SIMPLER algorithm with 2-equation turbulence model and algebraic stress model (ASM). QUICK scheme on the differencing of convective terms which is free from the inaccuracies of numerical diffusion has been applied to the variable grids and the results compared with those from HYBRID scheme. In order to test the effect of streamline curvatures on turbulent diffusion Lee and Choi streamline curvature correction model which has been obtained by modifying the Leschziner and Rodi's model is tested. The ASM was also employed and the results are compared to those from another turbulence model. The results show that difference of convective differencing schemes and turbulence models give significant differences in the prediction of velocity fields in the expansion region and outlet region of the combustor, however show little differences in the parallel flow region.

기 호 설 명

a_i : 차분방정식의 계수
 b, b' : 차분방정식의 계수
 C_{e1}, C_{e2} : 모델상수
 $C_{\mu}, C_{\mu 0}$: 모델상수
 k : 난류운동에너지

r : 반경방향 좌표
 S_c : 원천항의 상수항
 S_p : 선형화된 원천항의 계수
 \bar{U}, \bar{U}_η : 축방향 및 η 방향 평균속도
 $\tilde{U}, \tilde{U}_\eta$: 축방향 및 η 방향 모의속도
 u', v' : 축방향 및 η 방향 난류속도
 U^*, U_η^* : 축방향 및 η 방향 가상속도
 vol : 제어체적의 부피
 f_1, f_2, f_3, f_4 : 벽면합수

*고려대학교 대학원

**정회원, 고려대학교 공과대학 기계공학과

- P_k : 난류에너지 생성률
- R : 유신풀름반경
- $\tilde{u}_i \tilde{u}_j$: 레이놀즈응력
- $u_i u_j$: 잔류응력
- \bar{U}_0 : 2중동심원관에서의 유동의 평균속도
- \bar{W} : 접선방향의 속도
- C_1, C_2 : 난류모델상수
- C'_1, C'_2 : 난류모델상수
- $\sigma_k, \sigma_\epsilon$: 난류모델상수

그리스 문자

- α : 확대관의 확대각
- θ : 선회익의 각
- ξ, η, θ : 비직교좌표
- $\delta(x)$: 외벽면의 반경
- U_{eff} : 유효와점성계수
- U_t : 와점성계수
- ν : 동점성계수
- $(\nu_t)_{ij}$: 모의점성계수
- ϵ : 난류운동에너지 소멸율
- Γ : 난류확산계수
- ϕ : 일반적인 전달함수
- ρ : 밀도
- μ : 점성계수
- μ_{eff} : 유효점성계수

1. 서 론

성능이 좋은 선회연소기를 설계하기 위해서는 연소기의 형상과 선회기의 형태가 유동특성에 미치는 영향에 대한 명확한 이해가 필요하다.

그러나 연소기내의 유동장과 연소특성에 영향을 주는 인자의 수는 대단히 많고 연소기의 형태도 다양하므로 실험적으로 이 모든 관계를 알아내려면 상당한 양의 실험이 요구된다. 과거에 많은 실험이 행해졌고, 그 결과로 얻어진 자료도 많다. 그러나 선회연소 현상은 대단히 복잡하므로 새로운 형태의 연소기를 설계하려면 그 자료만으로는 부족하여 또 다른 실험을 요구하게 된다. 따라서 최근 새로운 연소기를 설계할 때, 실험적 방법보다 더 쉽게 연소기의 성능을 알 수 있고, 또 최적인 연소기 형상과 입구유동 조건을 결정할 수 있는 수치해석 방법이 연구되고 있다^(1,2).

그러나 연소기 내에서의 선회연소유동은 복잡한

3차원 난류유동이어서 해석하기가 어렵기 때문에 그 연구가 초기상태에 있다. 따라서 3차원 선회연소유동의 수치해석에 대한 연구가 필요하다. 3차원 선회연소유동은 유체유동과 열전달, 물질전달이 결합되어 있는 복잡한 유동이어서 이 유동을 해석하기 위해서는 운동량방정식과 열전달방정식, 물질전달방정식을 동시에 해석해야 한다. 그러나 본 연구에서는 이 연구를 체계적으로 진행하기 위해서 먼저 연소현상이 없는 3차원 선회유동만을 정확히 수치해석 하는데 관한 연구를 진행하였으며, 연소가 포함된 선회유동 해석은 이 연구의 뒤에 이어질 것이다.

폐쇄형 연소기내에서의 난류선회유동의 수치해석에 관한 연구로는 Lilley와 Rhode⁽¹⁾의 연구가 있는데, 그들은 허브가 없는 폐쇄형 연소기내의 선회난류유동을 $k-\epsilon$ 방정식 모델을 사용하여 해석하였다. 여기서는 직교원통형 좌표계(orthogonal cylindrical coordinate system)를 사용하여 유한차분방정식을 유도하여 사용하였다.

Fig. 1에서와 같은 폐쇄형 연소기를 원통좌표계에 의해서 직교격자망을 사용하여 나누면 확대관의 벽면을 계단형으로 만들어야 하며 이 계단형 벽면 위의 유동을 벽면함수를 사용하여 해석하면 실제와 다른 유동분포를 예측해 줄 수 있다.

뿐만 아니라, Lee⁽³⁾에 의하면 이 계단형 벽면을 사용하는 경우 해의 정확도를 높이려면 이 부근에서 특수한 유한차분방정식을 유도해야 된다고 하였다. 그러나 그 식은 대단히 복잡하며 설사 그 식을 사용하였다 해도 해의 정확도가 어느정도 될지 알려져 있지 않다고 하였다.

따라서 본 해석에서는 계단형 벽면조건을 없게 하기 위해서 비직교 좌표계(non-orthogonal coordinate system)를 사용하여 수치해석하였다. 비직교 좌표계를 이용한 수치해석의 예는 Thompson 등^(4,5)이 Laplace방정식 혹은 Poisson방정식을 해석함으로써 비직교 격자망을 구성한 바 있고,

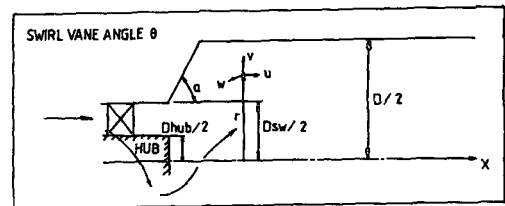


Fig. 1 The flowfield being investigated

Fahgri와 Asako⁽⁶⁾는 대수적 비직교 좌표변환으로 유한차분방정식을 유도하여 비정규경계면을 갖는 관로에서의 유동특성을 해석하였으며 이재현과 이상렬⁽⁷⁾은 Fahgri와 Asako의 방법을 비정규경계면을 갖는 밀폐공간내에서의 자연대류의 수치해석에 적용한 바 있다. 본 해석에서도 Fahgri와 Asako의 변환법으로 유한차분방정식을 유도하였는데, 이 방법을 사용할 경우 확대관의 경사벽면을 계단형으로 만들지 않고 유한차분방정식을 유도할 수 있어서 계단형 벽면으로 인한 해의 오차를 제거할 수 있다. Fig. 2는 본 해석에서 사용한 비직교 격자망을 나타낸다.

본 수치해석 연구에서 중점적으로 고찰하고자 하는 것은

- (1) 벽면부근의 유동처리의 변화가 유동특성 예측에 미치는 영향
- (2) 압력방정식의 처리에 따른 해의 수렴성
- (3) 오류확산이 유동특성 예측에 미치는 영향
- (4) 난류모델의 변화가 유동특성 예측에 미치는 영향 등이다.

위에 열거한 사항들을 검토하기 위해서 본 연구에서는 Gosman과 Ideriah⁽⁸⁾의 TEACH-2E 프로그램을 수정하여 프로그램을 만들었으며, 이 프로그램은

- (1) SIMPLE 해법^(9,11), SIMPLER 해법⁽²⁰⁾
- (2) PSL 해법⁽¹⁰⁾, 벽면함수법⁽¹¹⁾

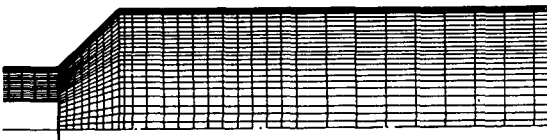


Fig. 2 Grid system of non-orthogonal coordinate in confined combustor

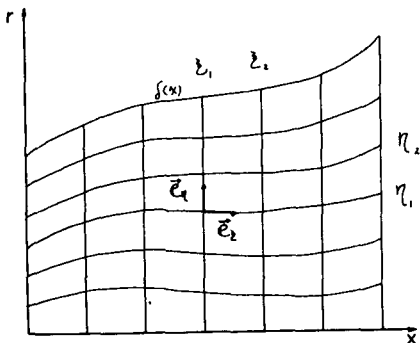


Fig. 3 Physical plane (x, r)

- (3) 표준 와점성계수법, 유선곡률수정법
- (4) HYBRID 해법⁽²⁰⁾, QUICK 해법^(3,12)
- (5) k-ε 방정식 모델, ASM 모델 등의 각 해법의 변화가 가능하도록 제작하였다.

2. 이론해석

2.1 지배방정식의 유도

(1) 비직교 좌표변환

Fig. 3은 비직교 좌표에서의 격자망과 각 격자에서의 단위벡터를 나타내고 있다. 이 그림에서 x, r 좌표계를 ξ, η 좌표계로 전환하면

$$\xi = x, \eta = r/\delta(x) \tag{1}$$

$$\vec{e}_r = \vec{e}_\eta \tag{2}$$

$$\vec{e}_x = \vec{e}_\xi \epsilon^{\frac{1}{2}} - \gamma \vec{e}_\eta \tag{3}$$

가 된다. 여기서

$$\gamma = \eta \cdot \partial\delta(x)/\partial\xi \tag{4}$$

$$\epsilon = 1 + \gamma^2 \tag{5}$$

이고, 또

$$\vec{U}_\xi = \vec{U} \epsilon^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

$$\vec{U}_\eta = \vec{V} - \gamma \vec{U} \tag{7}$$

가 된다.

(2) 지배방정식

원통좌표계에서의 3차원 정상난류유동에 대한 지배방정식을 벡터방정식으로 나타내면 다음과 같다. 연속방정식

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial r} + \frac{\vec{V}}{r} = 0 \tag{8}$$

운동량방정식

$$\begin{aligned} & \left[\vec{U} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \vec{V} \frac{\partial \vec{U}}{\partial r} - \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{P}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \nu_{eff} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \nu_{eff} \frac{\partial \vec{U}}{\partial r} + S_u \right) \right] \vec{e}_x + \left[\vec{U} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \right. \\ & \left. + \vec{V} \frac{\partial \vec{V}}{\partial r} - \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{P}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \nu_{eff} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \nu_{eff} \frac{\partial \vec{V}}{\partial r} + S_v \right) \right] \vec{e}_r \\ & + \left[\vec{U} \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} + \vec{V} \frac{\partial \vec{W}}{\partial r} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \nu_{eff} \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \nu_{eff} \frac{\partial \vec{W}}{\partial r} + S_w \right) \right] \vec{e}_\theta = 0 \end{aligned}$$

본 해석에서의 유동은 축대칭 유동이므로 위 식들을 유도하는 과정에서 ∂/∂θ가 포함된 항은 모두 무시하였고, 난류응력은 유효점성계수와 평균 속도 구배에 비례한다고 생각하는 Boussinesq의 가설을

사용하였다.

식 (9)에 식 (2), (3)을 대입한 후 ξ, η, θ 방향 성분을 취한다음, 변수 x, r, θ 를 변수 ξ, η, θ 로 변환하기 위하여⁽¹³⁾

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (11)$$

로 치환한 후

$$\bar{V} = \bar{U}_\eta + \gamma \bar{U} \quad (12)$$

를 대입하면 지배방정식은 다음과 같은 기본형태를 갖게 된다.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\delta \left(\rho \bar{U} \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta \left(\rho \bar{U}_\eta \phi - \Gamma_\phi \frac{\epsilon}{\delta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{e\gamma \bar{U} \phi}{\eta} = S_\phi \quad (13)$$

이 방정식에서 $\phi, \Gamma_\phi, S_\phi$ 는 각 기본방정식에 따라서 Table 1과 같은 변수로 나타내진다.

2.2 난류모델

본 해석에서는 와점성계수와 레이놀즈응력을 계산하기 위해서 다음과 같은 난류모델을 사용하여 선회유동을 해석하였으며, 각 방법들에 의한 해석 결과를 비교하였다.

- (1) 표준 $k-\epsilon$ 방정식 모델
- (2) 유선곡률수정 $k-\epsilon$ 방정식 모델
- (3) 대수응력모델 (ASM)

- (1) 표준 $k-\epsilon$ 방정식 모델

이 방법에서는 식 (13)에 나와있는 와점성계수

$$\nu_t = C_{\mu 0} \frac{k^2}{\epsilon} \quad (14)$$

으로 계산하며, 이 식에서 k 와 ϵ 은 각각 k -방정식과 ϵ -방정식을 해석하여 구한다.

k -방정식은

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\delta \left(\rho \bar{U} k - \frac{\mu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial \xi} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta \left(\rho \bar{U}_\eta k \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\mu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\epsilon}{\delta} \frac{\partial k}{\partial \eta} \right] + \frac{\rho \gamma \bar{U} k}{\eta} = P_k - \rho \epsilon \delta + S_k \quad (15)$$

ϵ -방정식은

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\delta \left(\rho \bar{U} \epsilon - \frac{\mu_{eff}}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta \left(\rho \bar{U}_\eta \epsilon - \frac{\mu_{eff}}{\sigma_\epsilon} \frac{\epsilon}{\delta} \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\rho \gamma \bar{U} \epsilon}{\eta} = C_{\epsilon 1} \frac{P_k \epsilon}{k} - \rho C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \delta + S_\epsilon \quad (16)$$

로 표시되며, P_k 는 난류에너지생성을 함이다.

(2) 유선곡률수정모델

본 해석에서 유동모델은 주유동장이 선회유동에 의해 큰 곡률을 갖을 뿐만 아니라 허브앞 부분에 재순환유동의 형성으로 그 부분의 유선은 곡률이 커져 이 유선의 곡률이 그 부근의 난류특성에 영향을 줄 것으로 생각된다. 그러나 전술한 $k-\epsilon$ 난류모델에서는 이러한 유선곡률에 대한 영향이 고려되어 있지 않아서 본 해석에서는 유선곡률에 의한 난류점성계수 수정모델을 사용하여 그 결과를 수정하지 않은 경우와 비교하고자 한다. 본 해석에서는 여러 유선곡률수정모델중 비교적 정확하다고 알려진 Leschziner와 Rodi모델(LR모델)⁽¹⁶⁾의 문제점을 보완한 Lee와 Choi모델(LC모델)^(3,17)을 사용하였다.

LC모델에서는 유선좌표에서의 난류에너지 생성항으로부터 C_μ 값을 수정하는 식을 다음과 같이 유도하여 사용하였다.

$$C_\mu = \frac{C_{\mu 0}}{1 + 4k_1^2 \frac{k^2}{\epsilon^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial R} \frac{V_\theta}{R}} \quad (17)$$

여기서 $k_1 = 0.267$, $C_{\mu 0} = 0.09$ 이며 R 은 유선의 곡부곡률반경이다. 3차원 유동에서 곡부곡률반경 R 및 $\partial(RV_\theta)/\partial R$ 은 Johnson⁽²⁴⁾이 제시한 식을 비직교 좌표계로 변환하여 사용하였다.

(3) 대수응력모델 (algebraic stress model)

$k-\epsilon$ 방정식 모델에서는 근본적으로 Boussinesq의 와점성계수 모델 식 (10)을 사용하는데 이 모델에서 와점성계수 ν_t 는 등방성(isotropic)인 스칼라양이어서 운동량의 x, y, z 방향 확산률이 같음을 시사하는데 실제 2차의 난류모델에 의하면 와점성계수는 방향성이 있는 second rank tensor형 $(\nu_t)_{ij}$ 로 표시됨을 나타내주는데 $k-\epsilon$ 방정식 모델에서는 이 효과가 무시되었다⁽¹⁹⁾.

대수응력모델로 유동을 해석할 때는 Boussinesq의 난류모델을 사용하지 않으므로 앞에서 유도된 운동량방정식을 사용할 수 없고 레이놀즈응력이 포

Table 1 Variables of governing equations

Governing Eq.	ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
Continuity Eq.	1	0	0
ξ	\bar{U}	μ_{eff}	$\rho S u_\xi$
η	\bar{U}_η	μ_{eff}	$\rho S u_\eta$
θ	\bar{W}	μ_{eff}	$\rho S W_\theta$

함된 방정식을 다시 유도하여 사용해야 한다. Johnson⁽¹⁸⁾이 제시한 대수응력모델을 사용할 때 적용해야 되는 원통좌표계에서의 운동량방정식들을 본 해석에서의 비직교 좌표계로 변환하면 다음과 같다.

지배방정식은 다음과 같은 기본형태를 갖게 된다.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\delta \left(\rho \bar{U} \phi' - \Gamma_{\phi}' \frac{\partial \phi'}{\partial \xi} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta \left(\rho \bar{U}_{\eta} \phi' - \Gamma_{\phi}' \frac{\partial \phi'}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\rho \gamma \bar{U} \phi}{\eta} = S_{\phi}' \quad (18)$$

이 방정식에서 ϕ' , Γ_{ϕ}' , Γ_{ϕ}' , S_{ϕ}' 는 각 기본방정식에 따라서 Table 2와 같은 변수로 나타내진다. 여기서 P_k 는 난류에너지생성항을 나타낸다.

한편 Rodi⁽¹⁶⁾가 제안한 방법에 따라 레이놀즈응력방정식을 간략화하여 대수응력방정식을 유도한 후 다시 Iacovides와 Launder⁽¹⁹⁾, Choi⁽¹⁴⁾의 방법에 따라 레이놀즈응력을 모의 점성계수(pseudo viscosity)와 잔류응력(residual stress)항으로 표현한 다음 비직교 좌표계로 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{u}'^2 = & -\frac{k}{\varepsilon} [\bar{u}'^2 (2\phi_1 + \phi_3)] \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} \\ & \frac{P}{\varepsilon} - 1 + C_1 \\ & + \frac{k}{\varepsilon} \frac{1}{P/\varepsilon - 1 + C_1} \left\{ \bar{u}' v' \left[(2\phi_2 \right. \right. \\ & - \phi_3) \left(\frac{\partial \bar{U}_{\eta}}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \bar{U}_{\eta}}{\partial \eta} \right) \right. \\ & - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \bar{U} - \frac{\gamma^2}{\delta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \left. \right] - (2\phi_1 \\ & + \phi_3) \frac{\partial \bar{U}}{\partial \delta \eta} - \bar{u}' w' \left[\phi_3 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} \right) \right] \\ & + \bar{u}'^2 \left[(2\phi_2 - \phi_3) \left(\frac{\partial \bar{U}_{\eta}}{\partial \delta \eta} + \frac{\bar{U}}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} + \phi_5 \frac{\varepsilon}{k} \left. \right] + \bar{v}' w' \left[(\phi_3 \right. \\ & - 2\phi_2) \frac{\bar{W}}{\delta \eta} - \phi_3 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \delta \eta} - \bar{u}'^2 \phi_3 \left(\frac{\bar{U}_{\eta}}{\delta \eta} \right. \\ & + \frac{\gamma \bar{U}}{\delta \eta} \left. \right) - \bar{u}'^2 \left[2C_1' (f_1 + f_3) \frac{\varepsilon}{k} \right. \\ & - (2\phi_1 + \phi_3) \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \left. \right] \left. \right\} + \frac{2}{3} k \\ & = -\nu_{t11} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} + \bar{u}'^2 + \frac{2}{3} k \quad (19) \end{aligned}$$

여기서 $\phi_1 = 1 - C_2 + 2C_2 C_2' (f_1 + f_3)$ (19a)

$\phi_2 = C_2 C_2' (f_2 + f_4)$ (19b)

$\phi_3 = \frac{2}{3} [C_2 - 1 - 2C_2 C_2' (f_1 + f_3) + C_2 C_2' (f_2 + f_4)]$ (19c)

$\phi_4 = C_1 + 2C_1' (f_1 + f_3)$ (19d)

$\phi_5 = C_1' (f_2 + f_4)$ (19e)

이다.

$$\begin{aligned} \bar{u}' v' = & -\frac{k}{\varepsilon} \phi_1 \frac{\bar{v}'^2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \delta \eta}}{P/\varepsilon - 1 + \phi_4 - \left(\frac{\bar{U}_{\eta}}{\delta \eta} + \frac{\gamma \bar{U}}{\delta \eta} \right) \frac{k}{\varepsilon} \phi_1} \\ & - \frac{k}{\varepsilon} \phi_1 \frac{1}{P/\varepsilon - 1 + \phi_4 - \left(\frac{\bar{U}_{\eta}}{\delta \eta} + \frac{\gamma \bar{U}}{\delta \eta} \right) \frac{k}{\varepsilon} \phi_1} \\ & \cdot \left\{ \bar{u}'^2 \left(\frac{\partial \bar{U}_{\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \bar{U} + \gamma \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \bar{U}_{\eta}}{\partial \eta} \right) \right. \\ & - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \bar{U} - \frac{\gamma^2}{\delta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \left. \right) - \bar{u}' w' \frac{\bar{W}}{\delta \eta} \\ & = -\nu_{t12} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \delta \eta} + \bar{u}' v' \\ & = -\nu_{t21} \frac{\partial \bar{U}_{\eta}}{\partial \xi} + \bar{v}' u' \quad (20) \end{aligned}$$

여기서 $\phi_1 = 1 - C_2 + \frac{3}{2} C_2 C_2' (f_1 + f_2 + f_3 + f_4)$ (20a)

$\phi_4 = C_1 + \frac{3}{2} C_1' (f_1 + f_2 + f_3 + f_4)$ (20b)

Table 2 Variables of governing equations

Govern. Eq.	ϕ'	Γ_{ϕ}'	Γ_{ϕ}'	S_{ϕ}'
ξ	\bar{U}	$\rho(\nu + \nu_{t11})$	$\rho(\nu \varepsilon + \nu_{t12})$	$\rho S u_{\xi}'$
η	\bar{U}_{η}	$\rho(\nu + \nu_{t21})$	$\rho(\nu \varepsilon + \nu_{t22})$	$\rho S v_{\eta}'$
θ	\bar{W}	$\rho(\nu + \nu_{t31})$	$\rho(\nu \varepsilon + \nu_{t23})$	$\rho S w_{\theta}'$
k	k	$\rho \left(\nu + C_{\kappa l} \frac{k}{\varepsilon} \bar{u}'^2 \right)$	$\rho \left(\nu \varepsilon + C_{\kappa l} \frac{k}{\varepsilon} (\bar{v}'^2 + \gamma^2 \bar{u}'^2) \right)$	$-\rho P_k' - \rho \varepsilon \delta + \rho S k'$
ε	ε	$\rho \left(\nu + C_{\varepsilon} \frac{k}{\varepsilon} \bar{u}'^2 \right)$	$\rho \left(\nu \varepsilon + C_{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (\bar{v}'^2 + \gamma^2 \bar{u}'^2) \right)$	$-\rho C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k' - \rho C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \delta + \rho S \varepsilon'$

이다.

$$\begin{aligned} \bar{v}'^2 = & -\frac{k}{\varepsilon} \frac{[\bar{u}'^2(2\phi_1 + \phi_3)] \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\delta \partial \eta}}{\frac{P}{\varepsilon} - 1 + C_1} \\ & + \frac{k}{\varepsilon} \frac{1}{\frac{P}{\varepsilon} - 1 + C_1} \left\{ \bar{u}'^2 \left[(2\phi_2 - \phi_3) \right. \right. \\ & \times \left. \left. \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \right) + \phi_5 \frac{\varepsilon}{k} \right] \right. \\ & + \bar{u}' v' \left[(2\phi_2 - \phi_3) \frac{\partial \bar{U}}{\delta \partial \eta} - (2\phi_1 + \phi_3) \right. \\ & \times \left. \left. \left(\frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \eta} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \bar{U} - \frac{\gamma^2}{\delta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \right) \right] - \bar{u}' w' \left[\phi_3 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} \right) \right] - \bar{v}' w' \left[\phi_3 \frac{\partial \bar{W}}{\delta \partial \eta} - (2\phi_1 \right. \right. \\ & \left. \left. + \phi_3) \frac{\bar{W}}{\delta \eta} \right] - \bar{w}'^2 \left[\phi_3 \frac{\bar{U}_\eta + \gamma \bar{U}}{\delta \eta} \right] \right. \\ & \left. - \bar{v}'^2 \left[2C_1' f_{24} \frac{\varepsilon}{k} + (2\phi_1 + \phi_3) \left(\frac{\bar{U}}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \right) \right] \right\} + \frac{2}{3} k = -\nu_{t22} \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\delta \partial \eta} \\ & + \bar{v}'^2 + \frac{2}{3} k \end{aligned} \quad (21)$$

여기서

$$\phi_1 = 1 - C_2 + 2C_2 C_2' (f_2 + f_4) \quad (21a)$$

$$\phi_2 = C_2 C_2' (f_1 + f_3)$$

$$\phi_3 = C_2 - 1 + C_2 C_2' (f_1 + f_3) - 2C_2 C_2' (f_2 + f_4) \quad (21c)$$

$$\phi_4 = C_1 + 2C_1' (f_2 + f_4) \quad (21d)$$

$$\phi_5 = C_1' (f_1 + f_3) \quad (21e)$$

이다.

$$\begin{aligned} \bar{u}' w' = & -\phi_1 \frac{k}{\varepsilon} \\ & \times \frac{\bar{u}'^2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi}}{\frac{P}{\varepsilon} - 1 + \phi_2 - \phi_1 \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \bar{U}_\eta}{\delta \partial \eta} + \frac{\bar{U}}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} + \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \right)} \\ & - \phi_1 \frac{k}{\varepsilon} \\ & \frac{\bar{u}' v' \frac{\partial \bar{W}}{\delta \partial \eta} + \bar{v}' w' \frac{\partial \bar{W}}{\delta \partial \eta} - \bar{u}'^2 \gamma \frac{\partial \bar{W}}{\delta \partial \eta}}{\frac{P}{\varepsilon} - 1 + \phi_2 - \phi_1 \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \bar{U}_\eta}{\delta \partial \eta} + \frac{\bar{U}}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} + \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \right)} \\ & = -\nu_{t31} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} + \bar{w}' \bar{u}' \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{여기서 } \phi_1 = 1 - C_2 + \frac{3}{2} C_2 C_2' (f_1 + f_3) \quad (22a)$$

$$\phi_2 = C_1 + \frac{3}{2} C_1' (f_1 + f_3) \quad (22b)$$

이다.

$$\begin{aligned} \bar{v}' w' = & -\frac{k}{\varepsilon} \frac{\bar{v}'^2 \frac{\partial \bar{W}}{\delta \partial \eta}}{\frac{P}{\varepsilon} - 1 + \phi_2 - \frac{k}{\varepsilon} \phi_1 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \right)} \\ & - \frac{k}{\varepsilon} \phi_1 - \bar{w}'^2 \frac{\bar{W}}{\delta \eta} + \bar{u}' v' \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} \right) \\ & + \bar{u}' w' \left(\frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \eta} \bar{U} \right. \\ & \left. - \frac{\gamma^2}{\delta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \right) \Bigg/ \left[\frac{P}{\varepsilon} - 1 + \phi_2 - \frac{k}{\varepsilon} \phi_1 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \right) \right] = -\nu_{t23} \frac{\partial \bar{W}}{\delta \partial \eta} + \bar{w}' \bar{v}' \end{aligned} \quad (23)$$

$$\text{여기서 } \phi_1 = 1 - C_2 + \frac{3}{2} C_2 C_2' (f_2 + f_4) \quad (23a)$$

$$\phi_2 = C_1 + \frac{3}{2} C_1' (f_2 + f_4) \quad (23b)$$

이다.

식 (19)~(23)에 나타난 벽면함수 f 는

$$f\left(\frac{l}{n_i r_i}\right) = \frac{k \bar{z}^3}{C_i \varepsilon (n_i r_i)} \quad (24)$$

로 주어지며⁽²³⁾ f_1 , f_3 는 좌우벽면의 영향을 나타내는 벽면함수이고 f_2 , f_4 는 상하벽면의 영향을 나타내는 벽면함수이다. 또한 식 (24)에서 C_i 은

$$C_i = \frac{k}{C_{\mu 3/4}} \quad (25)$$

로 정의되며, r_i 는 벽면에 수직인 방향으로의 거리이고 n_i 는 벽면에 수직인 방향을 나타내는 단위벡터이다.

2.3 벽면부근의 난류모델에 선회유동의

효과

벽면에 매우 가까운 부근의 유동은 매우 작은 영역이나, 벽면에서의 속도가 0인 경계조건으로 인하여 벽면부근에서 속도구배가 급격해져서 벽면전단응력이 매우 커진다. 따라서 벽면함수식을 고려할 때 벽면부근의 유동을 크게 대별하여 난류의 영향이 거의 무시되고 층류점성전단응력이 지배적인 점성저층(viscous sublayer)과 완전난류역으로 구분하여 고려하였다. 또 벽면함수에 선회유동의 효과를 고려하여 비직교 좌표계로 변환하여 사용하였다.

2.4 난류모델상수

본 해석에 사용한 난류모델상수는 다음의 값을 사용하였다. (Table 3, 4)

Table 3 Values of k - ϵ model coefficients

C_μ	σ_k	σ_ϵ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	k
0.09	1.00	1.22	1.44	1.92	0.4187

Table 4 Values of ASM coefficients

C_1	C_2	C_1'	C_2'	C_{kl}	C_μ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	C_ϵ
1.80	0.60	0.50	0.30	0.22	0.09	1.44	1.92	0.17

2.5 2중등심원관에서의 속도분포 입구조건

연소기내의 선회유동을 해석하기 위해서 연소기 내로 유입하는 2중등심원관내의 정확한 속도분포의 입구조건이 필요하다. 이를 위하여, 난류전단응력은 위치에 따라 변하나 각각의 위치에서 난류에너지의 생성과 난류에너지의 소멸이 평형을 이루는 2개의 국부평형층(local equilibrium layer)이 2중등심원관내의 내관과 외관 사이의 한 점에서 만나는 것으로 생각하는 선형전단응력모델(linear shear stress model)⁽³⁾의 이론을 도입하여 계산하였다.

3. 수치해석

본 해석에서는 차분법으로 HYBRID Scheme과 QUICK Scheme을 적용하였는데, 비직교좌표계에서도 직교좌표계의 QUICK Scheme에 사용된 식을 변화없이 사용할 수 있다. 허브로 인해 생기는 모서리 제어체적(corner control volume)에서의 차분방정식은 Lee⁽³⁾의 방법에 따라 특별히 고려하였으며, 압력을 계산하는 방법으로 SIMPLE Scheme과 SIMPLER Scheme을 모두 적용해 본 결과 SIMPLER Scheme이 수렴성이 좋아서 이를 사용하였다. 비직교좌표계에서의 압력방정식과 압력수정방정식은 직교좌표계에서와 다르며 다음과 같이 표시된다.

3.1 압력방정식

$$a_p p = a_E p_E + a_w p_w + a_s p_s + a_N p_N + b' \quad (26)$$

여기서

$$a_E = \rho_E d_E (A_E + 0.5 \partial \delta / \partial \xi \cdot \eta d \eta d \xi) \quad (26a)$$

$$a_w = \rho_w d_w (A_w - 0.5 \partial \delta / \partial \xi \cdot \eta d \eta d \xi) \quad (26b)$$

$$a_N = \rho_N d_N A_N \quad (26c)$$

$$a_s = \rho_s d_s A_s \quad (26d)$$

$$b' = [(\rho \bar{U})_w A_w - (\rho \bar{U})_E A_E + (\rho \bar{U}_\eta)_s A_s - (\rho \bar{U}_\eta)_N A_N] - \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \eta d \eta d \xi [(\rho \bar{U})_E + (\rho \bar{U})_w] / 2 \quad (26e)$$

3.2 압력수정방정식

$$a_p p' = a_E p'_E + a_w p'_w + a_N p'_N + a_s p'_s + b \quad (27)$$

여기서 a_E, a_w, a_N, a_s 는 식 (24a)~(24d)와 같고

$$b = [(\rho \bar{U}^*)_w A_w - (\rho \bar{U}^*)_E A_E + (\rho \bar{U}^*)_s A_s - (\rho \bar{U}^*)_N A_N] - \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \eta d \eta d \xi [(\rho \bar{U}^*)_E + (\rho \bar{U}^*)_w] / 2 \quad (27a)$$

3.3 원천항의 선형화

각 방정식에 대한 유한차분방정식에서 원천항 S_ϕ 가 ϕ 의 종속되는 함수의 형태일 때 이를 선형화된 차분방정식으로 나타내기 위하여 다음과 같이 선형화한다.

$$\int_{vol} S_\phi d_{vol} = S_\phi^l \phi_p + S_\phi^u \quad (28)$$

k - ϵ 방정식 모델을 사용하는 경우 각 지배방정식의 원천항을 선형화할 때 S_ϕ^l, S_ϕ^u 는 Table 5와 같고, ASM 모델을 사용할 때 S_ϕ^l, S_ϕ^u 는 Table 6과 같다.

3.4 경계조건

본 해석에서 사용한 경계조건은 Table 7과 같다.

4. 수치해석 결과 및 고찰

선회연소기내에서 재순환유동의 수치해석 및 실

Table 5 The form of the components of linearized source term for k - ϵ equations

ϕ	$S\phi$ /VOL	$Su\phi$ /VOL
1	0	$-\frac{\rho\gamma\bar{U}}{\eta}$
\bar{U}	$-2\frac{\mu_t}{\delta}\left(\frac{\partial\delta}{\partial\xi}\right)^2 - \frac{\gamma}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial\xi}\frac{\partial\mu_t}{\partial\eta}$	$\rho\left[Su_\epsilon + \frac{\delta}{\rho}\frac{\partial\bar{P}}{\partial\xi} + 2\frac{\nu_t}{\delta}\left(\frac{\partial\delta}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial\nu_t}{\partial\eta}\bar{U} - \frac{\delta\bar{U}^2}{\eta}\right]$
\bar{U}_η	$-\frac{\mu_{eff}}{\delta\eta^2} - \frac{\mu_t}{\delta\eta^2}$	$\rho\left[Sv_\eta + \frac{\epsilon}{\rho}\frac{\partial\bar{P}}{\partial\eta} + \frac{\bar{U}_\eta\nu_{eff}}{\delta\eta^2} + \frac{\bar{U}_\eta\nu_t}{\delta\eta^2} - \frac{\gamma\bar{U}\bar{U}_\eta}{\eta}\right]$
\bar{W}	$-\frac{\mu}{\delta\eta^2}$	$\rho\left[Sw_\theta + \frac{\nu\bar{W}}{\delta\eta^2} - \frac{\gamma\bar{U}\bar{W}}{\eta}\right]$
k	$-\delta C_{\mu}\rho^2k/\mu_{eff}$	$P_k + \rho S_k - \frac{\rho\gamma\bar{U}k}{\eta}$
ϵ	$-\rho C_{\epsilon 2}\frac{\epsilon}{k}\delta$	$C_{\epsilon 1}\frac{P_k\epsilon}{k} + \rho S_\epsilon - \frac{\rho\gamma\bar{U}\epsilon}{\eta}$

Table 6 The form of the components of linearized source term for ASM

ϕ'	$S\phi'$ /VOL	$Su\phi'$ /VOL
\bar{U}	$-2\frac{\mu}{\delta}\frac{\partial\gamma}{\partial\eta}\frac{\partial\delta}{\partial\xi}$	$\rho\left(Su_{\epsilon'} + 2\frac{\nu}{\delta}\frac{\partial\gamma}{\partial\eta}\frac{\partial\delta}{\partial\xi}\bar{U} - \frac{\gamma\bar{U}^2}{\eta}\right)$
\bar{U}_η	$-\frac{2\mu}{\delta\eta^2}$	$\rho\left(Sv_{\eta'} + 2\frac{\nu}{\delta\eta^2}\bar{U}_\eta - 2\frac{\gamma}{\eta}\bar{U}_\eta\bar{U}\right)$
\bar{W}	$-\frac{\mu}{\eta^2\delta}$	$\rho\left(Sw_{\theta'} + \frac{\nu}{\eta^2\delta}\bar{W} - \frac{\gamma\bar{U}\bar{W}}{\eta}\right)$
k	$\delta C_{\mu}\rho^2k/\mu_{eff}$	$-\rho P_k' + \rho S_k'$
ϵ	$-\rho C_{\epsilon 2}'\frac{\epsilon}{k}P_k' + \rho S_{\epsilon}'$	$-\rho C_{\epsilon 1}'\frac{\epsilon}{k}P_k' + \rho S_{\epsilon}'$

Table 7 Summary of boundary conditions



	U	U_η	W	P	k	ϵ
(1) Inlet	U inlet	U_η inlet	W inlet	P inlet	k inlet	ϵ inlet
(2) Bottom wall	$A_s=0$	$U_\eta=0$	$A_s=0$	$A_s=0$	W.F.	W.F.
(3) Side wall	$U=0$	$A_w=0$	$A_w=0$	$A_w=0$	W.F.	W.F.
(4) Symmetry axis	$A_s=0$	$U_\eta=0$	$W=0$	$A_s=0$	$A_s=0$	$A_s=0$
(5) Top wall	$A_N=0$	$U_\eta=0$	$A_N=0$	$A_N=0$	W.F.	W.F.
(6) Outlet	I.U.V.	I.U.V.	I.U.V.	I.U.V.	I.U.V.	I.U.V.

W.F. means wall function

I.U.V. means immediate upstream value

험에 사용된 유동조건은 서로의 비교를 위하여 2중 동심원관에서의 레이놀즈수를 30,000으로 하였다. 확대각과 선회각의 변화에 따른 속도, 레이놀즈수

력, 난류운동에너지분포 등을 고찰하기 위하여 확대각을 45°로 고정하고 선회각을 23.1°, 45°, 54.6°로 변화시키는 경우와 선회각을 45°로 고정하고 확대

대각을 30°, 45°, 60°로 변화시키는 경우에 대하여 계산하였다.

주유동방향이 알려진 경우에는 열선프로브에 의한 속도분포 측정이 비교적 정확하다고 알려져 있지만⁽²¹⁾, 본 연구에서와 같은 선회유동은 주유동 방향이 정확히 알려져 있지 않으므로 수치해의 검정을 위하여 수치해의 결과에 의해서 얻어진 주유동 방향을 예측하여 시험부의 $X/D=0.18$, $X/D=0.76$, $X/D=2.79$ 인 3곳에서 \bar{U} , \bar{W} 속도를 측정할 값을 사용하였다⁽²²⁾. 그러나 본 연구와 같은 선회유동에 대해서는 기존 실험자료가 없어 속도분포에 대한 비교가 어렵기 때문에, 이의 정확성을 검증하기 위해서는 보다 많은 연구가 필요하다.

4.1 속도장에 대한 고찰

(1) 수치해와 실험치의 비교

Fig. 4~6은 레이놀즈수가 30,000일 때 무차원 속도 \bar{U}/\bar{U}_0 , \bar{V}/\bar{U}_0 , \bar{W}/\bar{U}_0 을 나타낸 것이다.

확대각 45°, 선회각 45°인 경우에서는 \bar{U}/\bar{U}_0 속도분포의 경우 수치해에서는 전부분에 걸쳐 거의 형태변화가 없으나, 실험치의 경우 각 부분에 걸쳐 차이가 크게 나타나고 있다. 특히 $X/D=0.18$ 인 지점에서는 실험치가 수치해에 비해 윗벽에서 상당한 차이를 나타내고 있다. 실험치의 최대속도가 벽에 상당히 접근하여 흐르고 있는데, 이 부분이 재부착점으로 생각된다. 수치해에 적용된 어떤 모델

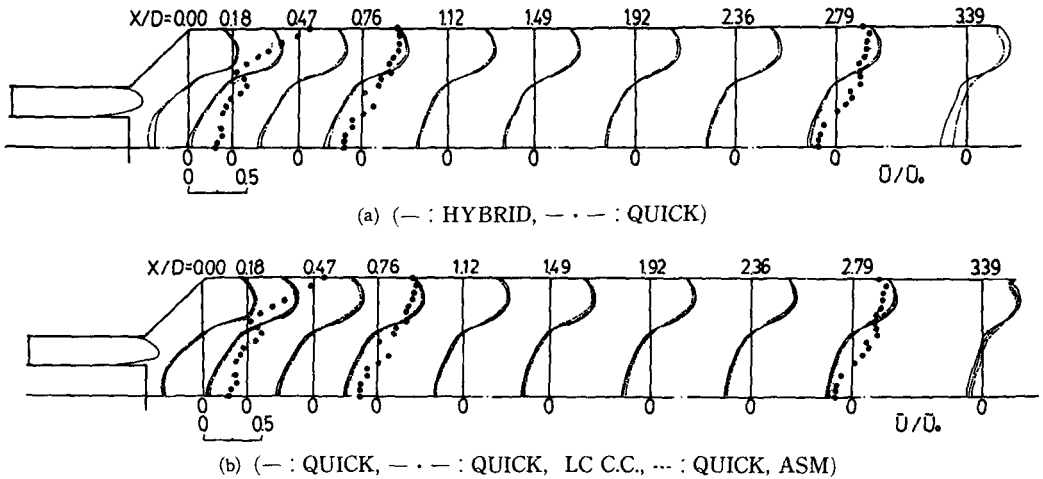


Fig. 4 Predicted dimensionless \bar{U} velocities for $Re=30000$, $\alpha=45.0^\circ$, $\theta=45.0^\circ$ (●: Experiment)

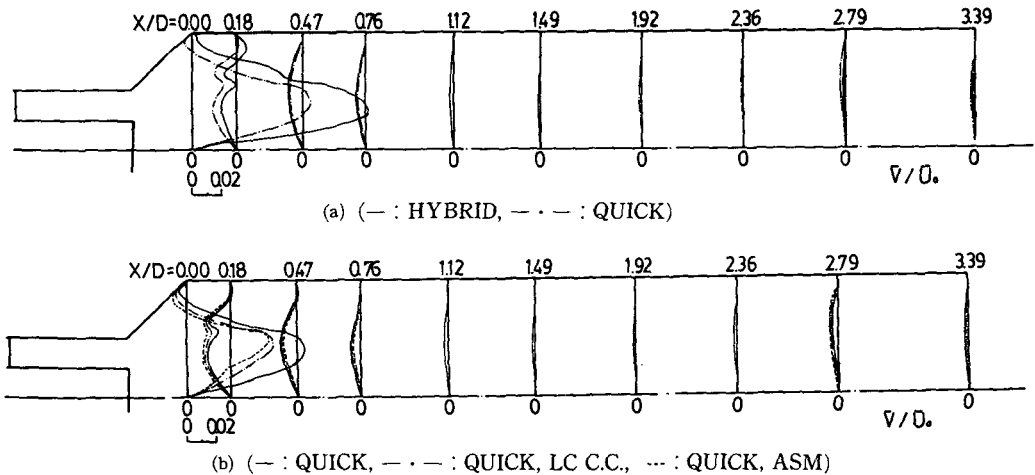


Fig. 5 Predicted dimensionless \bar{V} velocities for $Re=30000$, $\alpha=45.0^\circ$, $\theta=45.0^\circ$

도 이러한 현상을 나타내지 못한 점으로 보아 선회연소유동을 정확히 해석하려면 고차 난류모델에 대한 연구가 더 요구된다는 것을 알 수 있다. $X/D=0.76$ 인 부분과 $X/D=2.79$ 인 지점에서는 실험치의 경우 재순환영역의 폭이 상당히 감소한 경향을 보여주는 것이 수치해의 경우와 다른 점이다.

실험치에서 재순환영역이 감소된 것은 원심력에 의해 $X/D=0.18$ 인 지점에서 유동이 벽에 충돌하였다가 $X/D=2.79$ 인 지점에서 중심선 부근으로 모였다가 다시 외벽쪽으로 퍼지기 때문인 것으로 생각된다. \bar{W}/\bar{U}_0 속도분포의 경우에는 외벽과 중심선의 중간부분을 제외하고는 수치해와 잘 일치하고 있다. 실험치가 수치해의 값에서 벗어난 부분은 \bar{U}/\bar{U}_0 속도분포에서 역류가 일어나는 부분으로 이 지점에서의 주유동 방향을 정확히 예측하지 못함에 따른 실험오차도 그 원인의 하나로 생각된다.

(2) 적용 난류모델에 대한 비교

Fig. 4는 확대각 45° , 선회각 45° 인 경우의 \bar{U}/\bar{U}_0 속도분포인데 적용모델에 따르면 대수응력모델이 실험치와 가장 가깝게 접근하고 있고, 유선곡률수정모델은 대수응력모델에 의한 결과에 가장 근접해 있는 것을 볼 수 있다.

이와 같이 실험치와 비교하여 볼 때, 표준 $k-\epsilon$ 난류모델이 속도분포를 예측하는데 있어 가장 정확하지 못한 이유로 생각되는 것은 연소실의 확대부와 허브에 의해 그리고 선회유동에 의해 유동의 유선(streamline)이 곡률을 갖게 되는데, 유선에 이와 같은 곡률이 있으면 유동장 내부에 응력과 변형

율에 변화가 생겨 와점성계수가 변화한다고 알려져 있으나 표준 $k-\epsilon$ 난류모델에서는 이 영향이 고려되어 있지 않기 때문이다.

Fig. 7의 유동함수에서 허브로 인하여 유선이 휘어지는 것을 알 수 있는데 이 유선의 곡률은 크게 두 부분으로 나눌 수 있다. 즉 허브 위를 지나는 주유동(main stream)의 곡률과 허브 앞 부분의 재순환 유동의 곡률이다. Fig. 7은 확대각 45° , 선회각 $23.1^\circ, 45.0^\circ, 54.6^\circ$ 인 경우에 각각 대수응력모델에 의한 유동함수를 보여주는데, 선회각이 작을수록 허브 앞에 또 다른 재순환유동의 영역이 크게 나타나며, 선회각이 클수록 재순환유동의 곡률이 커짐을 나타낸다. 재순환유동에서의 곡률과 주유동에서의 곡률중 어느것이 유동해석에 더 큰 영향을 미치는지는 실험값으로부터 알 수는 없으나, 곡률수정에 의한 유동속도 예측은 앞에서 본 바와 같이 실험치에 더 접근된 결과를 주었다. 그러나 유선곡률수정모델이 선회난류유동과 같이 복잡한 유동장에서는 응력과 변형율 사이의 관계를 정확히 묘사하지 못하였기 때문에 2차 난류모델을 적용한 대수응력모델과 차이가 나타나고 있다. 유동속도에 대해서는 대수응력모델을 적용한 결과가 현재의 실험치와 가장 유사하게 근접하고 있으나, 재부착점 등을 정확히 예측하지는 못하였다. 따라서 선회난류유동과 같이 복잡한 유동을 해석하는데 대한 대수응력모델의 적용에 관한 연구가 더욱 요구된다. 이러한 연구는 주로 모델상수 선정에 대한 연구일 것이다.

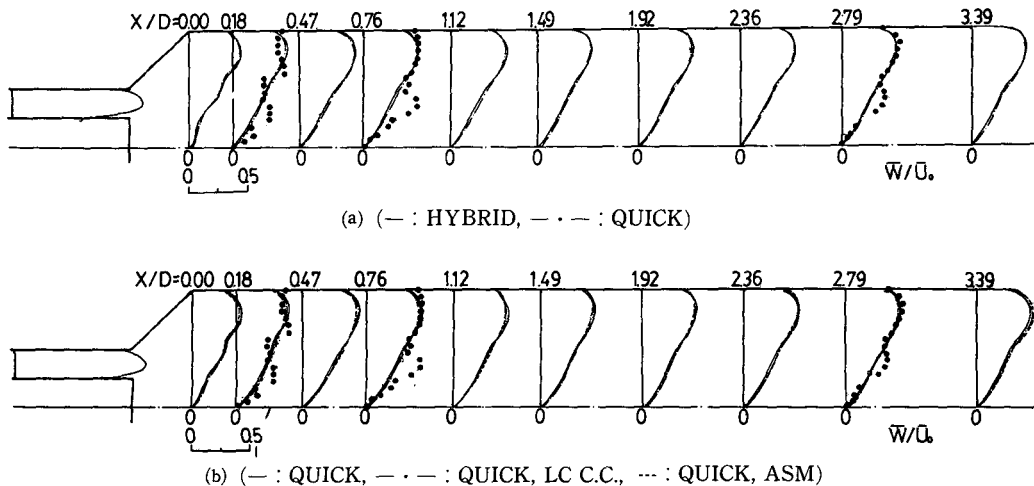


Fig. 6 Predicted dimensionless \bar{W} velocities for $Re=30000, \alpha=45.0^\circ, \theta=45.0^\circ$ (● : Experiment)

(3) 선회각도의 변화에 따른 유동특성

Fig. 8, 9는 확대각을 45°로 고정하고 선회각을 23.1°, 45°, 54.6°로 변화시켰을 때의 \bar{U}/\bar{U}_0 , \bar{W}/\bar{U}_0 의 속도분포이다. \bar{U}/\bar{U}_0 속도분포에서는 선회각도의 변화에 따라 $X/D=1.12$ 인 지점 이후에는 재순환영역의 폭이 크게 변화하지 않는 것을 볼 수 있다. 그러나 역류의 크기는 $X/D=0$ 인 지점에서 크게 차이가 난다. 이것은 선회각이 증가함에 따라 주유동이 원심력에 의해 윗벽으로 밀착하기 때문인

것으로 풀이된다. 선회각이 증가하면 재순환영역의 크기에 상당한 영향을 줄 것으로 예측되었으나, 현재의 결과에는 $X/D=0.76$ 인 지점 이전에서만 선회각도의 증가에 따라 재순환영역이 커지는 것을 보여준다.

(4) 확대각도의 변화에 따른 유동특성

Fig. 10, 11은 선회각을 45°로 고정하고 확대각을 30°, 45°, 60°로 변화시키는 경우의 \bar{U}/\bar{U}_0 , \bar{W}/\bar{U}_0 속도분포를 나타낸다.

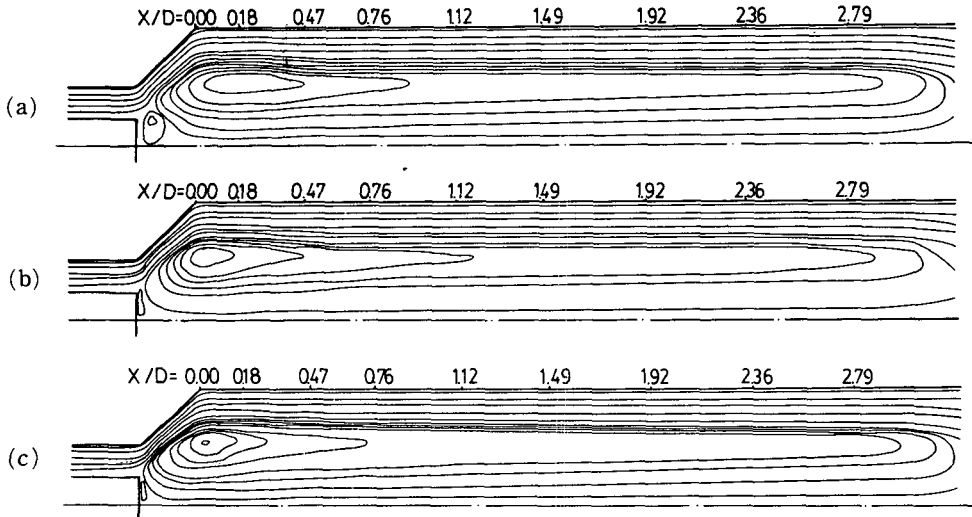


Fig. 7 Predicted streamline plots with expansion angle $\alpha=45\text{deg.}$ and various swirl angles θ : (a) 23.1deg. (b) 45deg. (c) 54.6deg. (QUICK, ASM)

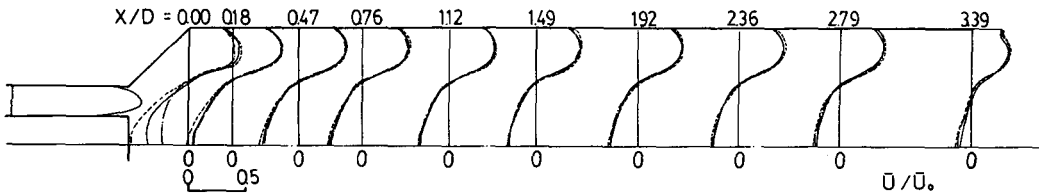


Fig. 8 Predicted \bar{U} velocity profiles showing the effect of swirl vane angle θ for expansion angle $\alpha=45\text{deg.}$ (— : $\theta=45.0\text{deg.}$, - - - : $\theta=23.1\text{deg.}$, : $\theta=54.6\text{deg.}$)(QUICK, LC C.C.)

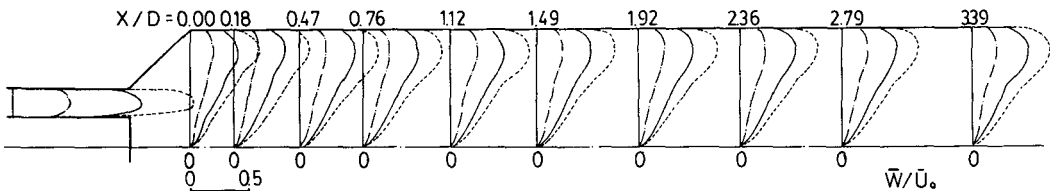


Fig. 9 Predicted \bar{W} velocity profiles showing the effect of swirl vane angle θ for expansion angle $\alpha=45\text{deg.}$ (— : $\theta=45.0\text{deg.}$, - - - : $\theta=23.1\text{deg.}$, : $\theta=54.6\text{deg.}$)(QUICK, LC C.C.)

\bar{U}/\bar{U}_0 속도분포에서는 특이하게 확대각이 커질수록 재순환영역이 작아진다. 이것은 확대각이 작을수록 주유동이 확대각을 따라 밀착되어 흐르나, 확대각이 큰 경우에는 확대각을 따르지 않고 윗벽 구석부근에 제 2의 재순환유동이 생겨서 이것이 허브 앞의 재순환유동의 형성을 방해하기 때문인 것으로 생각된다. 이러한 양상은 \bar{W}/\bar{U}_0 속도분포에서도 볼 수 있는데, 연소실의 윗벽과 중심선의 중간부분에서 \bar{W}/\bar{U}_0 속도분포가 확대각이 커질수록 큰 것을 보여준다.

4.2 난류운동에너지생성율과 소멸율

Fig. 12는 난류운동에너지분포를 나타낸 것인데, 난류운동에너지는 윗벽과 중심선부근에서 작게 나타나고 \bar{U}/\bar{U}_0 속도구배가 큰 지점에서 가장 크게 나타난다. 확대부를 지날 때 불안정한 모양이 X/D 가 증가할수록 안정화되어 가는 것을 볼 수 있다. QUICK Scheme과 HYBRID Scheme을 적용하였을 때는 QUICK Scheme의 경우가 보다 완만한 분포를 보여주며, 각각의 난류모델에 대해서는

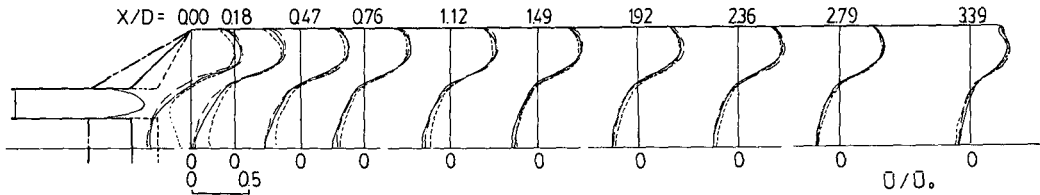


Fig. 10 Predicted \bar{U} velocity profiles showing the effect of expansion angle α for swirl vane angle $\theta=45\text{deg}$. (— : $\alpha=45.0\text{deg}$., - · - : $\alpha=30.0\text{deg}$., ---- : $\alpha=60.0\text{deg}$.) (QUICK, LC C.C.)

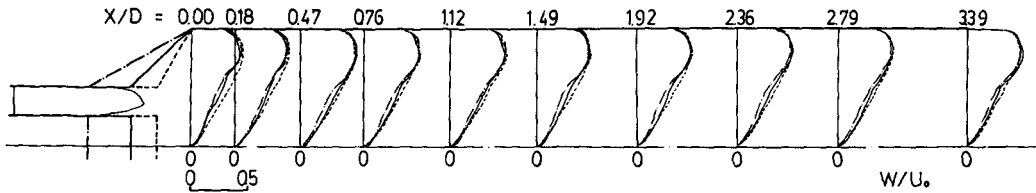
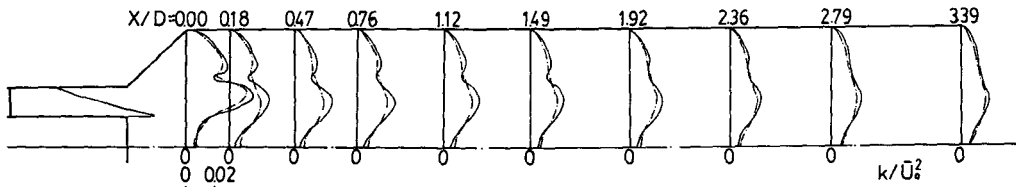
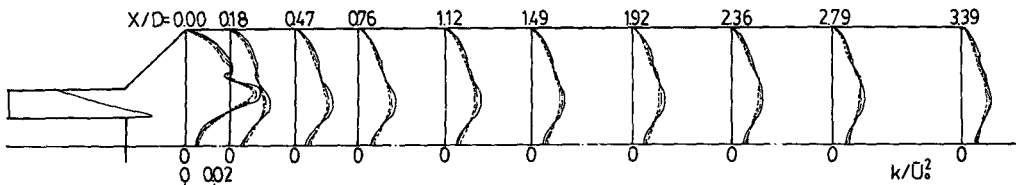


Fig. 11 Predicted \bar{W} velocity profiles showing the effect of expansion angle α for swirl vane angle $\theta=45\text{deg}$. (— : $\alpha=45.0\text{deg}$., - · - : $\alpha=30.0\text{deg}$., ---- : $\alpha=60.0\text{deg}$.) (QUICK, LC C.C.)



(a) (— : HYBRID, - · - : QUICK)



(b) (— : QUICK, - · - : QUICK, LC C.C., ---- : QUICK, ASM)

Fig. 12 Predicted dimensionless turbulent kinetic energy for $Re=30000$, $\alpha=45.0^\circ$, $\theta=45.0^\circ$

$k-\epsilon$ 모델보다 대수응력모델이 안정된 형태를 유지하고 있다.

Fig. 13은 난류운동에너지생성율을 소멸율로 나눈 값으로 이 값이 1이면 난류에너지의 생성과 소멸이 평형상태임을 나타낸다. 그러나 그림에서 알 수 있듯이 대부분의 구간에서 P/ϵ 이 1보다 크거나 작아서 극심한 비평형상태임을 알 수 있다. 선회각의 증가에 따라 차이는 있으나 \bar{U} 속도가 최대인 부근에서는 P/ϵ 이 1보다 작고, \bar{U}/\bar{U}_0 속도구배가 최대인 지점에서는 이 값이 1보다 크다. 또한 중심선 부근의 역류가 큰 부분에서는 음의 값도 생긴다. 따라서 난류운동에너지는 \bar{U}/\bar{U}_0 속도구배가 가장 큰 부분에서 생성되어 최대속도와 역류가 생기는 곳으로 확산되어 가며 소멸되는 것을 알 수 있다. 특히 선회각이 23.1° 이고 $X/D=0$ 인 지점에서는 중심선 부근에 비평형성이 상당히 크게 나타나고 있다.

4.3 레이놀즈응력분포에 대한 고찰

Fig. 14는 대수응력모델에 의하여 계산된 레이놀

즈응력분포를 보여주고 있다. $X/D=0$ 인 지점에서는 유동의 비평형성으로 인하여 응력분포가 다른 부분보다 복잡하다. $X/D=0.18$ 이후에는 유동의 안정화로 인하여 응력분포가 거의 일정하다. $\overline{u'u'}$, $\overline{w'w'}$ 는 \bar{U}/\bar{U}_0 속도구배가 큰 지점에서 가장 크게 나타나며 $\overline{v'v'}$ 는 중심선보다 약간 위에서 크게 나타난다. 그러나 $X/D=0$ 인 지점에서는 $\overline{u'u'}$, $\overline{v'v'}$, $\overline{w'w'}$ 모두 \bar{U}/\bar{U}_0 속도구배가 큰 지점에서 가장 크다. $\overline{u'v'}$, $\overline{u'w'}$, $\overline{v'w'}$ 도 확대부를 벗어나 X/D 가 0.18보다 큰 지점에서는 일정형태를 유지하나 $X/D=0$ 인 부분에서는 다른 양상을 보여준다. $X/D=0.18$ 인 지점 이후에는, $\overline{u'v'}$ 는 \bar{U}/\bar{U}_0 속도구배가 큰 지점에서 음의 방향으로 가장 크며 $\overline{v'w'}$ 는 윗벽 부근에서 크게 나타나고, $\overline{u'w'}$ 는 $X/D=0$ 인 지점과 출구부분을 제외하고는 0에 가깝다.

4.4 확대부에서의 유동특성

확대부에서는 유동이 격자선에 경사지게 유입되어 수치해가 수치확산에 큰 영향을 받으므로

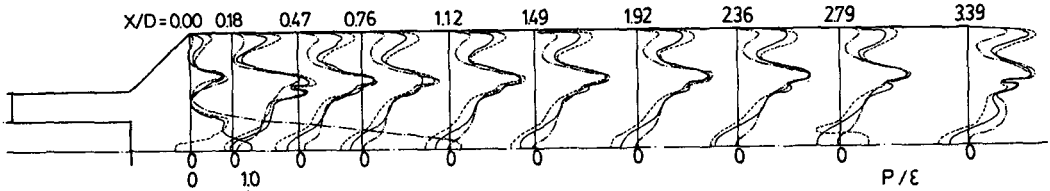


Fig. 13 Variation of ratio of generation to dissipation rate of turbulent kinetic energy with expansion angle $\alpha = 45.0\text{deg}$. and various swirl vane angles (— : $\theta = 45.0\text{deg}$., - - - : $\theta = 23.1\text{deg}$., ··· : $\theta = 54.6\text{deg}$.) (QUICK, ASM)

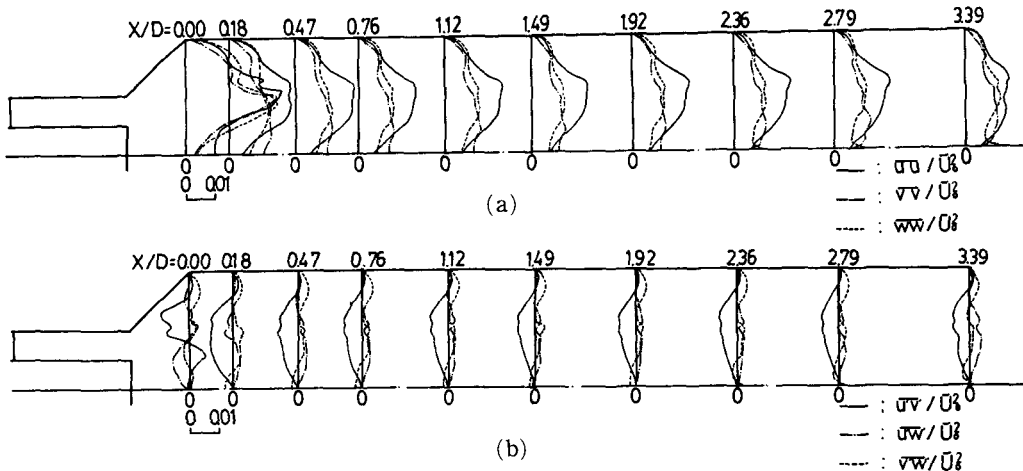


Fig. 14 Predicted dimensionless Reynolds stress for $Re = 30000$, $\alpha = 45.0\text{deg}$., $\theta = 45.0\text{deg}$. (QUICK, ASM)

QUICK Scheme과 HYBRID Scheme의 차이에 의한 해석결과와 차이가 크고, 또한 유동이 복잡하여 적용 난류모델에 따라 해석결과와 차이가 크게 나타나고 있다.

Fig. 15~18에 나와 있는 X의 값은 확대관이 시작되는 지점을 0으로 하여 축방향으로의 거리를 단위 [m]로 나타낸 것이다. 이 확대부분에서는 \bar{V}/\bar{U}_0 속도가 상당히 크며 허브 바로 앞 부분에서는 유동이 상당히 불안정함을 보여준다.

난류운동에너지분포는 \bar{U}/\bar{U}_0 속도구배가 큰 곳에서는 적용 Scheme 및 적용 난류모델에 따라 차이가 크게 나타난다. 이것은 유동이 안정화되지 않은 불규칙하고 비평형상태임을 보여주는 것이다.

5. 결 론

밀폐된 선회연소기내의 유동에서 비직교 좌표변환법에 의하여 난류재순환유동을 수치해석하고, 열선유속계로 3차원 속도분포를 측정하여 그 결과를 비교함으로써 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 선회각의 증가는 재순환영역을 증가시키나, 확대각의 증가는 재순환영역을 감소시킨다.

(2) 선회각이 커지면 원심력에 의하여 벽면부근의 유동속도 \bar{W} 를 증가시키며, 또한 선회운동에 의한 원심력에 의하여 \bar{U} 속도분포의 최대속도 부분이 외벽에 가깝게 접근하여 흐른다.

(3) 확대부에서는 유선이 격자선에 경사지게 유입되므로 수치확산이 수치해에 미치는 영향이 크다. 따라서 확대부에서는 HYBRID Scheme과 QUICK

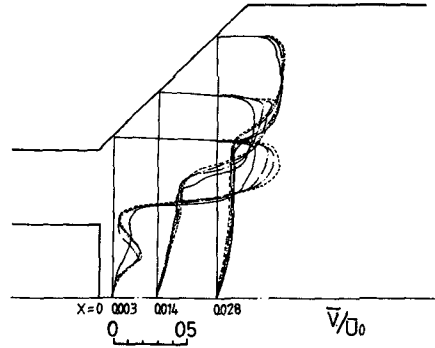


Fig. 16 Predicted dimensionless \bar{V} velocities for $Re = 30000, \alpha = 45^\circ, \theta = 45^\circ$
 (— : HYBRID, - - - : QUICK,
 - · - · : QUICK, LC C.C.,
 ··· : QUICK, ASM)

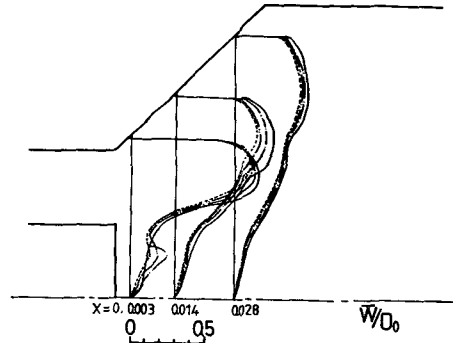


Fig. 17 Predicted dimensionless \bar{W} velocities for $Re = 30000, \alpha = 45^\circ, \theta = 45^\circ$
 (— : HYBRID, - - - : QUICK,
 - · - · : QUICK, LC C.C.,
 ··· : QUICK, ASM)

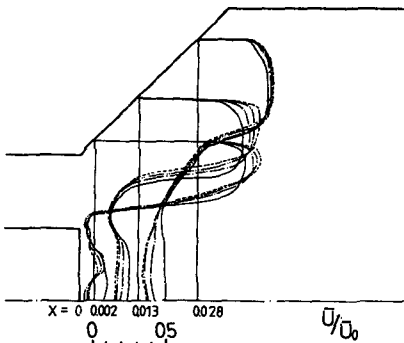


Fig. 15 Predicted dimensionless \bar{U} velocities for $Re = 30000, \alpha = 45^\circ, \theta = 45^\circ$
 (— : HYBRID, - - - : QUICK,
 - · - · : QUICK, LC C.C.,
 ··· : QUICK, ASM)

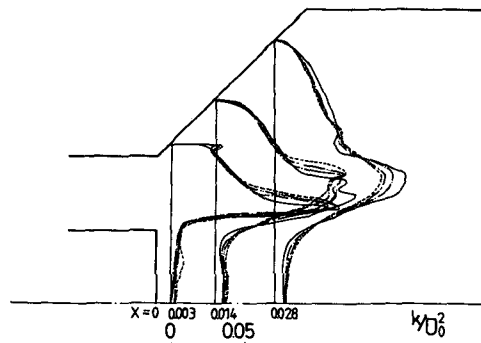


Fig. 18 Predicted dimensionless turbulent kinetic energy for $Re = 30000, \alpha = 45^\circ, \theta = 45.0^\circ$
 (— : HYBRID, - - - : QUICK,
 - · - · : QUICK, LC C.C.,
 ··· : QUICK, ASM)

Scheme 간에는 차이가 크게 나타난다. 평행부에서는 QUICK Scheme과 HYBRID Scheme의 큰 차이는 없으나 QUICK Scheme이 실험치에 가깝다.

(4) 속도분포에 대해 확대부 및 출구부에서는 각각의 적용 난류모델에 따라 수치해에 미치는 영향이 크나, 평행부에서는 큰 차이가 없다. 평행부에서 수치해와 실험치를 비교할 때 대수응력모델을 적용한 경우가 비교적 실험치에 가깝게 일치하며, 난류모델중 LC 유선곡률수정모델이 대수응력모델에 가장 근접한 결과를 나타낸다.

(5) 난류운동에너지, 레이놀즈응력분포는 \bar{U} 속도구배가 큰 지점에서 크게 나타나며, 또한 이 지점에서 비평형성이 크게 나타난다.

(6) 실험값에서는 재부착점이 나타나며, 이곳에서는 유동이 벽에 밀착되어 \bar{U} 속도가 외벽에 근접한 지점에서 가장 크게 나타나지만 수치해에는 이런 현상이 나타나지 않는다. 따라서 선회난류유동과 같이 복잡한 유동을 해석할 때의 난류모델에 대해서는 더욱 연구가 필요하다.

후 기

본 연구는 아산사회복지사업재단의 연구비 지원으로 수행된 것이며, 이에 대해 심심한 감사의 뜻을 포함합니다.

참 고 문 헌

- (1) Lilley, D.G. and Rhode, P.L., 1982, "A Computer Code for Swirling Turbulent Axisymmetric Recirculating Flows in Practical Isothermal Combustor Geometries", NASA Contractor Report 3442.
- (2) Lilley, D.G., 1976, "Primitive Pressure-Velocity Code for the Computation of Strongly Swirling Flows", AIAA J., Vol. 14, No 6, pp. 746~756.
- (3) 이병곤, 1985, "인공조도를 갖는 2중동심원관의 난류재순환 유동과 열전달 해석", 고려대학교, 박사학위논문.
- (4) Thompson, J.F., Thams, F.C. and Mastin, C.W., 1974, "J. Comp. Phys.", Vol. 15, pp. 299~391.
- (5) Thompson, J.F., Thams, F.C. and Mastin, C.W., 1977, "J. Comp. Phys.", Vol. 24, pp. 274~302.
- (6) Fagri, M. and Asako, Y., 1984, "Proc. of ASME Winter Annual Meeting".
- (7) 이재현, 이상렬, 1986, "비정규 경계면을 갖는 밀폐 공간내에서의 자연대류에 관한 수치적 연구", 대한기계학회 86춘계학술대회 초록집, pp. 204~208.
- (8) Gosman, A.D. and Ideriah, F.J.K., 1976, "TEACH-2E: A General Computer Program for Two Dimensional Turbulent, Recirculating Flows", Dept. Mech. Eng., Imperial College, London.
- (9) Patankar, S.V. and Spalding, D.B., 1972, "A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three Dimensional Parabolic Flows", Int. J. Heat Transfer, Vol. 15, p. 1978.
- (10) Iacovides, H. and Launder, B.E., 1983, "PSL; An Economical Approach to the Numerical Analysis of Near Wall Elliptic Flow", TFD/83/3, UMIST.
- (11) Launder, B.E. and Spalding, D.B., 1974, "The Numerical Computation of Turbulent Flows", Comp. Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 3, p. 269.
- (12) Huand, P.G. and Leschziner, M.A., 1984, "Alternative Schemes for Discretizing Steady Convection Computational Fluid Dynamics Collouium", UMIST.
- (13) Anderson, D.A., Tannehill, J.C. and Pletcher, R.H., 1984, "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", pp. 247~255.
- (14) 최영돈, Launder, B.E., 1985, "4각 단면의 180° 곡관에서의 난류유동과 열전달 해석", 대한기계학회논문집, 제 9권, 제 1호, pp. 91~108.
- (15) Bradshow, p., 1973, "Effect of Streamlines Curvature on Turbulent Flow", AGAD Graph, No. 169.
- (16) Leschziner, M.A. and Rodi, W., 1981, "Calculation of Annular and Twin Parallel Jets Using Various Discretization Schemes and Turbulence-Model Variations", ASME-Journal of Fluids Engineering, Vol. 103, June, p. 352.
- (17) 이병곤, 최영돈, 1986, "주기적으로 단면이 변화하는 완전확립된 난류재순환유동과 난류열전달의 수치해석", 대한기계학회논문집, 제10권, 제 1호, pp. 138~149.
- (18) Johnson, R.W., 1984, "Turbulent Convecting Flow in a Square Duct with 180° Bend; An Experimental and Numerical Study", ph. D, Thesis, UMIST.
- (19) Launder, B.E. and Iacovides, H., 1985, "Computation of Flow and Heat Transfer in Flow Around a 180° Bend", TFD/85/5(R), UMIST.
- (20) Patankar, S.V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", McGraw Hill.
- (21) 문 찬, 1987, "정사각형단면 180° 곡관내의 난류유동특성과 강제대류열전달에 관한 연구", 전남대학교, 박사학위논문.

(2) 신중근, 1987, "비직교 좌표변환에 의한 선회연소기내 난류제순환유동의 수치해석", 고려대학교, 석사학위논문.

(3) Gibson, M.M. and Launder, B.E., 1978, "Ground Effect on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layer", J. Fluid Mech. V. 86, p. 491.

부 록

$$Su = \frac{\partial}{\partial x} \nu_t \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \nu_t \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \quad (\text{A1a})$$

$$Sv = \frac{\partial}{\partial x} \nu_t \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \nu_t \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} - \nu_{eff} \frac{\bar{V}}{r^2} - \nu_t \frac{\bar{V}}{r} + \frac{\bar{W}^2}{r} \quad (\text{A1b})$$

$$Sw = \frac{\nu_t}{r} \frac{\partial \bar{W}}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \nu_t \frac{\bar{W}}{r} - \nu_{eff} \frac{\bar{W}}{r^2} - \frac{\bar{V} \bar{W}}{r}$$

$$\begin{aligned} Su_\epsilon = & -\frac{\delta}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} + \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\gamma \nu_{eff} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \gamma \nu_{eff} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} \right) + \frac{\gamma}{\eta} \nu_{eff} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} \\ & - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \nu_{eff} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\delta \nu_t \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} \right) + \nu_t \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\gamma \nu_t \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \right) - 2 \frac{\nu_t}{\delta} \eta \left(\frac{\partial \delta}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \nu_t \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\gamma}{\delta} \nu_t \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \eta} \right) - 2 \frac{\nu_t}{\delta} \left(\frac{\partial \delta}{\partial \xi} \right)^2 \bar{U} - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \frac{\partial \nu_t}{\partial \eta} \bar{U} \end{aligned} \quad (\text{A2a})$$

$$\begin{aligned} Sv_\eta = & -\frac{\epsilon}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} + \frac{\delta \gamma}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} - \frac{\bar{U} \bar{U}_\eta \gamma}{\eta} - \gamma \frac{\nu_{eff}}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \eta} + 2 \frac{\nu_{eff}}{\delta} \left(\frac{\partial \delta}{\partial \xi} \right)^2 \bar{U} + 2 \frac{\nu_{eff}}{\delta} \gamma^2 \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \\ & - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\gamma \nu_{eff} \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \eta} \right) - 2 \nu_{eff} \gamma \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} - \gamma \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \frac{\partial \nu_{eff}}{\partial \xi} \bar{U} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\gamma \eta \nu_{eff} \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \nu_{eff} \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \xi} \\ & + \frac{\gamma^2}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \frac{\partial \nu_{eff}}{\partial \eta} \bar{U} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta}{\delta} \nu_{eff} \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \eta} \right) + \frac{\nu_{eff}}{\delta \eta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \bar{U} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \frac{\partial \nu_{eff}}{\partial \eta} \bar{U} + 2 \frac{\nu_{eff}}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\epsilon \nu_t \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \right] + 2 \epsilon \frac{\nu_t}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\gamma \delta \nu_t \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} \right) - \gamma \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \nu_t \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\epsilon}{\delta} \eta \nu_t \frac{\partial \nu_t}{\partial \eta} \right) \\ & - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \nu_t \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \eta} + \frac{\epsilon}{\delta \eta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \nu_t \bar{U} + \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \nu_t \bar{U} + \frac{\epsilon}{\delta} \frac{\partial \nu_t}{\partial \eta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \bar{U} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\gamma \nu_t \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \xi} \right) \\ & + \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \eta \nu_t \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \xi} - \frac{\bar{U}_\eta \nu_{eff}}{\delta \eta^2} - \frac{\bar{U}_\eta \nu_t}{\delta \eta^2} - \frac{\bar{U} \gamma \nu_{eff}}{\delta \eta^2} - \frac{\gamma \bar{U} \nu_t}{\delta \eta^2} + \frac{\bar{W}^2}{\eta} \end{aligned} \quad (\text{A2b})$$

$$\begin{aligned} Sw_\theta = & -\frac{\gamma}{\delta} \nu_{eff} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\gamma \nu_{eff} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \nu_{eff} \gamma \frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} \right) + \frac{\gamma}{\eta} \nu_{eff} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} \\ & + \frac{\nu_t}{\delta \eta} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \nu_t \frac{\bar{W}}{\delta \eta} \right) - \frac{\nu \bar{W}}{\delta \eta^2} - \frac{\bar{W} \bar{U}_\eta}{\eta} - \frac{\gamma \bar{W} \bar{U}}{\eta} \end{aligned} \quad (\text{A2c})$$

$$\begin{aligned} P_k = & \mu_t \left\{ \delta (1 + \epsilon) \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} \right)^2 - 2 \epsilon \gamma \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} + \frac{2 \epsilon - 1}{\delta} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1 + \epsilon}{\delta} \left(\frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1 + \epsilon}{\delta} \left(\frac{\partial \delta}{\partial \xi} \right)^2 \bar{U}^2 \right. \\ & + \frac{2 + 2 \epsilon}{\delta} \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \bar{U} + \frac{2 \epsilon \gamma}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} + 2 \epsilon \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} + (4 - 2 \epsilon) \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \xi} \\ & + \delta \left(\frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \xi} \right)^2 + \delta \left(\frac{\gamma^2}{\delta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \gamma \delta \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} - 2 \gamma \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \eta} - 2 \gamma \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \xi} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \bar{U} - 2 \gamma^2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \eta} \\ & - 2 \gamma^2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \bar{U} + \delta \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} \right)^2 - 2 \gamma \frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} + \frac{\epsilon}{\delta} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\bar{U}_\eta^2}{\delta \eta^2} + 4 \frac{\gamma \bar{U} \bar{U}_\eta}{\delta \eta^2} \\ & \left. + 2 \frac{\gamma^2 \bar{U}^2}{\delta \eta^2} - 2 \frac{\bar{W}}{\delta \eta} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} + \frac{\bar{W}^2}{\delta \eta^2} \right\} \quad (\text{A2d}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_k = & -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\gamma \left(\frac{\mu + \mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial \eta} \right] - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\gamma \eta \left(\frac{\mu + \mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial \xi} \right] - \frac{\gamma}{\delta} \left(\frac{\mu + \mu_t}{\sigma \epsilon} \right) \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \frac{\partial k}{\partial \eta} \\ & + \frac{\gamma}{\eta} \left(\frac{\mu + \mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (\text{A2e})$$

$$S_\epsilon = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\gamma \left(\frac{\mu + \mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} \right] - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\gamma \eta \left(\frac{\mu + \mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} \right] - \frac{\gamma}{\delta} \left(\frac{\mu + \mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta}$$

$$+ \frac{\gamma(\mu + \mu_t)}{\eta} \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} \quad (\text{A2f})$$

$$\begin{aligned} Su'_\epsilon &= \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} + \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[2\nu\gamma \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \right] - \frac{\partial}{\eta \partial \eta} \left[\eta\nu\gamma \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} \right] + 2\nu \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} \\ &+ \frac{3\nu}{\delta} \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} - \frac{\gamma}{\eta} \bar{u}'^2 + \frac{\partial}{\eta \partial \eta} \left[\eta\nu \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \xi} \right] - \frac{\partial}{\eta \partial \eta} \left[\eta\nu \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \eta} \right] - 2 \frac{\nu}{\delta} \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \bar{U} \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\delta \left(\nu \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\delta (\bar{u}'^2) - \frac{2}{3} k \frac{\partial \delta}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\eta \partial \eta} \left[\eta (u'v') \right] + \frac{\partial}{\eta \partial \eta} \left[\eta\gamma (\bar{u}'^2) \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{A3a})$$

$$\begin{aligned} Sv'_\eta &= -\frac{\epsilon}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} + \frac{\delta \gamma}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} - \frac{\gamma \bar{U}_\eta \bar{U}}{\eta} + \frac{\partial}{\eta \partial \eta} \left[\eta\nu\epsilon \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\nu\epsilon \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \right] - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\nu\gamma \delta \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} \right] \\ &- \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\nu\eta\gamma \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \right] - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\nu\gamma \bar{U} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \right] + 2\epsilon \frac{\nu}{\delta} \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} - 2 \frac{\partial}{\eta \partial \eta} \left[\eta\gamma\nu \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \xi} \right] + 2\nu \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \xi} \\ &- 2\nu\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\eta \partial \eta} \left[\eta\nu \frac{2\epsilon}{\delta} \bar{U} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \right] - 2 \frac{\nu}{\delta} \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \bar{U} - 2 \frac{\gamma}{\eta} (\overline{u'v'}) - \frac{2\nu}{\delta \eta^2} (\bar{U}_\eta + \gamma \bar{U}) \\ &+ 2\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} (\bar{u}'^2) - 2 \frac{\nu}{\delta} \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\delta (-v'u') \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\delta (\gamma u'^2) \right] - \frac{\partial}{\eta \partial \eta} \left[\eta v'^2 \right] \\ &- \frac{1}{\eta} \frac{2}{3} k - \frac{\partial}{\eta \partial \eta} \left[\eta\gamma^2 (\bar{u}')^2 \right] + \frac{\partial}{\eta \partial \eta} \left[\eta (2\gamma v' \overline{u'}) \right] + \frac{\bar{W}^2}{\eta} + \frac{\bar{w}'^2}{\eta} \end{aligned} \quad (\text{A3b})$$

$$\begin{aligned} Sw'_\theta &= \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \nu \frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\nu\gamma \frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} \right) - \nu \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\eta \partial \eta} \left[\eta\gamma\nu \frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} \right] - \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} (\overline{u'v'}) \\ &- \frac{\nu \bar{W}}{\eta^2 \delta} - \frac{1}{\eta} (\overline{v'w'}) - \frac{\gamma}{\eta} \bar{U} \bar{W} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\delta (w'u') \right] - \frac{\partial}{\eta \partial \eta} \left[\eta (w'v') \right] + \frac{\partial}{\eta \partial \eta} \left[\eta\gamma (\overline{w'u'}) \right] - \frac{\bar{W} \bar{U}_\eta}{\eta} \end{aligned} \quad (\text{A3c})$$

$$\begin{aligned} P_{k'} &= -\delta \left(\bar{u}'^2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \right) + \bar{v}'^2 \left(\frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \delta \partial \eta} + \frac{\bar{U}}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} + \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \eta} + \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \right) + \bar{w}'^2 \frac{(\bar{U}_\eta + \gamma \bar{U})}{\delta \eta} \right. \\ &+ \overline{u'v'} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\delta \partial \eta} + \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \bar{U} + \gamma \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \bar{U}_\eta}{\partial \eta} - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \bar{U} - \frac{\gamma^2}{\delta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \right) \\ &\left. + \overline{u'w'} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} \right) + \overline{u'w'} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\delta \partial \eta} - \frac{\bar{W}}{\delta \eta} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A3d})$$

$$\begin{aligned} S_{k'} &= \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \left(\nu + C_{k\epsilon} \frac{k}{\epsilon} \bar{u}'^2 \right) \frac{\partial k}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(C_{k\epsilon} \frac{k}{\epsilon} \overline{u'v'} - \left(\nu + C_{k\epsilon} \frac{k}{\epsilon} \bar{u}'^2 \right) \gamma \right) \frac{\partial k}{\partial \eta} \right] \\ &- \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \left(\nu + C_{k\epsilon} \frac{k}{\epsilon} \bar{u}'^2 \right) \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial k}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\eta \partial \eta} \left[\eta \left(C_{k\epsilon} \frac{k}{\epsilon} \overline{u'v'} - \gamma \left(\nu + C_{k\epsilon} \frac{k}{\epsilon} \bar{u}'^2 \right) \right) \frac{\partial k}{\partial \xi} \right] \\ &+ \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \left(C_{k\epsilon} \frac{k}{\epsilon} \overline{u'v'} \right) \frac{\partial k}{\delta \partial \eta} - 2 \frac{\partial}{\eta \partial \eta} \left[\eta \left(C_{k\epsilon} \frac{k}{\epsilon} \overline{u'v'} \right) \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial k}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (\text{A3e})$$

$$\begin{aligned} S_{\epsilon'} &= \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \left(\nu + C_{\epsilon} \frac{k}{\epsilon} \bar{u}'^2 \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(C_{\epsilon} \frac{k}{\epsilon} \overline{u'v'} - \gamma \left(\nu + C_{\epsilon} \frac{k}{\epsilon} \bar{u}'^2 \right) \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} \right] \\ &- \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \left(\nu + C_{\epsilon} \frac{k}{\epsilon} \bar{u}'^2 \right) \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\eta \partial \eta} \left[\eta \left(C_{\epsilon} \overline{v'w'} - \gamma \left(\nu + C_{\epsilon} \frac{k}{\epsilon} \bar{u}'^2 \right) \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} \right] \\ &+ \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \left(C_{\epsilon} \frac{k}{\epsilon} \overline{u'v'} \right) \frac{\partial \epsilon}{\delta \partial \eta} - 2 \frac{\partial}{\eta \partial \eta} \left[\eta \left(C_{\epsilon} \frac{k}{\epsilon} \overline{u'v'} \right) \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (\text{A3f})$$