

<論 文>

脆性材料의 衝擊應答에 관한 研究

—正方形 유리板의 應力解析을 基準으로—

梁東律* · 金淇煥* · 梁仁榮**

(1988年 1月 16日 接受)

A Study on the Impulsive Response of Fragile Materials Based on an Analytical Study of Impulsive Stresses in a Square Glass Plate

Dong-Yul Yang, Ki-Hwan Kim and In-Young Yang

Key Words: Hertz's Contact Law(Hertz의 接觸理論), F.F.T.(高速 Fourier 變換), Three Dimensional Dynamic Theory of Elasticity(3次元 動彈性理論), Impulsive Stress (衝擊應力), Horizontal Type Impact Tester(水平式 衝擊試驗機)

Abstract

In the analysis of impulsive response of plate, Lagrange's theory, Reissner's theory and Mindlin's theory are generally used. But, in applying these theories the impulsive stresses directly underneath the concentrated impact point cannot be analyzed because the solution fails to converge. In this paper, therefore, an attempt for a supported square plate is made by using three-dimensional dynamic theory of elasticity on the supposition that the uniform distributed load acts on the central part of it. In order to clarify the validity of theoretical analysis, the strain variations are measured experimentally for a square glass plate. Finally it is shown that these theoretical results are in close agreement with the experimental results.

기 호 설 명

$2a$: 板의 一邊길이	q_0	: 等分布荷重
c	: 等分布荷重 作用領域	γ	: Laplace變換 파라미터의 實數部
c_1	: 縱波의 傳播速度	ω	: Laplace變換 파라미터의 虛數部
c_2	: 剪斷波의 傳播速度	$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$: 剪斷變形率 成分
$C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2$: 未定係數	$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$: 垂直變形率 成分
h	: 板두께	$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$: 剪斷應力 成分
H	: 單位스텝函數	$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: 垂直應力 成分
k	: Hertz의 接觸係數	$\phi_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$: 變位포텐셜
m, n	: 級數	ν	: 프와송 比
N	: 샘플링 分割數	ρ	: 密度
$P(\tau)$: 無次元 衝擊荷重		

1. 序 論

* 正會員, 全南大學校 工科學 機械工學科

** 正會員, 朝鮮大學校 工科學 機械設計工學科

工業材料로서 널리 使用되는 脆性材料는 鑄鐵,

高張力鋼, 石材, 유리 등이 있으나 이와같은 材料는 衝擊에 對한 에너지吸收能力이 낮고 振動, 衝突 등의 高速變形에 對하여 衝擊破壞를 일으킬 危險性이 많다. 따라서 衝擊 등에 의한 脆性材料의 強度設計上 安全性確保를 위해서 衝擊能力이 解析되어야 하나 아직 衝擊에 의해서 材料內에 發生하는 衝擊應力과 破壞現象을 關聯시켜 理論적으로 解明한 研究는 별로 이루어 지지 않았다. 또한 有限板에서 衝擊應力을 理論적으로 明確히 하기 위해서는 먼저 集中衝擊荷重 作用點下에서 衝擊應答의 問題가 解析되어야 만 하는데⁽¹⁾, 이제까지 平板의 衝擊應答 解析에 利用된 Lagrange, Reissner, Mindlin의 式 등은 集中衝擊作用點에서는 應力의 解가 發散하기 때문에 衝擊應力을 解析할 수가 없었다⁽²⁻⁴⁾.

最近 松本 등⁽¹⁾은 極座標系解析을 행하여 円形板의 衝擊應力을 解析하였으나 실험조건은 正方形板임에도 解析을 간단히 하기 위하여 極座標系解析을 하였다.

따라서 本 研究에서는 板理論으로서는 解析할 수 없는 集中衝擊荷重의 作用點을 包含한 有限板(正方形板)의 衝擊應力을 理論적으로 解析하는 方法을 提案하고자 하며 脆性材料로서 손쉽게 求할 수 있고 破壞에 큰 에너지가 所要되지 않은 유리板을 對象으로 하여 三次元 動彈性理論을 利用하여 鋼球의 高速衝突에 의해서 유리板에 發生하는 衝擊應力을 解析하였다. 또한 三次元 動彈性理論에서는 Laplace逆變換이 困難하므로⁽⁵⁾, 高速 Fourier變換의 알고리즘⁽⁶⁾을 利用하였으며, 衝擊荷重의 크기는 實測이 困難하여 Lagrange의 古典板理論과 Hertz의 接觸理論⁽⁷⁾으로부터 決定하였으며 單純支持된 正方形 유리板에 高速衝擊을 加하여 計測된 變形率變動과 本理論解析 結果와를 比較하여 應力解析方法의 適用性을 明確히 하였다.

2. 理論解析

2.1 應力解析

Fig. 1과 같이 正方形板의 中央(2c×2c)인 領域內에 等分布荷重 q₀f(t)가 作用하는 境遇를 생각하여 正方形板에 發生하는 衝擊應力을 解析한다.

먼저, 正方形板의 中央에 原點을 取하여 直交座標 x,y,z에 對應한 變位成分을 u,v,w, 垂直應力成分을 σ_x,σ_y,σ_z, 剪斷應力成分을 τ_{xy},τ_{xz},τ_{yz}라 하면 三次元 動彈性 基礎方程式은 다음과 같다⁽⁸⁾.

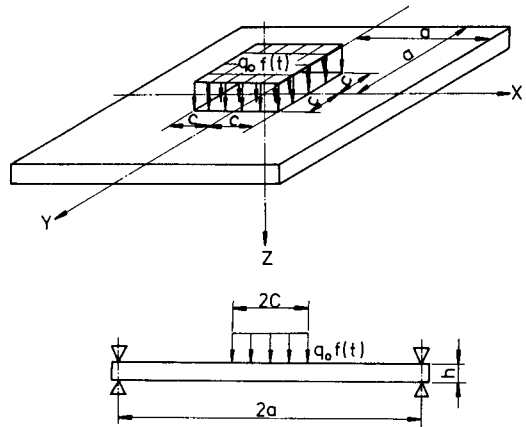


Fig. 1 A Square plate subjected a partial distributed impact load on center

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{1}$$

또한 應力成分과 變位成分과의 關係式은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\epsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \\ \sigma_y &= 2G \left(\epsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \\ \sigma_z &= 2G \left(\epsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\text{여기서 } \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

이다. 式(2)를 式(1)에 代入하면 다음과 같은 變位方程式을 얻는다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} &= \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} &= \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} &= \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 이며 G는 剪斷彈性 係數이다.

式(3)의 變位方程式을 풀기 위하여 變位 포텐셜

($\varphi_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$)理論⁽⁹⁾을 導入하면 變位成分은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 2Gu &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial y} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} \\ 2Gv &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} - \frac{\partial \lambda_3}{\partial x} \\ 2Gw &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} \end{aligned} \quad (4)$$

變位成分을 計算하기 위하여 다음과 같이 近似的으로 變位포텐셜의 解를 假定하였다.

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \Phi_{mn} \cos \alpha_m x \cos \alpha_n y \\ \lambda_1 &= \Delta^1_{mn} \cos \alpha_m x \sin \alpha_n y \\ \lambda_2 &= \Delta^2_{mn} \sin \alpha_m x \cos \alpha_n y \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $\alpha_m = \frac{\pi(2m-1)}{2a}$, $\alpha_n = \frac{\pi(2n-1)}{2a}$ 이며 Z軸

方向의 回轉이 없을 때는 $\lambda_3 = 0$ 으로 된다.

式(4)를 式(3)에 代入하면 $\varphi_0, \lambda_1, \lambda_2$ 에 對한 支配方程式을 얻을 수 있고 다음의 波動方程式으로 表現된다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_0 &= \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \lambda_1 &= \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \lambda_2 &= \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $c_1^2 = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{G}{\rho}$, $c_2^2 = \frac{G}{\rho}$ 이며, ν 는 프와 송비, ρ 는 板의 密度, c_1, c_2 는 縱波와 剪斷波의 傳播速度이다.

또 式(4)를 式(2)에 代入하면 다음과 같은 應力成分과 變位포텐셜과의 關係式이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x \partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0 \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y \partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0 \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial z \partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0 \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial y \partial z} \right) \\ \tau_{xz} &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial z^2} \right) \\ \tau_{yz} &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z \partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

또한 式(6)은 座標 x, y, z 및 時間 t 에 關한 2階 備微分 方程式이므로 먼저 t 에 關하여 Laplace變換함으로서 x, y, z 의 常微分方程式을 얻는다.

衝擊을 받기 前($t \leq 0$)에는 正方形板의 變位포텐

셜에 對한 初期條件은 다음과 같다.

$$(\varphi_0, \lambda_1, \lambda_2)_{t=0} = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}, \frac{\partial \lambda_1}{\partial t}, \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} \right)_{t=0} = 0 \quad (8)$$

式(6)을 Laplace變換하면

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{\varphi}_0 &= \frac{p^2}{c_1^2} \bar{\varphi}_0 \\ \nabla^2 \bar{\lambda}_1 &= \frac{p^2}{c_2^2} \bar{\lambda}_1 \\ \nabla^2 \bar{\lambda}_2 &= \frac{p^2}{c_2^2} \bar{\lambda}_2 \end{aligned} \quad (9)$$

로 된다. 여기서 $\bar{\varphi}_0 = \int_0^\infty \varphi_0 e^{-pt} dt$, $\bar{\lambda}_1 = \int_0^\infty \lambda_1 \times e^{-pt} dt$, $\bar{\lambda}_2 = \int_0^\infty \lambda_2 e^{-pt} dt$ 이며 p 는 Laplace變換 파라미터이다.

變位포텐셜의 式(5)를 Laplace變換하여 式(6)의 Laplace變換式(9)에 代入하면 다음과 같은 常微分 方程式을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\Phi}_{mn}}{dz^2} &= \left(\alpha_m^2 + \alpha_n^2 + \frac{p^2}{c_1^2} \right) \bar{\Phi}_{mn} \\ \frac{d^2 \bar{\Delta}^1_{mn}}{dz^2} &= \left(\alpha_m^2 + \alpha_n^2 + \frac{p^2}{c_2^2} \right) \bar{\Delta}^1_{mn} \\ \frac{d^2 \bar{\Delta}^2_{mn}}{dz^2} &= \left(\alpha_m^2 + \alpha_n^2 + \frac{p^2}{c_2^2} \right) \bar{\Delta}^2_{mn} \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)의 一般解는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [C_1 e^{\beta_{mn} z} + C_2 e^{-\beta_{mn} z}] \cos \alpha_m x \cos \alpha_n y \\ \bar{\lambda}_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [D_1 e^{\gamma_{mn} z} + D_2 e^{-\gamma_{mn} z}] \cos \alpha_m x \sin \alpha_n y \end{aligned} \quad (11)$$

$$\bar{\lambda}_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [E_1 e^{\gamma_{mn} z} + E_2 e^{-\gamma_{mn} z}] \sin \alpha_m x \cos \alpha_n y$$

여기서 $\beta_{mn}^2 = \alpha_m^2 + \alpha_n^2 + \frac{p^2}{c_1^2}$, $\gamma_{mn}^2 = \alpha_m^2 + \alpha_n^2 + \frac{p^2}{c_2^2}$, $C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2$ 는 境界條件에 따라 定해지는 未定係數이고 그 境界條件은 다음과 같다(Fig. 1 參照).

$$\left. \begin{aligned} \text{(i) } z = -h/2 \text{ (平板의 上面)에서} \\ \sigma_z = -q_0 f(t) H(c-|x|) \cdot H(c-|y|), \\ \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{(ii) } z = h/2 \text{ (平板의 下面)에서} \\ \sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \end{aligned} \right\}$$

여기서 $H(c-|x|) \cdot H(c-|y|)$ 는 單位스텐函數이다. 境界條件의 式(12)를 Laplace變換하면

$$\left. \begin{aligned} \text{(i) } z = -h/2 \text{에서} \\ \bar{\sigma}_z = -q_0 \bar{f}(p) H(c-|x|)(c-|y|), \\ \bar{\tau}_{zx} = \bar{\tau}_{zy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{(ii) } z = h/2 \text{에서} \\ \bar{\sigma}_z = \bar{\tau}_{zx} = \bar{\tau}_{zy} = 0 \end{aligned} \right\}$$

여기서 $\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt$ 이다.

또한 式(7)을 Laplace變換하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_z &= \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_1}{\partial z \partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \bar{\varphi}_0 \\ \bar{\tau}_{zx} &= \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_0}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{\lambda}_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_2}{\partial z^2} \right) \\ \bar{\tau}_{zy} &= \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_0}{\partial z \partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{\lambda}_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_1}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)에 式(11), (13)을 代入하면 未定係數를 求할 수 있는 6元聯立代數方程式이 얻어진다. 式(14)의 $\bar{\sigma}_z$ 는 周期函數이고 式(13)의 $\bar{\sigma}_z$ 는 單位스텝函數이므로 이 두式의 $\bar{\sigma}_z$ 를 같은 函數의 形態로 表現하기 위해서 Fourier cosine級數로 變換하고 Fig. 1과 같은 荷重條件을 考慮하면 다음과 같은 式을 얻는다.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_z &= \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \left[\left(\beta_{mn}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{p^2}{c_1^2} \right) e^{\beta_{mn}z} C_1 + \left(\beta_{mn}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{p^2}{c_1^2} \right) e^{-\beta_{mn}z} C_2 - \gamma_{mn} a_n e^{\gamma_{mn}z} D_1 \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{mn} a_n e^{-\gamma_{mn}z} D_2 + a_m \gamma_{mn} e^{\gamma_{mn}z} E_1 \right. \\ &\quad \left. - a_m \gamma_{mn} e^{-\gamma_{mn}z} E_2 \right] = -q_0 \bar{f}(p) \\ &\quad \times \frac{4 \sin(amc) \sin(anc)}{a_m a_n a^2} \end{aligned} \quad (15)$$

以上の 結果를 利用하여 未定係數 $C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2$ 는 數值解析에 의하여 求해진다. 未定係數가 定해지면 式(7)을 Laplace變換하고 그 變換式에 式(11)을 代入하여 Laplace變換領域에서의 應力成分式이 다음과 같이 求해진다.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \left[\left(-a_m^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{p^2}{c_1^2} \right) e^{\beta_{mn}z} C_1 + \left(-a_m^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{p^2}{c_1^2} \right) e^{-\beta_{mn}z} C_2 - a_m \gamma_{mn} E_1 e^{\gamma_{mn}z} \right. \\ &\quad \left. + a_m \gamma_{mn} e^{-\gamma_{mn}z} E_2 \right] \cos amx \cos any \\ \bar{\sigma}_y &= \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \left[\left(-a_n^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{p^2}{c_1^2} \right) e^{\beta_{mn}z} C_1 + \left(-a_n^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{p^2}{c_1^2} \right) e^{-\beta_{mn}z} C_2 + a_n \gamma_{mn} e^{\gamma_{mn}z} D_1 \right. \\ &\quad \left. - a_n \gamma_{mn} e^{-\gamma_{mn}z} D_2 \right] \cos any \cos amx \\ \bar{\sigma}_z &= \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \left[\left(-\beta_{mn}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{p^2}{c_1^2} \right) e^{\beta_{mn}z} C_1 + \left(\beta_{mn}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{p^2}{c_1^2} \right) e^{-\beta_{mn}z} C_2 - \gamma_{mn} a_n e^{\gamma_{mn}z} D_1 \right. \\ &\quad \left. + a_n \gamma_{mn} e^{-\gamma_{mn}z} D_2 + a_m \gamma_{mn} e^{\gamma_{mn}z} E_1 \right. \\ &\quad \left. - a_m \gamma_{mn} e^{-\gamma_{mn}z} E_2 \right] \cos amx \cos any \end{aligned} \quad (16)$$

또한 Laplace變換領域에서 變形率의 變換式은

다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_x &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2G} [(-a_m^2)(C_1 e^{\beta_{mn}z} + C_2 e^{-\beta_{mn}z}) \\ &\quad - a_m \gamma_{mn} (E_1 e^{\gamma_{mn}z} - E_2 e^{-\gamma_{mn}z})] \cos amx \cos any \\ \bar{\epsilon}_y &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2G} [(-a_n^2)(C_1 e^{\beta_{mn}z} + C_2 e^{-\beta_{mn}z}) \\ &\quad + a_n \gamma_{mn} (D_1 e^{\gamma_{mn}z} - D_2 e^{-\gamma_{mn}z})] \cos amx \cos any \\ \bar{\epsilon}_z &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2G} [\beta_{mn}^2 (C_1 e^{\beta_{mn}z} + C_2 e^{-\beta_{mn}z}) \\ &\quad + a_n \gamma_{mn} (E_1 e^{\gamma_{mn}z} - E_2 e^{-\gamma_{mn}z}) - a_n \gamma_{mn} (D_1 e^{\gamma_{mn}z} \\ &\quad - D_2 e^{-\gamma_{mn}z})] \cos amx \cos any \end{aligned} \quad (17)$$

2.2 衝擊荷重의 解析

Fig. 2와 같이 無限平板에 鋼球가 衝突하는 境遇를 Hertz의 接觸理論과 Lagrange의 古典板理論을 適用하여 球와 平板의 接觸에 의한 變形을 考慮하여 前進差分法⁽¹¹⁾에 의해서 衝擊荷重을 解析하였고, 그 結果는 다음과 같다⁽¹⁾.

$$KP(\tau)^{2/3} = \tau - \int_0^\tau \int_0^\tau P(\eta) d\eta d\xi - \int_0^\tau P(\eta) d\eta \quad (18)$$

여기서 $P(\tau)$ 는 無次元衝擊荷重이며 係數 $K = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{V} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{k} \right) \left(\frac{8D}{C_b} \right)^{5/3}$ 이고, m 은 鋼球의 質量, V 는 鋼球의 速度, k 는 Hertz의 接觸常數, D 는 板의 굽힘剛性係數이고 $C_b = \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ 이다.

Fig. 3은 式(18)에 의해서 計算된 無次元衝擊荷重 $P(\tau)$ 에 關한 數值計算 結果를 $P(\tau) = A \exp(-B\tau) \sin C\tau$ 라고 하는 積分可能한 函數로 近似시킨 結果이다. 衝擊荷重을 近似시킬 때는

- (i) 近似荷重의 피크點과 理論荷重의 피크點이 一致하도록 近似시켰으며
- (ii) 衝擊荷重의 上昇部가 板의 衝擊應答에 큰

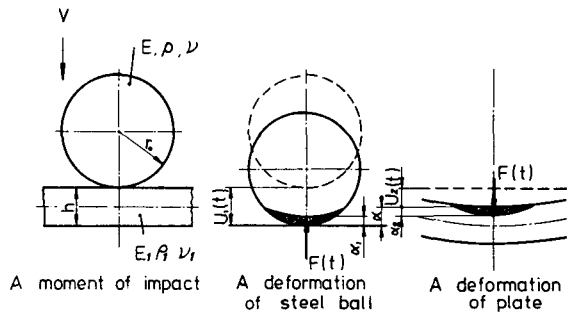


Fig. 2 A model for analyzing impact force

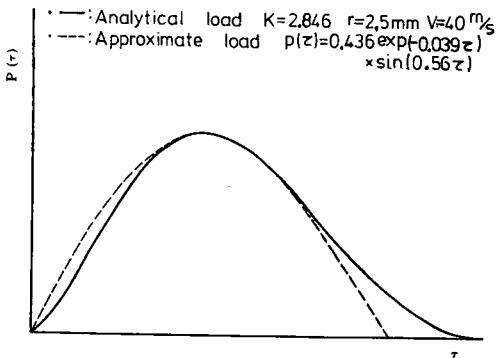


Fig. 3 An approximation of nondimensional impact load

影響을 주기 때문에 衝擊荷重의 上昇部를 될수 있는한 一致하도록 最小自乘法에 의해서 近似시켰고 (iii) 될수 있는 한 理論荷重과 近似荷重의 力積이 같도록 近似시켰다.

衝擊荷重을 解析할때 剛球의 直徑은 5mm, 剛球의 衝突速度는 40m/sec, 板의 두께는 3mm로 하여 計算하였으며 衝擊應力, 變形率의 數值解析時에 近似荷重 $P(\tau)$ 를 Laplace變換하여 式(15)의 $\bar{f}(p)$ 값에 代入하였다.

2.3 數值計算

本節에서는 2.1節에서 三次元 動彈性理論에 의해서 解析한 Laplace變換領域에서의 變形率, 應力의 關係式을 數值 Laplace逆變換하여 衝擊反應을 解析하였다. 그러나 三次元 動彈性理論에서는 Laplace逆變換이 困難하므로 다음과 같은 計算式⁽⁵⁾에 의해서 高速 Fourier變換法(F.F.T)을 利用하여 數值 Laplace逆變換을 하였다.

$$(\varphi_0, \lambda_1, \lambda_2)_k = \frac{\exp(\gamma \cdot k \Delta t)}{T} \sum_{n=0}^{N-1} (\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)_n \times \exp(i2\pi nk/N) \quad (k=0,1,2,\dots,N-1) \quad (19)$$

여기서 $(\varphi_0, \lambda_1, \lambda_2)_k = (\varphi_0, \lambda_1, \lambda_2)_{t=k\Delta t}$
 $(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)_n = (\varphi_0, \lambda_1, \lambda_2)_{p=\gamma+in\Delta\omega}$, $i = \sqrt{-1}$ 이다.

γ 및 w 는 各各 Laplace變換파라미터 p 의 實部 및 虛部이고 N 및 T 는 샘플링 分割數 및 分割時間이며 $\Delta t = T/N$, $\Delta\omega = 2\pi/T$, $\gamma > 0$ 이다.

또한 計算의 精度를 높이기 위하여 길이 的 無次元을 x/h , 時間 的 無次元을 $(c_1/h)t$ 로 하였으며 式(19)의 變數 γ 는 數數值計算時에 任意로 取할수 있으나 衝擊應答의 解析에는 $\gamma = \frac{6}{T}$ 近方에서 最適

值였으므로⁽¹⁰⁾ $\gamma = \frac{6}{T}$ 의 값을 利用하였다.

3. 實驗裝置 및 實驗

2章의 理論解析 結果의 妥當性을 確認하기 위하여 正方形유리板의 中央에 鋼球를 高速로 衝突시키는 實驗을 行하였다.

3.1 實驗裝置

變形率의 測定은 유리板이 破壞하기 以前의 범위에서 하였으며 高速衝擊實驗을 行할때 變形率 測定裝置는 Fig. 4와 같다. 또한 本實驗에서 對象으로 하는 充分한 크기의 速度를 얻기 위하여 鋼球의 加速化 裝置로서 Fig. 5와 같은 水平式 空氣壓衝擊試

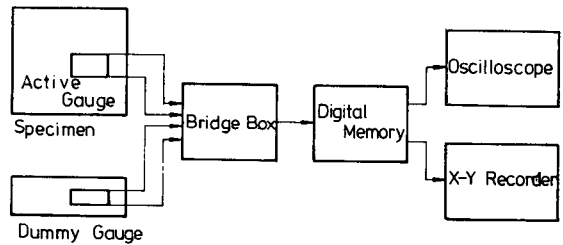


Fig. 4 A schematic diagram of strain measurement system

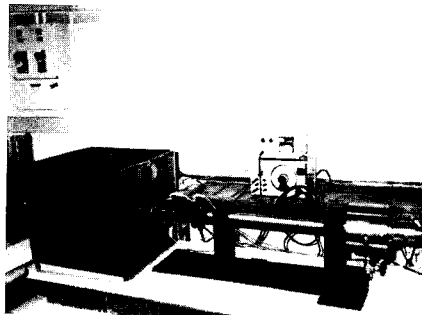


Fig. 5 A horizontal type impact test apparatus using air pressure

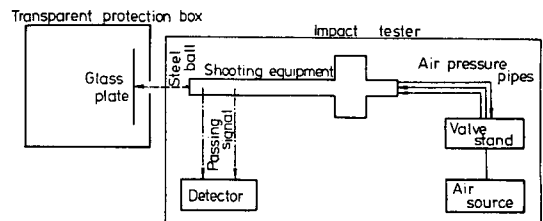


Fig. 6 A schematic diagram of horizontal type impact test apparatus using air pressure

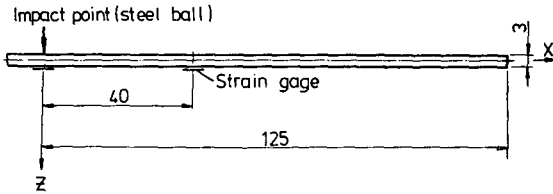


Fig. 7 The bonded places of strain gages

驗機(오토막스(株)製)를 사용했으며 이裝置의 概略圖를 Fig. 6에 나타낸다.

3.2 實驗

實驗에 利用한 유리板은 두께 3mm, 一邊의 길이 250mm인 正方形이며 鋼球徑 5mm, 鋼球의 衝突速度는 40m/sec였다. 變形率의 測定位置는 Fig. 7과 같이 유리板의 한 中央과 中央에서 任意距離 40mm 떨어진 곳에 2軸 스트레인지지를 接着하고 反對側에 高速衝擊을 加하여 變形率 ϵ_x, ϵ_y 를 測定하였다.

또한 板의 材料定數는 3點 壓縮시험에 의해 測定했으며 縱彈性係數 $E=67.6GPa$, 프와송 比는 0.22였으며, $E=2G(1+\nu)$ 의 關係를 利用하면 剪斷彈性係數 $G=2.77 \times 10^{10} Pa$ 이었고 波動理論에 의해 計算해 보면 剪斷波의 傳播速度는 $c_2=3330m/sec$ 가 된다. 따라서 衝突點으로부터 傳播한 剪斷波가 유리 板中을 傳播하여 有限한 境界에서부터 反射되어 衝突點으로 되돌아 올때 까지의 距離가 250mm이므로 이를 剪斷波의 傳播速度 3330m/sec로 나누면 75 μ sec가 되고 그 以後는 反射波의 振動의 影響을 받게 되는데 75 μ sec以前의 時間內에 本 論文中에서 가장 중요한 最大引張變形率의 銳利한 피크(6.2 μ sec부근)가 衝突點의 反對側에서 衝擊直後에 생기므로 衝擊의 순간으로부터 이 時間이 경과할 때까지의 範圍內이면 板의 周邊에서의 境界條件에는 거의 影響이 없다고 생각되어 實驗을 行할 때 正方形 유리板의 支持條件은 周邊自由로 하여 유리板의 中央에 高速으로 鋼球를 衝突시켜 衝擊을 加하였다. Fig. 8~10에 유리板의 中央에 鋼球를 衝突시켰을 때 衝突點과 衝突點으로부터 40mm 떨어진 곳에서의 變形率의 測定結果를 點線으로 나타내고 있다.

4. 理論解析結果와 實驗結果와의 比較

本 章에서는 2.1節에서의 三次元 動彈性理論을

利用한 Laplace變換領域에서의 變形率의 變換式(17)을 高速 Fourier變換을 利用한 數值Laplace逆變換法에 의하여 數值計算한 理論解析 結果와 實驗 結果와를 比較하여 本 論文中에서의 應力解析 方法의 適用性에 關하여 檢討하였다.

먼저 變形率을 理論解析하기에 앞서 鋼球가 유리板에 衝突할 때의 衝擊力을 式(18)에 의해 解析하였고 Fig. 3과 같이 近似시켜 얻은 $A=0.436, B=0.039, C=0.56$ 의 값을 變形率의 數值解析에 利用하였다.

計算할 때 鋼球의 材料定數는 縱彈性係數 $E=206GPa$, 프와송 比 $\nu=0.3$, 密度 $\rho=7.86 \times 10^3 kg/m^3$ 의 값⁽¹²⁾을 利用하였으며 式(20)은 式(15)의 等分布荷重의 作用領域 c 를 0으로 收斂시킴으로서 다음과 같이 集中荷重이 中央에 作用하도록 하였다.

$$\lim_{c \rightarrow 0} 4q_0 c^2 \frac{\sin(\alpha_m c) \sin(\alpha_n c)}{a^2(\alpha_m c)(\alpha_n c)} = \frac{F_0}{a^2},$$

$$F_0 = 4c^2 q_0 \tag{20}$$

Fig. 8은 直徑5mm인 鋼球를 衝突速度 40m/s로 한변의 길이 250mm, 판두께 3mm인 正方形 유리板의 中央에 衝突시켰을 때의 衝突點($x=y=0, z=1.5mm$)에서의 變形率 ϵ_x 의 理論解析 結果와 實驗 結果와를 比較한 것이며 Fig. 9는 衝突點으로부터 40mm 떨어진 곳($x=40mm, y=0, z=1.5mm$)에서의 變形率 ϵ_x 의 比較한 結果이고 Fig. 10은 衝突點으로부터 40mm 떨어진 곳에서의 變形率 ϵ_y 의 比較結果로서 어느 것이나 實驗結果는 周邊이 自由인

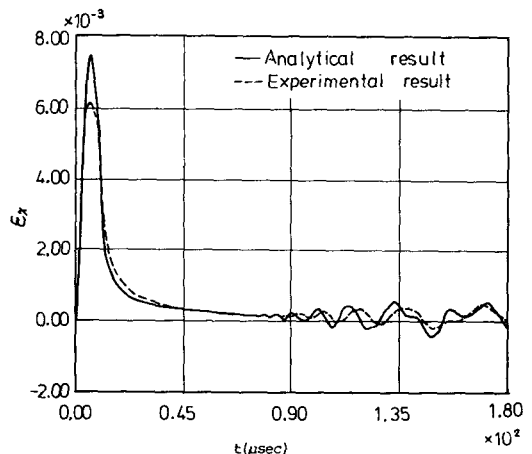


Fig. 8 Comparison of analytical result with experimental result of variation ϵ_x with the time at impact point($x=y=0, z=h/2, r=2.5mm, v=40m/s$)

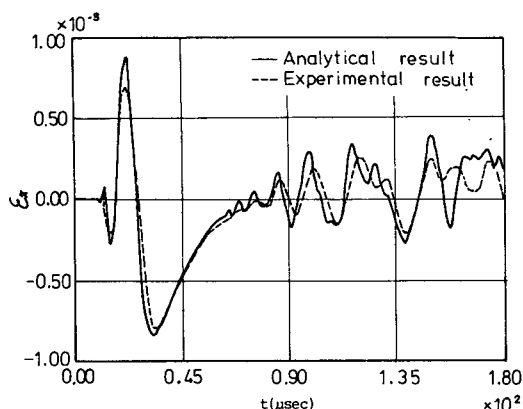


Fig. 9 Comparison of analytical result with experimental result of variation ϵ_x with the time at the 40mm apart from impact point ($x=40\text{mm}$, $y=0$, $z=h/2$, $r=2.5\text{mm}$, $v=40\text{m/s}$)

條件에서 유리板이 破壞하지 않는 경우이며 實線은 理論解析 結果이고 點線은 實驗結果를 나타낸다.

먼저 變形率의 傳播現象에 관해서 檢討해 보면 實驗結果가 理論結果에 비해 약간 늦게 되어 있는데 이 程度의 差異는 實際의 現象과 近似하고 있다고 말할 수 있으며 試料의 材料定數를 보다 正確히 測定하여 이 값을 理論解析에 利用하면 一致하리라 생각된다.

한편 變形率의 크기에 關해서는 全般的으로 理論解析 結果가 實驗結果를 上回하고 있는데 이 原因으로서는 다음과 같은 理由 때문 이라고 생각된다.

(i) 實驗에서의 스트레인게이지는 어떤 一定한

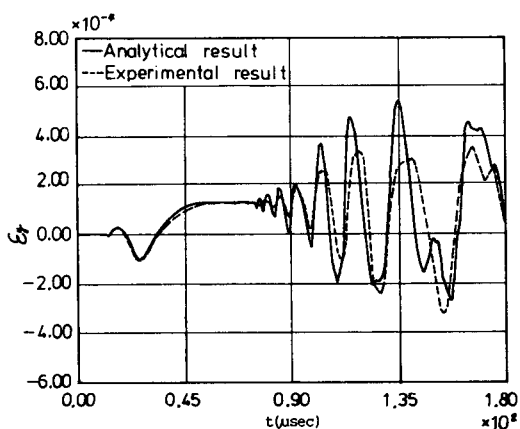


Fig. 10 Comparison of analytical result with experimental result of variation ϵ_y with the time at the 40mm apart from impact point ($x=40\text{mm}$, $y=0$, $z=h/2$, $r=2.5\text{mm}$, $v=40\text{m/sec}$)

面積을 가지고 있기 때문에 測定된 變形率은 一點의 變形率이 아니라는 點

(ii) 鋼球가 板에 衝突할 때 完全히 垂直으로 衝突하지 않기 때문에 Z軸 方向의 衝擊力이 理論에서 過大評價되어 있다는 點

(iii) 理論荷重을 近似할 때 荷重의 上昇部에서 近似荷重이 理論荷重을 上回하고 있다는 點

(iv) 變形率이 急激히 變動할 때는 測定裝置의 應答性이 正確히 檢證되지 않는다는 點 등이라 생각된다.

以上の 原因에서 理論結果와 實驗結果와의 사이에는 약간의 差異가 생긴 것이라고 생각되나, 이 程度의 誤差는 위의 原因을 고려한다면 實驗結果와 理論解析 結果와의 사이에는 잘 一致하고 있다고 할 수 있다.

특히, 境界의 影響이 應答波形에 나타나는 것은 剪斷波의 速度로 計算해 보면 衝突점에서는 $75\mu\text{sec}$ 이후, 衝突點으로 부터 40mm 떨어진 곳에서는 $64\mu\text{sec}$ 이후이므로 이 影響을 받기 以前에는 理論解析 結果는 實際의 現象과 잘 符合되었다. 또한 數值解析을 할 때 衝突點에서는 收斂할 때까지 計算하여 級數 $m=n=90$ 으로 計算하였으며, 衝突點에서 40mm 떨어진 곳에서는 $m=n=40$ 으로 하여 計算하였고, 샘플링分割數는 $2^8(256)$, 考慮할 最大時間은 $180\mu\text{sec}$ 로 하였으며 數值解析에는 東京工業大學 情報處理센터의 HITAC M-280H를 使用하였다. 以上の 理論解析 結果와 實驗結果를 比較檢討하여 보면 板理論에서는 解析할 수 없는 集中衝擊荷重 作用點에서 衝擊應力을 解析하기 위해서 三次元 動彈性理論과 變位포텐셜 理論을 利用한 本應力解析 方法이 適用可能하며 本 理論解析 結果의 妥當性이 實驗적으로 確認되었다.

따라서 衝突點에서 衝擊應力을 明確히 解析할 수 있게 되어 構造物에서 板部材 특히, 脆性材料의 板部材가 실제로 衝擊을 받을 때 衝擊에 對한 強度를 解析할 수 있어 構造物部材의 強度設計에 큰 成果가 期待된다.

5. 結 論

本 論文에서는 正方形板이 衝擊을 받을 때 衝突點에서 發生하는 衝擊應力을 解析할 目的으로 三次元 動彈性理論과 變位포텐셜理論을 利用하였고 高速 Fourier變換을 利用한 數值 Laplace逆變換法에

의해서 衝擊應力을 解析하였다. 또 理論解析 結果의 妥當性을 實證하기 위하여 脆性材料인 正方形 유리板을 試料로 선택하여 高速 衝擊實驗을 실시하여 理論解析 結果와 比較하였다.

以上の 理論解析과 實驗結果들을 綜合하여 본 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 三次元 動彈性理論과 變位포텐셜理論에 의해 중래의 板理論에서는 解析할 수 없는 集中衝擊荷重 作用點에서 衝擊應力을 正確히 解析할 수 있었다.

(2) 高速 Fourier變換의 알고리즘을 利用한 數值 Laplace逆變換法이 計算時間의 減少와 計算精度의 向上에 극히 有效하였다.

(3) 數值計算에 의하여 얻어진 時間에 대한 變形率 變動은 實驗에서 얻어진 結果와 잘 一致하여, 特히 板 周邊에서 反射된 應力波가 到達하기 이전에는 本 應力解析 方法이 實際의 現象과 잘 符合되었다.

參 考 文 獻

- (1) 宇治橋 貞幸 外3人, 1986, “鋼球의 衝突により 硝子板に生ずる 衝擊應力解析”, 日本機械學會論文集(A編), Vol. 52, No. 474, pp. 525~531.
- (2) 宇治橋 貞幸 外1人, 1983, “高次近似理論による

円板의 軸對称衝擊應答의 解析”, 日本機械學會論文集(A編), Vol. 49, No. 448, pp. 1522~1530.

(3) S.P.Timoshenko, K.S. Woinowsky, 1959, “Theory of Plates and Shell”, McGraw-Hill, New York, p. 63.

(4) A.C. Ugural, 1981, “Stresses in Plates and Shells”, McGraw-Hill, New York, p. 38.

(5) 足立忠晴 外2人, 1985, “水撃をうける有限長円筒殼の衝擊應答의 解析”, 日本機械學會論文集(A編), Vol. 51, No. 467, pp. 1886~1892.

(6) E. Oran. Brigham, 1974, “The Fast Fourier Transform”, Prentic-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J.

(7) W. Goldsmith, 1960, “Impact”, Edward Arnold, London, pp. 82~91.

(8) W. Johnson, 1972, “Impact Strength of Materials”, Edward Arnold, London, p. 106.

(9) 中原一郎, 1985, “応用彈性学”, 実教出版社, 東京, p. 207.

(10) 足立忠晴, 1985, “水撃をうける有限長円筒殼の衝擊應答의 解析” 東工大学修士論文, p. 74.

(11) 赤坂隆, 1977, “數值計算”, 応用数学黨座7卷, コロナ社, 東京, pp. 367~370.

(12) 中原一郎, 1984, “材料力學(上卷)”, 養賢堂, 東京, p. 367.