大韓機械學會論文集 第 12 卷 第 3 號, pp.575~581. 1988.

〈論 文〉

多重連結된 유동영역을 위한 비압축성 와도-유동함수 Navier-Stokes 방정식의 수치해법

장 근 식* · 신 순 철** · 박 성 근**

(1988年 2月 12日 接受)

A Numerical Method for the Multiply-Connected Flow Regions Governed by Incompressible Vorticity-Stream Function Navier-Stokes Equations

Keun-Shik Chang, Soon-Cheol Shin and Seong-Keun Park

Key Words : Primitive Variables(원시변수들), Vorticity-Stream Function Formulation(와도-유동함수 정식화), Multiply-Connected Flow Region(다중연결된 유동영역), Single-Valuedness of Pressure(압력의 단가성), Line Integral(선적분)

Abstract

To integrate the two-dimensional Navier-Stokes equations numerically in multiply-connected flow regions, the vorticity-stream function formulation is used. The steady stream function value at the surface of the multibody, initially unknown, has been determined interatively by introducing a line integral which requires the single-valuedness of pressure at each iteration step. This procedure is relatively simpler and more efficient than the primitive variable formulation which requires much more computing time and shows poor convergence. Three doubly-connected flow problems are defined and numerically analyzed by the present method. The results have been compared either with earlier existing ones or with the experimental interferograms to demonstrate the validity of the presented method.

기 호 설 명

d : 특성길이
$\hat{e}$: 단위벡터
$\hat{g}$: 중력가속도
n : 벽면에 수직한 방향의 좌표
p : 압력
Re : 레이놀즈 수, Ud/ν
s : 벽면의 접선방향 좌표
T : 온도
U : 특성속도
U_0 : Poiseuille 유동의 최대속도
u,v : x, y방향 속도 성분
x,y : Cartesian 좌표계
ν : 동점성계수
ϕ : 무차원 유동함수
ζ : 무차원 와도
ϕ : 무차원 온도, $(T-T_\infty)/(T_w-T_\infty)$
ξ,η : 변환된 일반좌표계

하 첨 자

c : 유동함수가 未知인 벽면
w : 벽면
∞ : 무한공간

*정회원, 한국과학기술원 기계공학과
**한국과학기술원 기계공학과

1. 서 론

비압축성 점성유동은 에너지 방정식과 연계되어 있거나 혹은 분리된, 질량 및 운동량의 보존 방정식들로 기술된다. 2차원 유동의 경우 이를 수치적으로 풀기 위한 방법은 크게 두 가지로 분류된다. 그 하나는 원시변수들(primitive variables)을 이용하는 것이고, 다른 하나는 와도 및 유동함수로 표시된 식으로 재구성하는 방법이다. 前者의 경우는 3차원의 경우로 쉽게 확장될 수 있고, 유체와 물체간의 경계에서 유체의 부착조건이라는 명확한 물리적 경계치 조건을 제공한다는 점에서, 그리고 직접적인 물리적 의미를 갖는 원시변수들을 이용하여 계산한다는 점에서 커다란 잇점을 가지고 있지만, 식의 복잡성 때문에 이를 수치적으로 푸는데는 많은 난점을 수반한다. 이러한 난점은 수학적으로 타원성(ellipticity)을 갖는 압력변수가 근본적으로 느린 수치적 확산과정에 의해 전파되면서도, 연속방정식의 solenoidal 조건을 만족하는 정확도를 가지고 풀어져야 하며 운동량 방정식에 있어서는 대류항들과 대등한 크기정도(order of magnitude)의 역할을 분담하는 데에 있다. 이런 압력항은 필연적으로 보존식에 해당되는 수치방정식을 음함수(implicit) 적으로 만들고, 이에 따라 형성된 축차적(iterative) 수치과정은 많은 컴퓨터 시간을 요구하는 불리한 결과에 이르게 된다.

이에 반하여 와도 및 유동함수로 된 수식화(formulation)는 3차원 유동의 경우에도 와도 및 벡터 포텐시얼 함수로 확장되어 일부 문제들을 해결할 수 있는 능력이 있으나, 이는 근본적으로 2차원 문제에 광범위한 응용가치를 두고 있는 방법이라고 하겠다. 원시변수들로부터 치환된 유동함수와 와도함수는 근본적으로 수치적 처리가 至難한 연속방정식을 자동적으로 만족할 뿐더러, 취급해야 할 유동변수들의 숫자를 줄여주고 압력변수가 수식화에서 제외되며, 물체로부터 멀어서 와도의 크기가 零이거나 미약한 유동장에서는 그만큼 상대적으로 중요성을 덜어주어 수치계산이 용이하도록 도와주는 강점을 가지고 있음은 잘 알려진 사실이다. 그러나 多重連結된 유동의 경우, 와도함수의 경계치 설정에 부수되는 일반적인 수학적 어려움 이외에, 다수의 물체마다에 특정한 유동함수를 경계조건으로 할당해야 하는 어려움이 있다. 사실, 이는 일반적으로 유동장 전체가 풀려지기 전에는 알 수 없는 양이거니와, 잘못 설정된 경계조건이 비록 수치적인 수렴과정에는 최소한 난점을 주지 않는다 해도, 수렴된 해에서 내부적으로는 어떠한 오차를 포함할 것인가는 쉽사리 짐작할 수 있는 일이다.

Payne과 Pell[1]은 torus 주위의 Stokes 유동에 대한 엄밀해를 구하는 과정에서 와도-유동함수 수식화를 채택하였으며, 와도함수의 도입과정에서 잠적된 압력과 와도와의 관계를 재구성함으로써 유동함수의 경계치를 설정하여 성공적인 유동해석을 이룩하였다. 이는 유동함수의 경계치가 정당하게 설정되지 못하면 유동장 내부의 임의의 폐쇄적분경로에 대한 그 방향으로의 압력구배의 적분이 零이 아닌 유한한 값을 갖게 되어 결국 압력의 單價性이 보장되지 못한다는 수학적인 제약조건에서부터 도입이 가능하게 된 것이다.

그러나 Payne과 Pell의 엄밀해를 유도하는 수식화 과정은 이론적으로 대단히 복잡하여, 원시변수들을 이용하는 방법론에 비하여 큰 장점을 주지 못하였고, 그후 이러한 연구는 다소간에 단절되어 왔다고 할 수 있다[2]. 본 연구에서는 앞서의 '압력의 단가성' 개념을 재도입하여 유동함수의 경계치 설정에 수치적으로 유용하게 쓸 수 있음을 보였고, 이를 다중연결된 물체에 관한 2차원 응용문제들에서 수렴성이 나쁘고 많은 계산시간을 요구하는 종래의 원시변수들을 이용한 수식화 과정을 벗어나, 이제는 간편하고 명확한 유동함수-와도의 방법으로 비교적 적은 컴퓨터 시간으로 유동장의 계산이 가능하게 되었음을 보였다.

2. 지배방정식 및 유동함수 경계치의 결정

비압축성 층류유동의 지배방정식을 논의의 간편성을 위하여 Cartesian좌표계에서 생각한다. 무차원화 된 와도 운반방정식, Poisson방정식으로서의 유동함수 식, 그리고 에너지 방정식은 다음과 같다.

$$\zeta_t+\phi_y\zeta_x-\phi_x\zeta_y=C_1\nabla^2\zeta+C_2\phi_x \tag{1}$$

$$\nabla^2\psi=-\zeta \tag{2}$$

$$\phi_t+\phi_y\phi_x-\phi_x\phi_y=\nabla^2\phi \tag{3}$$

강제유동의 경우, 매개변수 $C_1=Re^{-1}$ $C_2=0$이고, 자연대류의 경우 $C_1=Pr$ $C_2=PrRa$이다. 위의 식에서 와도와 유동함수는 다음과 같이 정의된다.

$$u=\phi_y,\ v=-\phi_x,\ \zeta=v_x-u_y \tag{4}$$

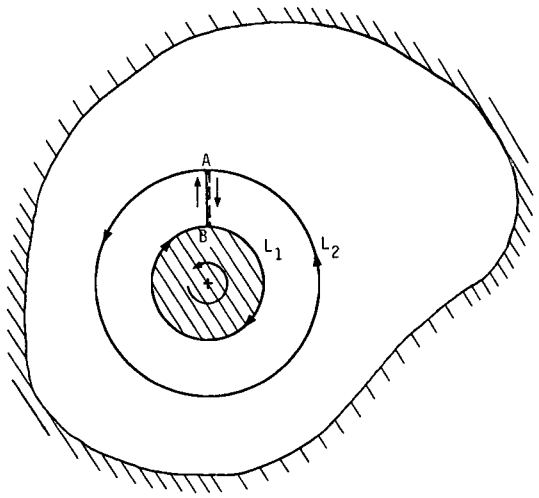


Fig. 1 Schetch of a doubly-connected flow region

Fig. 1은 이중연결된 유동 영역에 대한 묘사이다. 이 경우에, 일반적으로 내부 물체에서 유동함수의 경계치로 어떠한 값을 주더라도 수렴된 수치해를 구할 수 있다. 그러나 그 해가 물리적인 정당성을 보유할 수 있도록 허용해주기 위해서는 추가적인 구속조건이 필요하다. Payne과 Pell[1]은 이를 위하여는(와도 운반방정식의 유도과정에서 잠적된) 압력이 유동 영역내의 임의의 점에서 단가성을 가져야 한다는 것을 증명하였다. 즉 Fig. 1의 적분경로 L_1을 따라서

$$\oint_{L1} dp = 0 \tag{5}$$

을 만족해야 한다. 이를 다시 쓰면 다음의 관계로 발전한다.

$$\oint_{L1} dp = -\oint_{L2} dp = 0 \tag{6}$$

물체 벽면을 따라서 다음과 같은 와도와 압력의 관계식이 성립하므로

$$\left.\frac{\partial p}{\partial s}\right|_w = C_1 \left.\frac{\partial \zeta}{\partial n}\right|_w + C_2 \phi_w \hat{g} \cdot \hat{e}_s \tag{7}$$

식6 으로부터

$$C_1 \oint_{L2} \left.\frac{\partial \zeta}{\partial n}\right|_w ds + C_2 \oint_{L2} \phi_w \hat{g} \cdot d\hat{s} = 0 \tag{8}$$

을 얻는다. 즉, 유동 영역 내의 임의의 점 A에서 압력의 단가성을 보장한다는 사실은, 식 8을 만족하도록 물체 벽면에서의 유동함수를 결정해 주는 조건으로 치환되었다. ϕ_w이 일정하다고 하면, 이를 차분식으로 나타낼 때

$$\oint_{L2} \left.\frac{\partial \zeta}{\partial n}\right|_w ds \cong \sum_j \left(\frac{\zeta_{w+1} - \zeta_w}{\triangle n}\right)_j \triangle s_j = 0 \tag{9}$$

여기서 벽면에서의 와도 ζ_w은 Taylor 급수 전개로부터 다음과 같이 된다.

$$\zeta_w = -\frac{2(\psi_{w+1} - \psi_w)}{\triangle n^2} + \frac{2}{\triangle n}\left.\frac{\partial \psi}{\partial n}\right|_w \tag{10}$$

$\left.\frac{\partial \psi}{\partial n}\right|_w$은 정지된 물체라면 零이고, 움직이는 벽이라면 무차원화된 값 −1을 가지게 된다. 식 (10)을 식 (9)에 대입하면

$$\sum_j \left(\frac{\zeta_{w+1}}{\triangle n} + \frac{2(\psi_{w+1} - \psi_w)}{\triangle n^3} - \frac{2}{\triangle n^2}\left.\frac{\partial \psi}{\partial n}\right|_w\right)_j \triangle s_j = 0 \tag{11}$$

지배방정식 식 (1), 식 (2) 및 식 (3)은 공간변수에 대하여 타원형 편미분 방정식이므로 매 time-step에서 축차적인 과정으로 수치해를 구하게 된다. 이러한 계산과정 중에, 물체에서 필요한 와도와 유동함수의 경계치는 식 (10)과 식 (11)을 통하여 각각 공급되며, 전체적인 수치해가 시간에 관계없이 일정한 허용오차 안으로 수렴했을 때 이를 정상상태의 유동으로 받아들이게 된다.

이제 다음의 세 가지 강제유동 및 열유동에 관한 예제들을 통하여 앞서의 경계치 설정방법이 정당함을 보이기로 하겠다.

3. 수치계산 및 결과

3.1 Lewis 문제

Lewis[3]는 고정된 외부 사각 실린더 속에서 회전하는 내부 원형 실린더 주위의 유동에 관한 수치해를 구하였다. 이 문제의 수치적 과정에는 두 가지의 문제점을 가지고 있다. 그 하나는 유동영역이 기존의 와도-유동함수 계산법으로 곤란한 이중연결된 영역이라는 것이고, 다른 하나는 적절한 유한차분 격자계의 형성에 주의를 요한다는 점이다. Lewis[3]는 Cartesian격자계에서 경계면 위에 떨어지는 격자점을 선택함으로써 유동장 내에서는 비균일한 격자계를 형성하였다. 또한 물체 표면에서 필요한 유동함수의 경계치를 결정하기 위하여는, 벽면에서 일정한 유동함수를 가정하여 이에 대해 수렴된 가상적인 해를 구하고, 이로부터 유동장 내부에서 운동량 방정식을 적분하여 얻은 $\triangle p = \oint_{L1} dp$와, 벽면의 유동함수가 거의 선형적 관계가 있다는 사실을 이용하여, $\triangle p \to 0$이 되도록 2분법(bisection method)을 사용하여 유동함수를 축자적으로 결정하였다. 그러나 Lewis의 방법은 격자구성 방

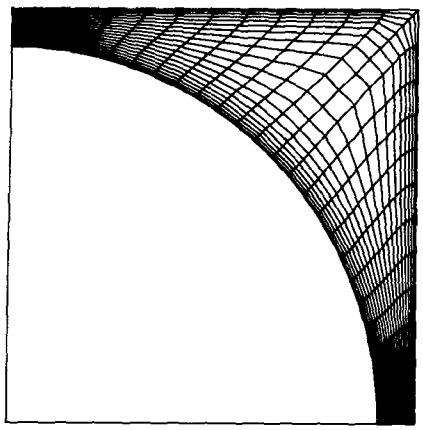


Fig. 2 Grid for the Lewis problem

법에 있어서 회전하는 내부 벽면 근처에서 계산의 정확도를 기하기 위하여는 지나치게 많은 격자점을 불필요한 구역까지 배분해야 할 뿐 아니라, 가정된 유동함수에 대해 가상적인 해를 수렴할 때까지 구해야 하므로 엄청난 계산시간을 요구하게 된다.

본 연구에서는 근래에 활발히 개발되어 온 물체 외접좌표계(body-fitted coordinate)를 사용하여 격자구성을 이루었다. 이는 다음과 같은 타원형 편미분 방정식의 해로써 구해진다.

$$\nabla^2\xi = P(\xi,\ \eta),\ \nabla^2\eta = Q(\xi,\eta) \qquad (12)$$

여기서 P, Q는 격자 간격의 조절함수(control function)로서 이의 결정에는 여러가지 방법이 있을 수 있으며, 이들 방법의 장단점에 관한 자세한 정보는 참고문헌(4)에 잘 나와 있다. Fig. 2는 현 문제의 계산에 사용된 전형적인 격자계이다. 물론 수치적 과정에서는 지배방정식은 물론 경계조건들도 (ξ,η) 좌표계에 대한 대응식으로 변환하여 유한차분식을 적용하게 된다.

이 문제에서 특성길이는 내부 실린더의 반경 a, 특성속도는 내부 실린더의 속도 Ωa로 취하였으며 이는 Lewis의 경우와 같다. 대류항 및 확산항은 모두 중앙차분식을 취하였고 와도 운반방정식 식 (1)은 ADI 방법을, 유동함수식 식 (2)는 SOR방법을 사용하였다. 또한 유동변수들의 수렴을 위해서 취했던 판정기준은 다음과 같다.

$$Max\left|\frac{\Phi^{k+1}-\Phi^{k}}{\Phi^{k}}\right| \le 0.0005 \qquad (13)$$

Fig. 3는 내부 실린더에 대한 외부 실린더의 반경비가 1.1이고, $Re=500$인 경우에 대한 유동함수 및 와도의 분포도이다. Lewis의 결과와 비교해 볼

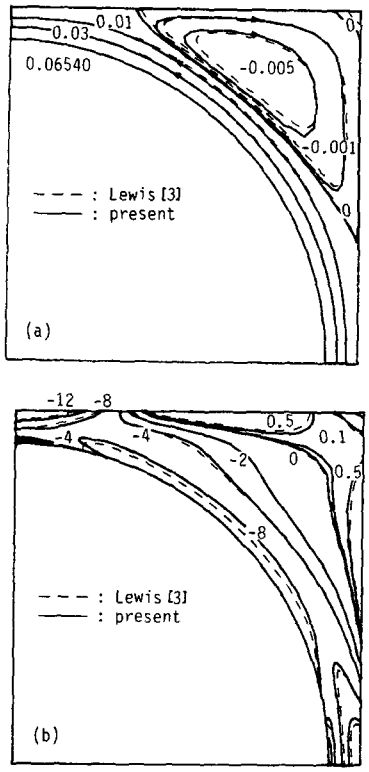


Fig. 3 Streamlines(a) and iso-vorticity contours(b), $Re=500$

때 전반적으로 좋은 일치를 보이고 있다. 그러나 Fig. 3(a)로부터 알 수 있듯이 모서리 부분에서 박리된 유동 영역의 크기는 Lewis의 결과보다 현재의 것이 미소하나마 더 크게 나타났다. 내부 실린더 벽면에서의 유동함수 값에서도 또한 현재의 것이 약 5% 큰 결과를 주었다. 이는 사용된 격자계 및 수치해법 등의 현격한 차이를 감안하면 충분히 미소한 상대적인 오차로 간주되며, 두 방법이 주는 결과의 부합성을 잘 예증하고 있는 것으로 판단된다. 이러한 회전문제에 관한 흡사한 응용으로, 저자들과는 독립적으로 Sood와 Elrod[5]는 압력의 주기성 조건을 이용하여 정상항과 비정상항으로 분리된 유동함수를 정의하고 이 두 항의 연결함수를 시간에 대하여 구하는 방법을 제시하였으나, 이 방법은 본 연구의 방법에 비하여 매우 번잡스러운 계산절차를 갖는다는 단점이 있다.

3.2 수로 내의 비대칭 유동

사각 실린더 주위의 강제유동에 대해서는 실험적

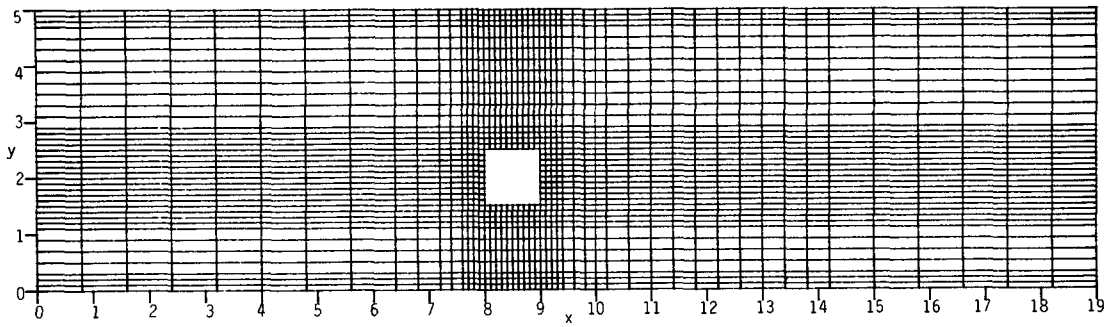


Fig. 4 Nonuniform grid for a channel flow

으로나 수치적 방법을 통하여 많은 연구가 진행되어 왔다. 이들 중 대부분의 연구는 Reynolds 수가 비교적 커서 유동장에 주기적 와열(vortex street)이 존재하는 경우에 집중되어 있다[6~8]. Fromm등[6]은 $Re \leq 40$인 경우에 유동장은 정상상태를 유지하나 이보다 커지면 유동이 불안정해지면서 와동의 흘림(vortex shedding)이 일어난다고 보고하였다. Fromm등[6]과 Davis등[8]이 그들의 연구에서 취했던 바와 같이 사각 물체를 2차원 수로(channel)의 중심에 위치하게 한다면 물체의 유동함수 값은 대칭조건으로부터 명백하게 얻을 수 있다. 그러나 물체가 수로의 중심 바깥으로 편심되어 있다면 유동은 다중으로 연결되어 유동함수는 미지이며 결국 이는 유동장 내에서 압력의 단가성을 만족하도록 결정되지 않으면 안된다.

Fig. 4는 본 연구에서 설정한 2차원 수로 내에서의 유동의 수치해를 구하기 위한 비균일 Cartesian 격자계이다. 지배방정식은 식 (1) 및 식 (2)로 주어지며, $x=0$에서의 경계조건으로는 완전히 발달된(fully-developed) Poiseuille 유동으로 가정하였다. 특성길이는 사각실린더의 폭 d로 잡았고, 특성속도는 Poiseuille 유동의 최대속도 U_0를 취하였다. $y=0$, $y=5$ 및 수로 내부의 사각실린더 표면에서는 no-slip조건을, $x=19$에서는 와도와 유동함수에 대해 Neumann경계조건을 주었다.

본 문제에서는 설정된 다중연결된 유동장을 위한 유동함수의 경계치 적용을 위해 수로 내부에서 사각 실린더를 폭의 0.5배 만큼 편심시킨 경우에 대해 $Re=1$, 15, 30일 때의 수치해를 구하였다. Fig. 5은 각 Re 수에 대한 유동함수의 분포도이다. $Re=1$일 때와 같이 매우 느린 점성유동의 경우에는 박리 영역이 형성되지 않는다. Re 수가 커져서 관성력의 비중이 커져 감에 따라, 유동이 모서리의 곡률을 따르지 못함으로 인해서 생겨난 와동의 박리된 액포(bubble)가 물체의 뒷면에 홀로 형성되고 〔Fig. 5(b)〕, 그 크기는 Re수에 따라 명백히 증가한다〔Fig. 5(c)〕. 특이한 것은 사각 실린더가 편심되어 위치함으로 인해서 단일 액포 만이 실린더의 뒷면 아래쪽에 형성되고, 물체 뒤의 하류방향 분리유선(dividing streamline)은 위쪽 모서리에서 출발한다는 사실이다. 이것은 Poiseuille 유동이 수로의 중심부분에서 큰 속도분포를 가질 뿐만 아니라, 벽면에 의한 점성효과가 수로의 폭이 좁은 아래쪽에서 더욱 크게 나타나는 까닭에 물체의 윗

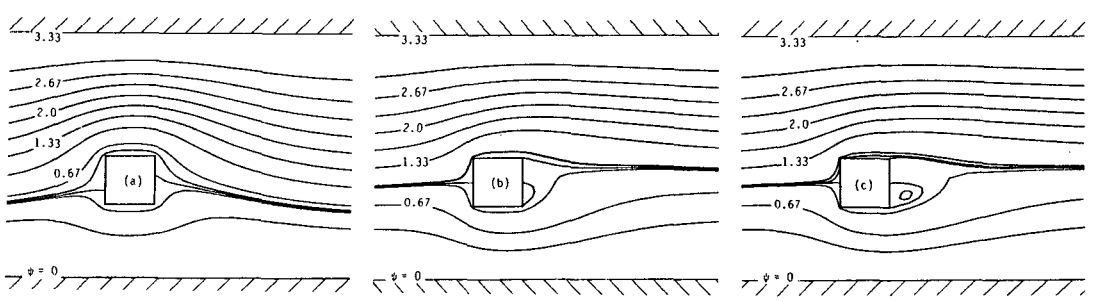


Fig. 5 Constant streamlines at various Reynolds numbers
(a) $Re=1$; $\psi_c=0.571$, (b) $Re=15$; $\psi_c=0.997$, (c) $Re=30$; $\psi_c=0.994$.

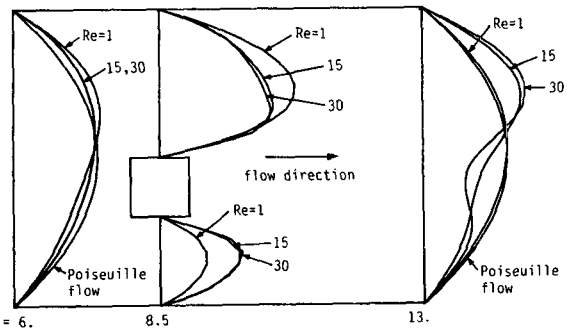


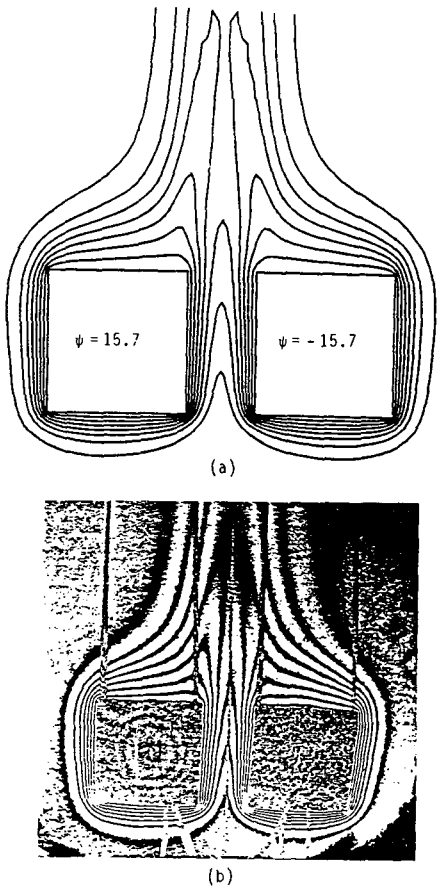
Fig. 6 Velocity profiles at selected cross-sections

부분을 통과하는 유동이 보다 큰 관성력을 가지는 탓으로 해석할 수 있다. 균일유동이나 대칭형 전단류 속의 중앙에 위치한 실린더의 뒷면에서 흔히 발생하는 쌍동이 와동에 비하면, 이러한 비대칭형 전단류 뒤에서 생기는 외톨이 와동은 매우 특이한 사실로 받아 들일 수 있을 것이다. 사각 실린더에서의 유동함수 값은 Re 수가 1과 15인 사이에서는 급격한 증가를 보였으나 그 이상에서는 증가율이 둔화되었다.

Fig. 6은 수로내의 몇몇 선택된 지점에서의 속도분포를 나타낸다. $x=6$에서는 Re수가 15일 때와 30일 때의 속도 분포가 거의 일치하고, Poiseuille 유동에 비해 흐름이 다소 위쪽으로 편향되어 있다. Re 수가 1일 때는 확산항의 영향으로 인하여 보다 상류에서 유동이 물체의 존재를 감지하게 되므로 속도분포는 더욱 위쪽으로 치우치게 된다. $x=8.5$에서의 속도분포는, 앞에서도 언급한 바와 같이 Re 수의 증가에 따라 물체 표면의 유동함수 값이 증가한다는 사실을 잘 설명해 준다. $x=8.5$에서의 속도분포는, 앞에서도 언급한 바와 같이 Re 수의 증가에 따라 물체 표면의 유동함수 값이 증가한다는 사실을 잘 설명해 준다. $x=13$에서는 $Re=1$일 때의 속도분포가 거의 Poiseuille 유동으로 쉽사리 회복되었음을 보여준다. 그러나 Re수가 15, 30일 때는 큰 관성효과로 인하여, 거시적으로 전단유동의 속도분포를 여전히 가지고 있으며 wake의 효과를 그대로 간직하나, 보다 먼 후류로 가면 수로 내의 양 벽면 경계조건의 영향으로 인하여 마침내는 Poiseuille 유동으로 다시 완전히 회복될 것이다.

3.3 열간섭이 있는 두 수평 사각실린더

다중연결된 유동장의 또 다른 하나의 보기로 이번에는 가열된 두개의 등온 수평 사각실린더가 가



(a) computation (b) experiment

Fig. 7 Comparison of isotherms at $Ra=2.4\times10^4$

까운 거리에서 횡방향으로 나란히 놓여 있을 때 유발되는 자연대류 문제를 고찰하였다. 지배방정식 및 경계조건 등에 관한 더 자세한 정보는 참고문헌 (9)에 기술되어 있다. 두 실린더는 대류 및 전도의 상승효과로 인하여 어떤 매개변수의 범위 내에서는 심한 열적인 간섭을 일으키며, 심지어는 plume 이외의 영역에서도 경계층과 경계층이 병합으로 말미암아 편미분 방정식 상으로 타원성인 영역(elliptic region)을 추가적으로 형성하기도 한다. Fig.7(a)에는 Rayleigh 수가 2.4×10^4일 때 층류 자연대류에서 나타나는 등온선들을 컴퓨터로 그렸다. 이때 두 실린더 간의 간격은 실린더 한 변의 절반으로 취하였는데, 실린더들에서 출발하는 두 개의 plume이 유인 병합되어 후류에서는 완전한 하나의 형상으로 발전하고 있는 것을 볼 수 있다. 저자들이 수행한 보충적 실험의 결과로 얻은, 같은

Rayleigh 수에 대한 Mach-Zehnder 간섭사진을 Fig.7(b)에 보였으며, 여기에서도 매우 흡사한 등온선들의 양상을 확인할 수 있다. 이 두 그림의 유사성은 현재 계산된 열유동장의 정확성을, 그리고 열간섭으로 인하여 일어나는 자연대류에서의 물리적인 현상들을 상호 보완적으로 확인해 주고 있다고 할 수 있다. 이러한 상호 열간섭이 있는 자연대류 현상의 이론적 예측은 열전달 분야에서 오래동안 미완으로 남아 있던 숙제임에 비추어, 본 논문에서 개발된 다중연결된 유동장에 관한 수치적 계산기법은 앞으로 상당한 파급효과를 가져올 것으로 보인다.

4. 결 론

다중연결된 유동 영역에서 비압축성 Navier-Stokes식의 계산을 위하여 와도-유동함수 식을 사용하고자 할 때에는, 다중물체에 대한 유동함수의 경계치가 미지수로 남아 이를 유동해의 일부로서 결정해 주어야 하는 어려운 과제가 주어진다. 물체에 대한 유동함수의 경계치로 어떠한 임의의 값을 주더라도 수치적으로 수렴된 유동장의 해를 얻을 수 있으나, 이는 엄밀히 말해서 수학적으로 타당한 해는 아니다. 따라서 유동함수의 경계치를 유일하게 결정할 수 있는 추가적인 구속조건이 필요하게 되고, 이는 Payne과 Pell이 지적한 바의 유동장 내에서 '압력의 단가성'이 확보되어야 한다는 조건으로 대체되었다. Payne과 Pell의 이러한 개념은 수학적 엄밀해를 구하는 데 있어서는 급수전개 등의 복잡하고 비효율적인 수식화 과정을 요하나, 본 논문에서 보인 바와 같은 수치적 과정에서는 와도-유동함수의 지배방정식의 축차적 계산과정 중에 유동함수에 관한 경계치로서의 선적분 하나 만의 추가로 다중물체에 관한 유동함수가 결국 구해지므로 좋은 계산 상의 효율을 유지할 수 있게 된다. 물리적으로 타당한 해가 본 논문의 수치적인 방법으로 적절하게 구해진다는 사실을 증명하기 위해, 먼저 사각형 공동 안에서 회전하는 원형 실린더 주위의 유동(Lewis 문제)에 대한 수치해를 구했으며, 이는 Lewis의 결과와 잘 비교된다는 것을 확인하였다. 또 다른 예로 2차원 수로 내에 위치한 편심된 사각형 실린더 주위의 유동을 해석하였고, 이 수치적 결과의 물리적 합당성을 논의하였다. 마지막으로는, 이중으로 연결된 열유동 문제에의 응용으로 열간섭이 있는 두 수평 사각실린더에 관한 자연대류 문제를 풀었으며, 이를 실험적으로 얻는 Mach-Zehnder광학 사진과 비교하여, 이 결과도 또한 물리적으로 합당함을 보였다. 본 논문에서의 방법은, 응용에서 보인 2중 이상으로 연결된 다중물체는 물론, 定常 상태의 문제 뿐만이 아니라 非正常 문제에도 적용이 가능하다는 점을 고려할 때, 컴퓨터를 이용한 수치적 해법의 확장이라는 관점에서 큰 의의를 가지고 있다고 하겠다.

참 고 문 헌

(1) L.E. Payne and W.M. Pell, 1960, Mathematika, Vol. 7, p.78.

(2) S.R. Majumdar and M.E. O'Neill, 1977, "On Axisymmetric Stokes Flow Past a Torus", J. Appl. Math. Physics, Vol. 28, pp.541~550.

(3) E. Lewis, 1979, "Steady Flow between a Rotating Circular Cylinder and Fixed Square Cylinder", J. Fluid Mech., Vol. 95, Part 3, pp. 497~513.

(4) J.F. Thomson, 1982, "Numerical Grid Generation", Elsevier Science Publishing Co., New York.

(5) D.R. Sood and H.G. Elrod Jr., 1974, "Numerical Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations in Doubly-Connected Regions", AIAA, Vol. 12, No. 5.

(6) J.E. Fromm and F.H. Harlow, 1963, "Numerical Solution of the Problem of Vortex Street Development", Phys. Fluids, Vol. 6, No. 7, pp.975~982.

(7) R.W. Davis and E.F. Moore, 1982, "A Numerical Study of Vortex Shedding From Rectangles, J. Fluid Mech. Vol. 116, pp. 474~506.

(8) R.W. Davis, E.F. Moore, and L.P. Purtell, 1984, "A Numerical-Experimental Study of Confined Flow Around Rectangular Cylinders", Phys. Fluids, Vol. 27, No. 1, pp.46~59.

(9) S.K. Park, K.S. Chang and C.E. Park, 1987, "Interactive Laminar Natural Convection From a Pair of Horizontal Parallel Square Cylinders, Presented in First C.F.D. Symposium Held in Chuo Univ., Tokyo.