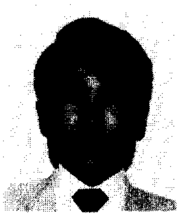
극한해석에 관한 단일이론

허 훈

한국과학기술대학 기계·재료 공학부 교수



●1953년 10월 21일생
●고체역학(소성역학)을 전공하였으며 탄·소성이론, 소성가공, 수치해석 등의 분야에 관심이 있음.

1. 머리말

극한해석(limit analysis)이란 탄·소성재료의 점근거동에 대하여 연구하는 분야이다. 재료의 점근성은 주로 연성재료에 나타나며 소성가공이나 소성구조물에 응용된다. 극한해석은 상대적으로 작은 탄성변형은 무시하고 소성변형만을 변형율의 형태로 다루게 된다. 현재까지 극한해석에 관한 많은 문제들이 풀려졌지만, 아직까지도 일반적인 방법은 확립되어 있지 않고, 문제에 따른 특별한 방법이나 연구자의 수학적, 물리적 직관에 의하여 문제가 해결되어 왔다.

고전적인 극한해석은 상계이론과 하계이론으로 나누어지며, 상계해, 정해 및 하계해 사이에는 부등식의 관계가 있어, 수학적으로 불완전하다. 이러한 극한이론이 완전하기 위하여는 최소 상계해가 최대 하계해와 같아야 하며, 이를 위하여 이원이론(duality theorem)을 도입하여야 한다. 일단, 이원이론이 확립되면, 우리는 최소 상계해나 최대 하계해를 정해로 간주할 수 있고 편의에 따라 두 해 중 한 해만을 구하면 된다.

고전적 극한해석은 항복조건과 연합유동법칙을 만족하는 완전강소성체만을 다루어 왔다. 항복조건식의 철면성(convexity)과 변형율이 항복표면에 직교하는 성질(normality)은 극한해석의 핵심이다. 항복응력을 항복점응력으로 정하면 그 이후의 모든 변형도경화성은 무시된다. 실제로, 실험에 의하면 적당한 해석의 강소성이론은 완전강소성과 판이하게 다른 성질을 가진 재료의 항복과 그에 따른 유동이나 붕괴를 정확히 예측할 수 있음이 실증되었다. 한편, 극한해석의 개념은 점근거동을 하는 경화성 재료에 관한 해석에 까지 확장할 수 있으며, 이때에는 초기 항복응력을 모든 항복표면을 내합하는 외표면과 그에 상응하는 한계응력으로 대치시켜 고려하면 된다. 응용되는 재료의 항복조건을 더욱 정확히 묘사하기 위하여, 소위 β-norm을 사용할 수가 있는데, 이 β-norm은 Frobenius norm과 von Mises 항복조건식을 포함하는 범용성이 있는 항복조건식으로 이방성재료에도 응용할 수 있다.

본 장에서는 고전적인 극한해석 이론에 앞에서 언급한 이원이론과 β-norm에 의한 항복조건식을 포함하여 확립된 단일이론을 평판(plate) 평면응력, 평면변형등의 문제에 응용한 예를 보여, 이 분야를 연구하는데 조금이나마 도움이 되기를 바란다.

2. 극한해석의 배경

모든 역학문제는 세가지 종류의 집합으로 구분한 방정식들로 부터 구할 수 있다. 즉, 정적가용집합(statically admissible set), 운동학적 가용집합(kinematically admissible set) 구성적 가용 집 합(constitutively admissible set)의

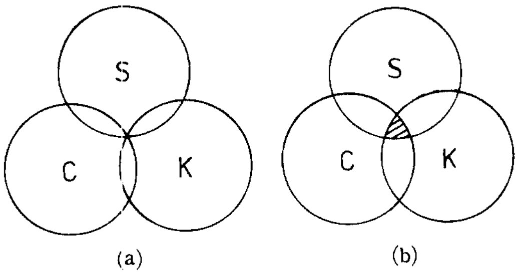


그림 1 역학방정식을 집합으로 표시한 도표

세 집합의 교집합을 정해의 집합이라 할 수 있다. 이 정해의 집합은 점집합일 수도 있고, 몇개의 요소를 가지는 집합일 수도 있으며, 요소가 없는 공집합일 수도 있다. 첫째의 경우에 해는 유일하고, 셋째의 경우에는 해는 없게 된다. 이것을 도식적으로 표현하면 그림 1과 같다.

극한해석에서는 평형방정식과 정적경계조건을 만족하는 응력(혹은 모멘트) 상태를 정적가용집합, 항복조건과 그에 상응하는 직교조건을 만족하는 응력과 변형율(혹은 모멘트와 처짐) 관계식을 구성적가용집합, 운동학적 경계조건을 만족하는 변위율로 부터 유도되는 변형율을 운동학적가용집합으로 구분한다. 이때 응력이나 변위율은 유한한 불연속을 나타내어도 가용한 함수로 간주할 수 있다.

일반 역학문제와 극한해석의 다른점은 해를 구하는 집합의 선택이며, 일반 역학문제가 세가지 집합의 교집합을 해로 구하는데 반하여, 극한해석은 두가지 또는 한가지 집합으로 부터 해를 구한다. 즉, 정적가용집합과 구성적가용집합의 교집합을 해로 구하는 과정을 하계해석, 운동학적가용집합으로 부터 해를 구하는 과정을 상계해석이라 한다. 따라서 극한해석의 타당성은 각각의 해가 동일함을 보여야 입증이 되며, 이를 보장해 주는 것이 바로 최대하계해와 최소하계해가 같아진다는 이원조건이다.

역사적으로는 Galileo의 보에 대한 파손이론(1638)이나 Euler의 기둥에 대한 좌굴이론(1757)으로 부터 극한해석의 기본개념이 도입되었다고 할 수 있다. 근간의 극한해석에 대한 개념은 Gvozdev, Johansen, Van den Broek 등에 의하여 정립되었다. 특히, Gvozdev는 일반화 힘과 변위에 대한 개념, 최대소성일의 법칙, 항복시의 변형율의 동등 직교조건 등 극한해석에 대한 많은 기본 개념을 수립하였다. 이러한 극한해석에 대한 기본개념들은 Drucker, Prager, Greenberg(1952) 이전에는 주로 공학적 경험과 물리학적 지식에 바탕을 둔 직관력에 의존하여 일반해법을 제시하기에는 무리가 있었다.

소성학의 전성기였던 1950년대에는 Hill이 극치정리를 제한하여 극한해석은 이 극치정리로 부터 유도될 수 있음을 지적하였으며, Drucker 등이 연속체에서의 극한해석을 위한 일반정리를 발표하였다. 극한해석과 붕괴하중(또는 한계하중)의 실질적인 중요성이 강조되었던 것은 물론이었다. 이 연대에는 극한해석의 개념은 해의 존재와 유일성에 대한 증명으로 인하여 더욱 보강되었다. 소성학과 극한해석에 대한 수많은 논문이 발표되었으며, 이론적, 실용적으로 중요한 결과가 보고되었다. 그러나, 이 기간중에도 극한해석의 일반해법에 대한 연구는 발표되지 못하였다.

극한해석이 본격적으로 연구·실용화되기 시작한 것은 탄소성해석의 발전과 더불어 그 한계를 느끼게 되는 1970, 80년대 이었다. 많은 공학자와 수학자가 이에 대하여 연구하였으며, 이를 수학적으로 뒷받침할 수 있는 많은 연구가 발표되었다. Duvaut와 Lions(1976), Johnson(1976), Anzellotti와 Giaguinta(1982) 등이 해의 존재와 유일성에 대한 발표를 하였으며, Rockafellar(1967), Strang과 Temam(1979, 1980), Yang(1982) 등이 극한해석의 이원조건과 소성에서의 최대최소 문제에 대한 발표를 하였다. 이들은 모두 해를 구하는 과정을 함수치공간에서 수립하였으며, 특히 Strang, Matthies, Temam(1978)이 bounded deformation 공간과 bounded variation 공간에서 변위율을 구성한 것은 특기할 만 하다.

실제 문제에 대한 응용과 해석기법은 매우 다양화하여 Charnes, Lemke, Zienkiewicz (1959)가 극한해석을 선형전산해법(linear programming)으로 풀려고 시도한 이래, Belytschko(1968), Neal(1968), Anderheggen (1972), Maier(1977), Christiansen(1981) 등이 수학적 전산해법(mathematical programming)에 의한 극한해석을 시도하였다. 또한 Dang Hung(1976)은 고전적 변분법칙을 이용하여 극한문제를 기본공식과 이원공식으로 나누어 직접해를 구하는 방법을 시도하였으며, Hutula(1976)는 일관된 유한요소 과정으로 상계해와 하계해를 구하는 방법을 제안하였고, Yang(1981~2)은 효과적인 수치해석을 위하여, 기본공식으로 부터 이원공식을 유도하는 상계과정을 도입하여 이원조건을 수립하였다. 이들은 모두 독특한 반복 방법을 사용하여 해의 최소치와 최대치를 구하려고 시도하였다.

최근에 극한해석에 대한 연구가 활발히 진행되고 있는 주된 이유는 극한해석에 대한 수학적, 물리적 바탕이 확고하고, 극한해석을 위한 시간과 경비가 탄·소성해석에 비하여 월등히 절약된다는 점이라 하겠다. 복잡한 소성변형기구와 응력상태를 최소한의 시간과 경비로 정확하게 필요한 정보만을 획득하자는 시도가 바로 극한해석의 최근동향인 것이다.

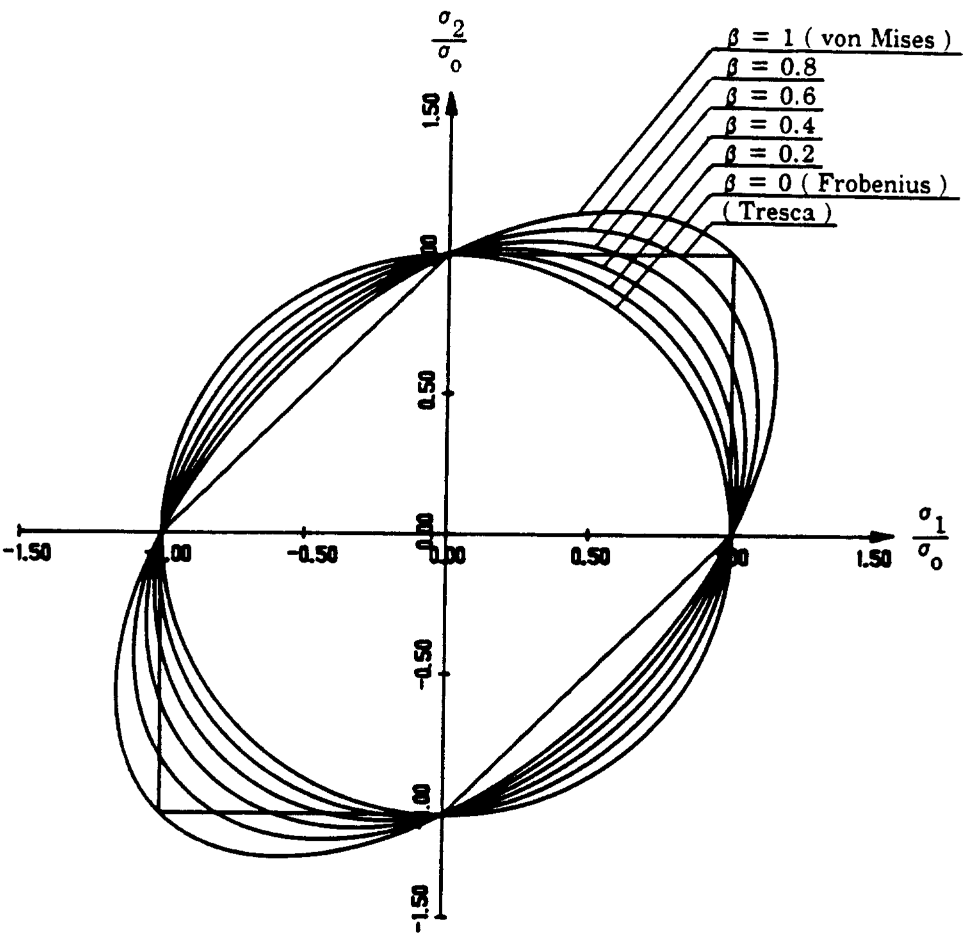


그림 2 β-norm 항복함수

3. 항복조건

항복조건은 극한해석에서의 결정적인 요소로, 바로 이 항복조건이 소성재료의 하중지지능력에 제한을 주는 것이다. 또한, 항복조건은 구성적가용집합에 속하므로 항복함수의 변화에 따라 소성응력과 변형율(혹은 모멘트와 처짐)의 관계가 달라지게 된다. 요컨대, 소성역에서의 재료의 물성을 정확히 묘사할 수 있는 항복조건을 부과하려면 범용성이 있는 일반적인 항복조건식이 필요하다. 또 다른 중요한 요소는 수치해석에 유리한 평탄한 곡선의 함수이어야 한다는 점이다. von Mises 항복조건식은 일반적으로 재료의 거동을 유사하게 묘사하지만, 평면응력의 경우나 평판문제의 경우에는 잘 맞지 않는 단점이 있다. 따라서, von Mises 항복조건식을 포함하면서도 일반적으로 표현할 수 있는 항복조건식은 2차원 응력상태에서 아래와 같이 채택할 수 있다.

$$\|\sigma\|_{(\beta)}=\sqrt{\sigma_1^2-\beta\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}\leq\sigma_0,\quad -2\leq\beta\leq2$$

위 식은 $\beta=1$일때에는 von Mises 항복조건식이 되며

$$\|\sigma\|_V=\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}\leq\sigma_0$$

$\beta=0$일때에는 Frobenius norm 항복조건식이 된다.

$$\|\sigma\|_F=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\leq\sigma_0$$

이때, σ_1과 σ_2는 평면 주응력이며, σ_0는 항복응력이다. $-2\leq\beta\leq2$의 β값에 대하여 $\|\sigma\|_{(\beta)}$는 철면성을 가짐을 알수 있다.

$\|\sigma\|_{(\beta)}$를 β-norm 항복조건식이라고 부르며, 이를 그림으로 표시하면 그림 2와 같다. β가 1보다 커지면 더욱 찌그러진 타원형이 되며, β가 2가 되면 두개의 직선이 되어 그 사이의 응력상태가 탄성역이 된다. β-norm을 항복조건식으로 채택하면, 물성치의 변화에 따라 알맞는 β값을 선정하여 항복함수로 사용할 수 있다.

4. 평판(Plate) 문제

평판에 관한 극한해석문제는 다음과 같이 공식화 할 수 있다. 하계공식(기본공식)은 정적가용집합과 구성적가용집합의 교집합을 해로 구성하는 과정이다. 즉, 평판이 하중을 받을 때 평형방정식과 항복조건, 그리고 정역학적 경계조건을 위배하지 않고 지탱할 수 있는 최대하중은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & q(M) \\ \text{subject to} & \nabla\cdot(\nabla\cdot M)=q\phi(x,y) \text{ in } D \\ & \|M\|_{(\beta)}\leq M_0 \\ & \text{static B. C} \end{array}$$

이때 q는 비례하중계수이고, $\phi(x, y)$는 하중분포식이다. $\|M\|_{(\beta)}$는 β-norm 항복조건을 모멘트에 부과한 식이다. 상계공식(이원공식)은 운동학적 가용집합내에서 해를 구하는 과정이다. 즉, 기본공식의 평형방정식에 가상일의 원리와 변분법칙을 적용하여 적분방정식 형태의 weak form을 만들고, 물리적 상계과정을 거쳐 비례하중계수를 함수치 형태로 만들어 이를 최소화 하는 과정이다. 물리적 상계과정이란 구성적가용집합에 속하는 항복조건식과 항복시의 직교조건으로 부터 모멘트와 곡률과의 관계식을 구하여 함수치의 모멘트에 대입하여 함수치를 운동학적가용집합 공간내에 국한되게 하고, 함수치가 물리적법칙을 위배하지 않는 범위내에서 최대가 되게 만들어 이를 최소화 하는 과정이다. 결과적인 상계공식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \tilde{q}(w) \\ \text{subject to} & \tilde{q}=\dfrac{M_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^2}} \\ & \displaystyle\iint_D\|\nabla\nabla w\|_{(-\beta)}d\Omega \end{array}$$

$$\iint \phi \, w d\Omega = 1$$

kinematic B. C.

이때 $\nabla\nabla w$는 처짐 w에 대한 2×2 Hessian 곡률행렬이며, $\|\nabla\nabla w\|_{(-\beta)}$는 dual β−norm으로 κ_1과 κ_2를 $\nabla\nabla w$의 고유치라 할때 아래와 같이 기술된다.

$$\|\nabla\nabla w\|_{(-\beta)} = \sqrt{\kappa_1^2 + \beta\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2}$$

한편, $\iint_D \phi \, w d\Omega = 1$은 표준화 과정에서 도출된 구속조건이다.

5. 평면응력문제

평면응력문제에 대한 하계공식은 평판문제와 유사한 과정으로 구할 수 있다. 즉, 평면 연속체에 하중을 가할때 평형방정식과 항복조건을 위배하지 않고 부과할 수 있는 최대 견인력은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && q(\sigma) \\ &\text{subject to} && \nabla \cdot \sigma = 0 \text{ in } D \\ &&& \sigma \cdot \boldsymbol{n} = q\boldsymbol{t}(x,\ y) \text{ on } \partial D_s \\ &&& \|\sigma\|_{(\beta)} \leq \sigma_0 \end{aligned}$$

이때 q는 역시 비례하중계수이고, $\boldsymbol{t}(x,\ y)$는 벡터로 표시되는 하중분포 식이다.

상계공식도 역시 평판문제와 유사한 과정으로 구할 수 있으며 적분방정식 형태의 weak form을 만들때, divergence theorem을 이용하여 경계조건을 weak form에 포함시키는 과정이 추가된다. 평판문제와 유사한 물리적 상계과정을 거쳐 비례하중계수를 함수치형태로 만들어 이를 최소화 하면 다음과 같은 공식이 된다.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \tilde{q}(\boldsymbol{u}) \\ &\text{subject to} && \tilde{q} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{2}\right)^2}} \\ &&& \iint_D \|\in\|_{(-\beta)} d\Omega \end{aligned}$$

$$\int_{\partial D_s} \boldsymbol{t} \cdot u d\Gamma = 1$$

kinematic B. C.

이때 $\|\in\|_{(-\beta)}$는 변형율에 관한 이원 β-norm이며, $\int_{\partial D_s} \boldsymbol{t} \cdot u d\Gamma = 1$은 평판문제에서와 같이 표준화 과정에서 도출된 구속조건이다.

6. 평면변형문제

평면변형문제에 관한 하계공식은 평판문제나 평면응력문제와 유사한 방법으로 구할 수 있다. 특히, 공식자체는 평면응력문제와 동일하나 내포하는 물리적 의미는 약간 차이가 있다. 이 경우에는 $\sigma_z \neq 0$이므로 평면응력으로 간주할 수 없으며, 항복조건식은 3차원 응력상태의 함수를 채용하여야 한다. 이때에는 β-norm에 상응하는 항복조건식을 구하기 어려우며, β-norm에 상응하는 항복조건식은 소성재료의 비압축성을 보장하지 못한다. 그러나, 평면변형의 경우에는 von Mises 항복조건이 잘 맞는 것으로 연구되어 있고, von Mises 항복조건은 β-norm의 특수한 경우로 소성재료의 비압축성을 보장하므로, 이를 항복조건식으로 채택하면 다음과 같은 하계공식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && q(\sigma) \\ &\text{subject to} && \nabla \cdot \sigma + (f) = 0 \text{ in } D \\ &&& \sigma \cdot \boldsymbol{n} = q\boldsymbol{t} \text{ on } \partial D_s \\ &&& \|\sigma\|_V \leq \sigma_0 \end{aligned}$$

이때 q는 역시 비례하중계수이다.

상계공식도 역시 평면응력문제와 유사한 과정으로 구할 수 있으나, 비압축성을 이용하면 다음과 같은 공식이 된다.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \tilde{q}(\boldsymbol{u}) \\ &\text{subject to} && \tilde{q} = 2k \iint_D \|\in\|_{(-V)} d\Omega \\ &&& \int_{\partial D_s} \boldsymbol{t} \cdot u d\Gamma = 1 \end{aligned}$$

$$\epsilon \cdot I = 0$$

kinematic B. C.

이때 $\|\epsilon\|_{(-V)}$는 변형율에 관한 dual von Mises norm이며, 비압축성조건을 부과하면 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$\begin{aligned}\|\epsilon\|_{(-V)} &= \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2^2} \\ &= \sqrt{-\epsilon_1 \epsilon_2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \epsilon_{xy}^2}\end{aligned}$$

위의 상계공식을 비압축성조건으로 부터 stream function을 도입한 형태로 바꾸어 주면 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad \tilde{q}(\psi) \\ &\text{subject to} \quad \tilde{q} = k \\ &\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y}\right)^2}\, d\Omega \\ &\int_{\partial D_s} \left(t_x \frac{\partial\psi}{\partial y} - t_y \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) d\Gamma = 1\end{aligned}$$

kinematic B. C.

이때 비압축성 조건은 stream function ψ의 도입으로 자연적으로 만족된다.

7. 이원조건

이제까지 유도된 하계해석과 상계해석에 대한 공식을 정리하면 다음과 같다. 즉, 하계공식은 q값의 최대치를 구하는 과정으로 이때 최적의 응력분포(혹은 모멘트분포)를 정적가용집합과 구성적가용집합조건을 만족하게 선택하여야 한다. 이를 공식화하면,

$$\begin{aligned}&\max.\ q(\sigma) \\ &\text{s.t. } \sigma \in L = S \cap C\end{aligned}$$

과 같이 된다.

상계해석은 $\tilde{q}$값의 최소치를 구하는 과정으로 이때 최적의 변위율 분포를 운동학적가용집합조건을 만족하게 선정하여야 한다. 이를 공식화하면

$$\begin{aligned}&\min.\ \tilde{q}(u) \\ &\text{s.t. } u \in K\end{aligned}$$

과 같이 된다.

상기한 두개의 공식을 조합하면 다음과 같은 이원조건을 얻을 수 있다.

$$\max_{\sigma \in L}.\ q(\sigma) = q^* = \min_{u \in K}.\ \tilde{q}(u)$$

이 이원조건은 극한해석에서 가장 중요한 조건이며 필수적인 개념이다. 이 조건으로부터 상계해이거나 하계해이거나 최적해는 정해가 된다는 논지가 성립되는 것이다.

위에 열거한 세가지 문제의 하계공식(기본공식)과 상계공식(이원공식)의 형태가 거의 동일하다는 것은 매우 흥미롭다. 특히, 세가지 문제에서 동히, 기본공식에서는 응력분포에 한계를 가하는 조건으로 β-norm이 사용된 것에 반해, 이원공식에서는 함수치에 한계를 가하는 조건으로 음의 β값을 가지는 β-norm, 즉 이원 β-norm이 사용된 것은 수학적으로 더욱 흥미롭다. 실제, 수학적 공식화 과정에서는 지금까지 유도된 과정과 반대로 최소화공식으로 부터 최대화 공식을 유도하는 작업이 종종 수행되고 있다. 한쌍의 공간요소(σ, u) 또는 (σ, ϵ)는 앞에서 기술한 이원조건을 만족시키는 해가 되며 이들은 σ와 ϵ 대한 Kuhn-Tucker 함수의 saddle point라고 불리운다.

이론적으로 하계공식의 최대화문제는 유한차원 근사로 해를 구할 수 있으나, 실제로는 유한차원문제의 규모와 현존기법의 해 수렴이 문제가 되므로 간단한 영역과 경계조건의 문제에서만 해를 구할 수 있다. 그러나, 상계공식의 최소화 문제는 복잡한 영역과 경계조건의 경우에도 유한차원 근사로 비교적 쉽게 해를 구할 수 있다. 세가지 문제에 공히 응용할 수 있는 최소화 방법을 다음 장에 소개한다.

8. 최소화 기법

상계공식에 응용될 수 있는 최소화기법으로는 우선 함수치가 극값을 갖는 조건으로부터 Euler방정식을 유도하여 적변 Newton 방법을 채용하면 함수치의 최소값을 구할 수 있다. 보다 일반적인 방법은 함수치를 직접 유한요소로 근사하여 최소화 기법을 사용하여 최소 $\tilde{q}$값과 상응하는 u를 구하는 방법이다. 주어진 영역을 유한요소로 분할하여 유한요소내에서 형상함수를 사용하여 u를 근사하면 다음과 같은 상계공식을 얻을수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \tilde{q}(u) \\ &\text{subject to} \quad \tilde{q} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{2}\right)^2}} \times \sum_{e=1}^{E} \sqrt{U^T K_e U} \\ &\qquad\qquad\quad C^T U = 1 \\ &\qquad\qquad\quad \text{boundary conditions for } U \end{aligned}$$

이때 U는 N-차원 벡터이며 K_e는 $N \times N$ zero 행렬에 유한요소의 자유도수 크기의 행렬을 부과한 행렬이다. 위와 같이 행렬식 형태로 근사된 함수치 $\tilde{q}$는 다음과 같이 반복형태로 최소화 과정에 적용시킬 수 있다.

$$\tilde{q} \cong q_n = \sum_{e=1}^{E} \frac{(U^T K_e U)_n}{\sqrt{(U^T K_e U)_{n-1}}}$$

이때 n과 $n-1$은 반복회수를 나타낸다. q_n을 구하는 과정에서 $(U^T K_e U)_{n-1}$은 기지의 값이므로 $(K_e)_n$에 상수로 포함시킬 수 있으며 이 과정을 수행하면

$$q_n = \sum_{e=1}^{E} (U^T K_e U)_n$$

과 같이 쓸수 있다. 따라서, 상계해석에 대한 최종공식은 다음과 같은 구속 최소화 문제가 된다.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad U^T K_U \\ &\text{subject to} \quad C^T U = 1 \end{aligned}$$

위의 문제는 잘 알려진 구속 2차 전산해법문제 (constrained quadratic programming problem)이며 2차 최소화 문제를 풀어 최소치 q_n^*을 구할 수 있다. 매 반복 단계마다 Lagrange 승수법을 도입하면 위의 구속최소화 문제는 다음과 같은 비구속 최소화문제로 변환할 수 있다.

$$\text{minimize} \quad \pi = U^T K U - 2\lambda(C^T U - 1)$$

이때 λ는 Lagrange 승수이며, 바로 q_n^*가 된다. 즉,

$$q_n^* = \lambda = U^T K U$$

이때의 상응하는 변위분포 U는

$$U = \frac{K^{-1} C}{C^T K^{-1} C}$$

가 된다.

반복회수를 늘림에 따라 q_n^*는 정해치 q^*에 수렴하므로 적당한 반복회수에서 q^*에 가까운 값을 얻을 수 있고, 상응하는 U를 구할 수 있다.

9. 맺음말

극한해석은 이제까지 주로 소성구조물의 설계에 응용되어 왔다. 초기의 구조물들은 탄성에너지 이론에 의하여 설계되었고 모든 권위자들은 이를 당연하게 받아들였다. 그러나 Broek 교수와 같은 사람들의 노력에 의하여 극한설계의 타당성과 유용성이 입증되었고, 구조물의 건설에 많은 경비를 절약하게 되었다. 철탑과 같은 트러스 구조물이 그 대표적인 예로서 카나다의 수력발전회사는 1910년 철탑을 평지에 세워놓고 모든 악조건을 부과하며 수년간 극한해석의 타당성을 실험하여 입증하였다. 트러스에 대한 극한해석 문제는 최소화 기법의 구속최소화 문제로 유도할 수 있고, 트러스문제는 소성가공의 해석에도 직접 응용할 수 있

다. 왜냐하면, 예를들어 평면변형문제가 앞에서 보인바와 같이 똑같은 구속최소화 문제로 유도되었기 때문이다.

결론적으로, 트러스문제나, 평판문제나, 평면응력문제나, 평면변형문제가 극한해석에서는 모두 같은 문제로 간주될 수 있고 같은 공식과 같은 방법으로 풀수 있는 것이다. 이를테면, 소성구조물에서의 한계하중은 소성가공에서는 가공하중이 되며 모두 극한하중이 되는 것이다. 그런 의미에서 보면 '극한해석에 관한 단일이론'이란 제목은 매우 의미심장하다 할 수 있을 것이다. 끝으로, 지금까지 유도된 공식과 유도방법이 이 분야를 연구하는데 조금이나마 도움이 되기를 바란다.

참 고 문 헌

(1) Anderheggen, E. and Knopfel, H., 1972, "Finite Element Limit Analysis Using Linear Programming", Int. J. Solids Structure Vol. 8, pp. 1413~1431.

(2) Anzellotti, G. and Giaquinta, M., 1982, "On the Existence of the Fields of Stresses and Displacements for an Elasto-Perfectly Plastic Body in Static Equilibrium", J. Math. Pures et Appl. Vol. 61, pp. 219~244.

(3) Bishop, J.F.W., 1952, "On the Complete Solution to Problems of Deformation of a Plastic-Rigid Material", J. Mech. Phys. Solids Vol. 2, pp. 43~53.

(4) Charnes, A., Lemke, C.E. and Zienkiewicz, O.C. 1959, "Virtual Work, Linear Programming and Plastic Limit Analysis", Proc. Roy. Soc. London Ser. A251, pp. 110~116.

(5) Christiansen, E., 1981, "Computation of Limit Loads", Int. J. Num. Meth. Eng. Vol. 17, pp. 1547~1570.

(6) Dang Hung, N., 1976, "Direct Limit Analysis via Rigid-Plastic Finite Elements", Com. Meth. Appl. Mech. Eng. Vol. 8, pp. 81~116.

(7) Duvaut, G. and Lions, J.L., 1976, "Inequalities in Mechanics and Physics", Springer-Verlag, New York.

(8) Drucker, D.C., 1954, Limit Analysis and Design", Appl. Mech. Reviews Vol. 7, pp. 421~423.

(9) Drucker, D.C., 1964, "On the Postulate of Stability of Material in the Mechanics of Continua", J. Mécanique Vol. 3 No. 2, pp. 235~249.

(10) Drucker, D.C., Prager, W. and Greenberg, H.J., 1952, "Extended Limit Design Theorems for Continuous Media", Q. Appl. Math. Vol. 9, pp. 381~389.

(11) Gvozdev, A.A., 1960, "The Determination of the Value of the Collapse Load for Statically Indeterminate Systems undergoing Plastic Deformation", Int. J. Mech. Sci. Vol. 1, pp. 322~335.
(In Russian-Proceedings of the Conference on Plastic Deformations, December 1936, p. 19)

(12) Hill, R., 1948, "A Variational Principle of Maximum Plastic Work in Classcal Plasticity", Q. J. Mech. Appl. Math. Vol. 1, pp. 18~28

(13) Hill, R., 1950, "The Mathematical Theory of Plasticity", Clarendon Press, Oxford.

(14) Hill, R., 1956, "On the Problem of Uniqueness in the Theory of a Rigid-Plastic Solid I", J. Mech. Phys. Solids Vol. 4, pp. 247~255.

(15) Hodge, P.G. Jr., 1959, "Plastic Analysis of Structure", McGraw-Hill, New York.

(16) Hodge, P.C. Jr. and Belytschko, T., 1968, "Numerical Methods for the Limit Analysis of Plates", J. Appl. Mech. Trans. A.S.M.E. Vol. 35, pp. 797~802.

(17) Hundy, B.B., 1954, "Plane Plasticity",

Metallurgia, pp. 109~118.
(18) Hutula, D.N., 1976, "Finite Element Limit Analysis of Two-Dimensional Plane Structures", A.S.M.E. Winter Annual Meeting, pp. 35~51.
(19) Maier, G., Grierson, D.E. and Best, M. J., 1977 "Mathematical Programming Methods for Deformation Analysis at Plastic Collapse", Computers & Structures Vol. 7, pp. 599~612.
(20) Matthies, H., Strang, G. and Christiansen, E., 1979, "The Saddle Point of a Differential Program", Energy Methods in Finite Element Analysis, John-Wiley, New York, pp. 309~318.
(21) Neal, B.G., 1968, "Limit Load of a Cantilever in Plane Stress", Engineering Plasticity, Cambridge University Press, p. 473.
(22) Rockafellar, R.T., 1967, "Duality and Stability in Extremum Problems involving Convex Functions", Pacific J. Math. Vol. 21, No. 1, pp. 167~187.
(23) Strang, G., 1979, "A Minimax Problem in Plasticity Theory", Lecture notes 701, Springer-Verlag, Berlin, pp. 319~337.
(24) Strang, G., Matthies, H. and Temam, R., 1978, "Mathematical and Computational Methods in Plasticity", IUTAM Symposium on Variational Methods in the Mechanics of Solid, pp. 20~28.
(25) Temam, R. and Strang. G., 1980, "Duality and Relaxation in the Variational Problems of Plasticity", J. Mécanique, Vol. 19, No. 3, pp. 493~527.
(26) Yang, W.H., 1981, "Minimization Approach to Limit Solutions of Plates", Com. Meth. Appl. Mech. Eng. Vol. 28, pp. 265~274.
(27) Yang, W.H., 1982, "A Variational Principle and an Algorithm for Limit Analysis of Beams and Plates", Com. Meth. Appl. Mech. Eng. Vol. 33, pp. 575~582.

◇