

一時作業中斷을許容하는順序從屬作業을並行機械로서 makespan最小화를圖謀하는發見的方法

(Heuristic Procedure on Minimizing Makespan for Preemptive Sequence Dependent Job Scheduling with Parallel Identical Machines

元震喜*
金滿植**

Abstract

To minimize makespan for preemptive sequence dependent job scheduling with parallel identical processors, fundamental results, as the basis of new algorithm to be presented, such as McNorton's algorithm for independent jobs, Hu's characterization for dependent jobs, and Muntz-Coffman's algorithm, were first introduced.

Then a heuristic procedure was presented applying those concepts of zoning of assembly line balancing and of resource leveling on CPM network scheduling with two or more of parallel machines in general. New procedure has eliminated presumative machine assignment using ρ , rate of resource capability ($\rho < 1$), for practical scheduling.

第1章 序 論

스케줄링(Scheduling)은 作業順序와 資源配
定の 決定을 前題로 한다. 單一機械 問題에서
는 스케줄링 基準으로서 作業時間흐름 - make-
span(flowtime) - 은 順序從屬的作業(sequence
dependent job)의 準備時間(setup time)이 包
含되지 않는 限 큰 考慮對象이 되지 않으나 同性
能의 並行機械(parallel identical machine)의 경
우는 重要한 基準이 된다. 同性能 並行機械의
合理的 作業配定은 各 機械에 可能한 限 均等

한 作業負荷를 加함으로써 各 機械가 最適의 作
業順序를 따를 수 있게 하는 것이다.

makespan 最小化 研究로서 McNorton의 一
時中斷을 許容(preemptive)하는 獨立作業(in-
dependent jobs)의 最適스케줄링의 特性[1]과
Hu의 從屬作業(dependent job) 스케줄링의 特
性[2]이 重要한 契期가 되었고, 다른 여러가
지 알고리즘과 發見의 方法은 대개의 경우 위의
理論이 基礎가 되고 있다.

Muntz와 Coffman은 作業의 先行(predecessor)
關係를 가진 組立木(assembly tree)을 2

*明知大學校

**漢陽大學校

個의 同性能 並行機械로 作業수행을 하는 條件下에서 makespan을 最適化하는 알고리즘[3]을 提示하였다.

본 연구에서는 一時中斷을 許容하는 作業에서 Hu와 Muntz - Coffman의 方法에 라인밸런싱의 zoning技法과 CPM 工程管理의 資源平準化 技法을 應用한 方法으로써 network上的 從屬作業들의 2個 以上の 同性能 複數並行機械에 同時作業群을 配定시키거나 機械別로 主工程 및 非主工程의 作業들을 負荷시키면서 作業順序 關係로 遊休時間(idle time)이 發生되는 機械에 合理的으로 資源平準化를 計劃하여 모든 機械의 負荷를 均等하게 하고 遊休時間을 最小化하는 最適計劃의 알고리즘을 提示하였다. 아울러 例題를 들어서 새로운 알고리즘의 效果를 比較 檢證하고 結論으로 이 알고리즘이 功獻하는 長點을 要約하였다.

第2章 새로운 알고리즘의 開發

順序從屬의 作業一時中斷을 許容하는 工程計劃(sequence dependent preemptive job scheduling)에서 Hu는 $t_j = 1$ 의 경우 그리고 Muntz - Coffman은 $m = 2$ 의 組立木型態의 作業構造에서 makespan 最小化의 알고리즘을 提示하였다. 단, t_j 는 作業j의 作業所要時間이고, m 은 機械台數를 表示한다.

본 연구에서는 위 作業의 工程計劃에 있어서 $t_j \leq 1$, $m \leq 2$ 의 경우, 作業工程이 반드시 組立木型이 아니라도 適用 可能한 (建設工程에서도 適用) 一般的인 作業工程의 計劃에 應用할 수 있는 發見的 알고리즘을 開發하려고 시도하였다. 이 方法은 Hu와 Muntz-Coffman의 알고리즘에 基礎를 두고 있으나 라인밸런싱(line balancing)의 區間法(zoning)과 主工程網(CPM Network) 計劃의 資源平準化(resource leveling) 技法을 應用한 發見的方法(heuristic algorithm)이 된다. 이 方法은 보다 容易하게 計劃하고 보다 makespan 最小化를 圖謀하여 t_j 의 數値와 並行機械의 台數의 制限設이 製造工程이나

建設工程을 不問하고 一般的인 工程計劃에 適用할 수 있음을 目標로 試圖한 것이다.

1. 새 알고리즘의 節次

(Preemptive sequence dependent jobs scheduling)

step 1. 順序從屬作業들을 節上活動(activity on node)으로 CPM Network를 作成한다. 各 活動마다 番號부여를 한다. 作業順序上 先行作業의 番號는 그 후속작업의 番號보다 적게 ($j > i$ for $j \leq i$) 부여한다. 그리고 各 活動마다 所要資源數(人力, 또는 機械 및 時間- /時 또는 機/時)를 表記한 後 이들의 主工程(Critical Path)을 찾는다.

Step 2. 同性能並行機械(또는 同能率의 作業人員數) m 台(人)로 先行作業條件을 어기지 않고 同時作業이 可能한 作業群을 區間(zoning)한다. zoning은 單位時間에 同時作業이 可能한 作業들이어야 한다. zoning된 作業群마다 順番(S_1, S_2, \dots, S_k)을 부여하고 各 機械에 順番에 따라 作業配定을 한다. 모든 S_1, S_2, \dots, S_k 에서 各 機械가 滿負荷(full load 되면 各 機械(m_1, m_2, \dots)는 無休時間(no idletime)으로써 最適計劃이 된다. $t_j = 1$ 이면 zoning이 容易하지만 $t_j > 1$ 이면 zoning이 어렵다. 이런 경우는 Step 2를 省略하고 Step 3으로 넘어간다.

Step 3. 資源負荷圖를 作成한다.

먼저 m_1 에 主工程의 作業負荷를 시키고 다음에 副主工程(near critical path), 非主工程(non critical path)의 順으로 $m_2, m_3 \dots$ 에 作業負荷를 한다. 主工程上的 特定作業에 先行作業들이 많이 收斂되면 이 特定作業의 着手時點 以前에 超過負荷의 現象이 發生될 수 있다. 또 非主工程은 機械의 遊休(idle machine)가 發生할 수 있다.

Step 4. 資源平準化 計劃調整

資源平準化의 方法으로

(1) 超過負荷를 平準化하기 위하여 特定作業의 着手時點 以前에 存在하는 遊休機械의 可用資源을 最大限 利用하여 作業의 先行條件을 어기지 않고 資源負荷의 均等配分을 圖謀한다.

(1) 可用遊休資源이 없으면 超過負荷를 處理完了할 때까지 特定作業의 着手를 늦춘다. 이때 超過負荷들을 處理完了하는 時點 t_i 와 그 후속 작업인 特定作業의 着手時點 t_j 와의 差는 m_1 의 遊休時間 $t_i - t_j = \phi > 0$ 이 된다. 따라서 makespan (建設工事에서는 總工期)은 ϕ 만큼 늦어진다.

(3) ϕ 를 最小化하기 위하여 超過負荷作業 k 個를 機械 m 台에 均等配分시킴으로써 makespan의 지연을 $k/m \cdot \phi$ 만큼 단축可能케 한다.

(4) 만일 主工程上의 한 特定作業의 負荷는 큰데 (m_1)의 負荷만 있고 非主程들이 負荷가 작다면 m_2 以下에 遊休가 發生할 수 있다. 이때는 이 特定作業을 m 台의 機械에 均等配定 함으로써 $\phi = |t_i - t_j|$ 를 ϕ/m 만큼 단축시킬 수 있다.

Step 5. 모든 作業들의 平準化配定이 끝나면 Stop 한다.

2. 새 알고리즘의 適用例

Muntz-Coffman의 例題(그림-1)를 새 알고리즘으로 적용하면 아래와 같다.

$m=2$ 일때

Step 1. job network 作成 및 主工程發見 (그림-2. (a))

Step 2. $m=2$ 로 同時作業이 可能한 作合群의 zoning은 (그림-2 (b))와 같다.

[例題]

作業	1	2	3	4	5
t_j	2	2	2	1	1
S_j	5	5	4	5	-

(S_j 는 作業 j 의 直後續 作業)

m_1	1	$\rho = \frac{1}{2}$	1	$\rho = \frac{2}{3}$	
	2	$\rho = \frac{1}{2}$	2	$\rho = \frac{2}{3}$	5
m_2	3	$\rho = 1$	4	$\rho = \frac{2}{3}$	$\rho = 1$

$t=2$ $t=3.5$ $t=4.5$

(a) 加工機械分担 (using processor sharing)

m_1	1	2	1	2	
m_2		3	2	4	5

$t=2$ $t=3.5$ $t=4.5$

(b) 加工機械非分担 (without processor sharing)

그림-1

Muntz-Coffman 알고리즘 例題適用解(2)

Step 3. 資源負荷圖 作成(그림-2 (c)).

主工程作業 ⑤의 着手時點을 지키려면 非主工程作業 ②는 超過負荷가 된다.

Step 4. 資源平準化 計劃調整

Step 4. (2)에 의하여 作業(2)를 完了할 때까지 그 後續作業 ⑤를 늦추면 그림-2 (d)와 같으며 m_1 은 $t=4$ 에서 遊休時間 ϕ 를 發生하게 된다. 이때 makespan은 $M=5$ 이다.

Step 4. (3)에 의하여 作業 ②의 超過分을 $m=2$ 에 均等配定하여 計劃調整하면 그림-2 (e)와 같으며 makespan은 $M^*=4.5$ 가 된다.

第3章 새 알고리즘의 檢證

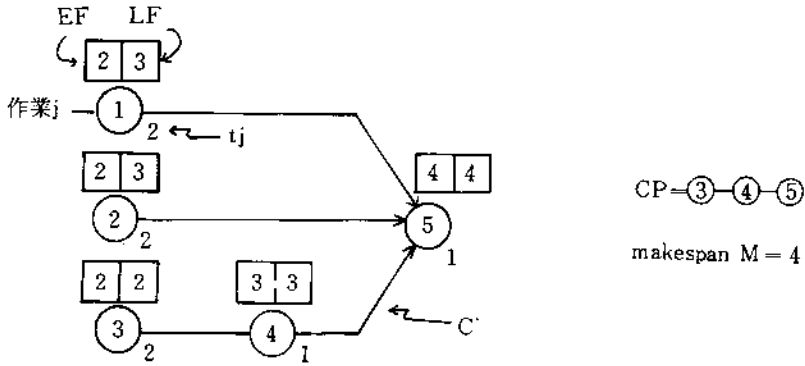
약간의 例題를 適用하여 Hu's Algorithm 및 Muntz-Coffman Algorithm과 새 Algorithm을 比較 檢討해 보기로 한다.

檢證-1. Hu's Algorithm(그림 3)을 새 알고리즘으로 計劃하면 그림-4의 (a), (b), (c) (d) 및 (e)와 같다.

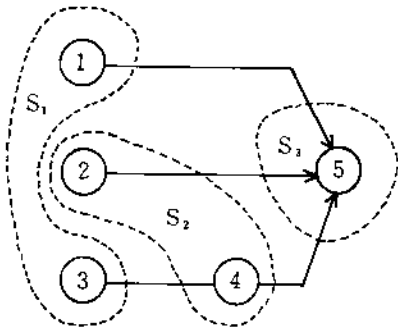
그림-4 (c)에서 보는바와 같이 主工程의 着手時點을 어기지 않기 위해서는 zoning-4의 作業 ⑨는 超過負荷가 된다. 이 超過負荷의 作業을 完了하려면 그 後續作業들이 順次的으로 着手時點을 늦추게 되므로 資源負荷圖는 그림-4 (d)와 같이 된다. 이때 $m=7$, m_2 와 m_1 에서 各各 ϕ 만큼의 遊休時間이 發生된다. 超過負荷作業 ⑨를 $m=3$ 에 均等配定하면 $\phi/3$ 만큼 markspan을 단축시킬 수 있고 最終作業 ①을 坦當하는 m_1 을 除外하고 모든 機械는 $t=5\frac{1}{3}$ 까지 無遊休로써 最適計劃인

$$M^* = 6\frac{1}{3}, F = \frac{1}{3} \{3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 5\frac{1}{3} + 6\frac{1}{3}\} = 3\frac{1}{3}$$

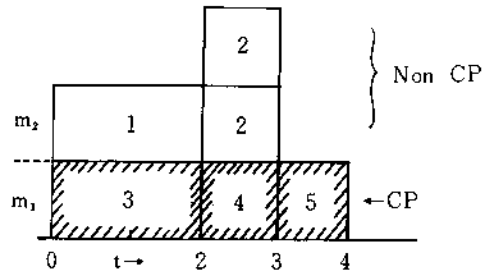
解가 된다.



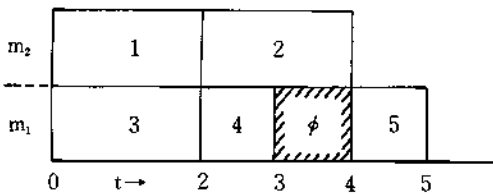
(a) 主工程網과 CP發見



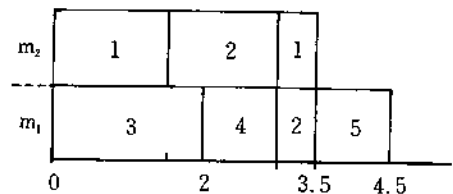
(6) 同時作業可能한
作業群으로 zoning



(c) 資源負荷圖作成
 m_1 에 먼저 主工程을 配定함



(d) 超過負荷를 平準化하므로써 主工程上의
直後續 作業이 ϕ 만큼 지연됨
M=5



(e) 超過資源(作業 2)을 機械均等
配分하므로써 遊休時間除去
M*=4.5

그림 2 Muntz-Coffman의 例題를 새 알고리즘으로
適用한 스케줄링

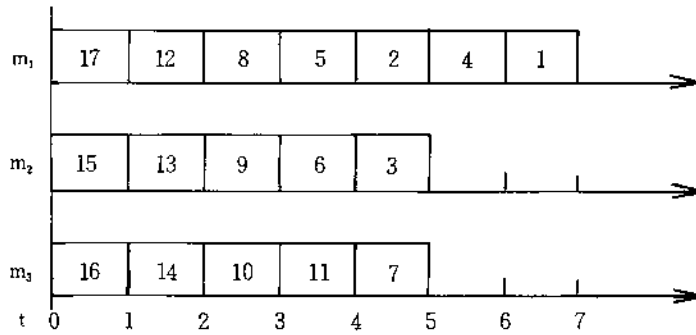
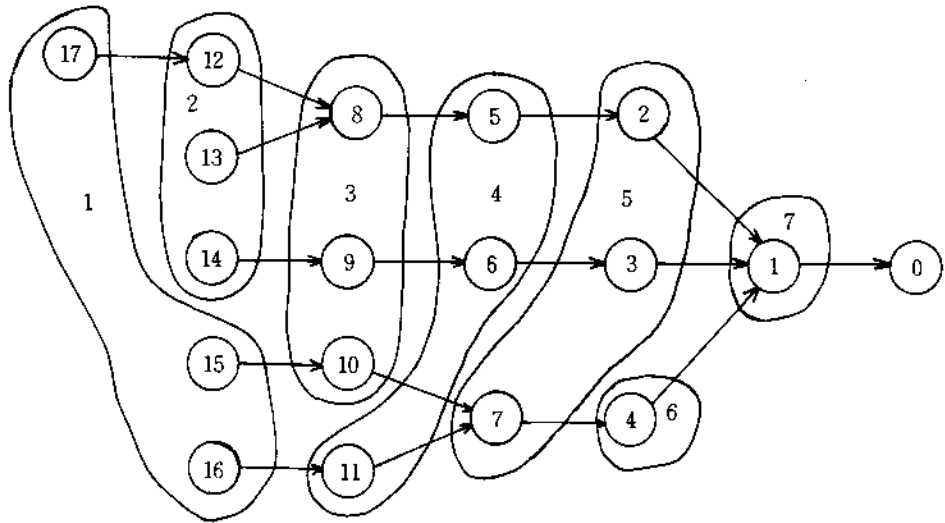


그림 - 3. 3대의 機械로 加工하는 17個 作業工程問題를 Hu의 알고리즘으로 計劃한 Gantt 工程表

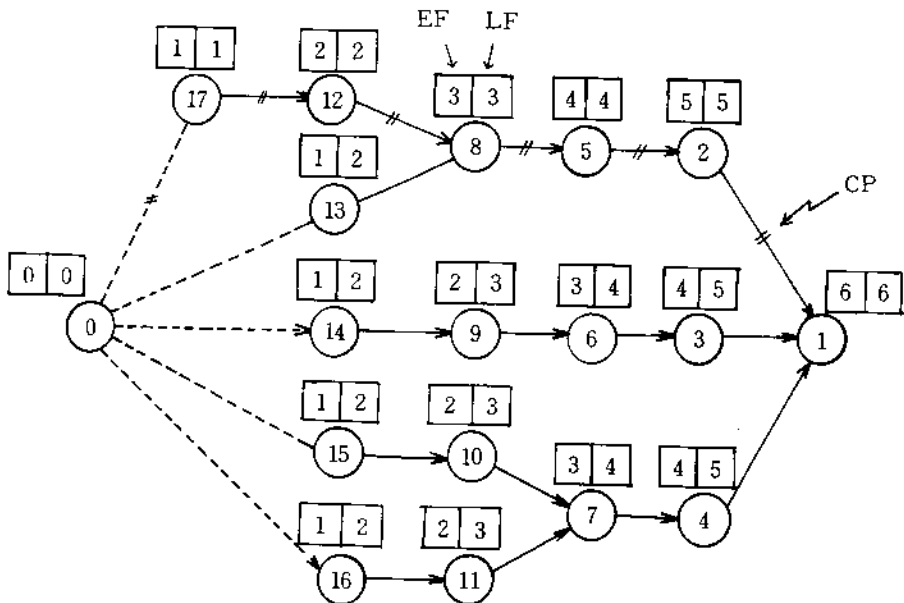
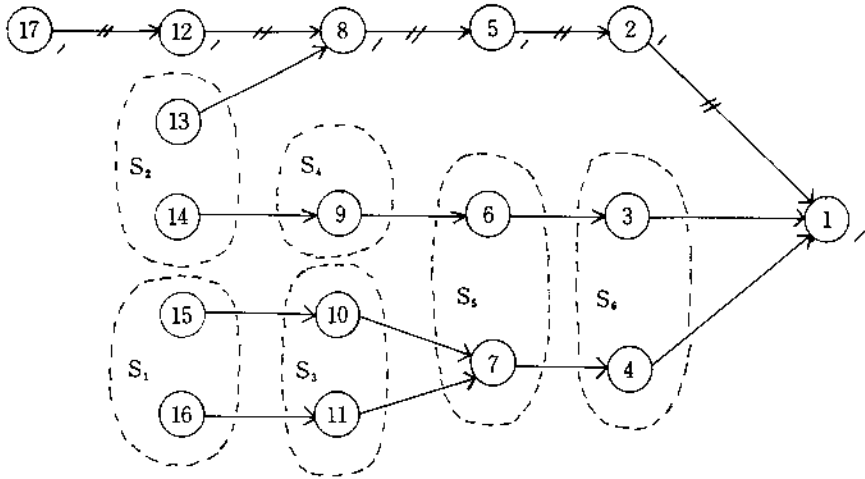
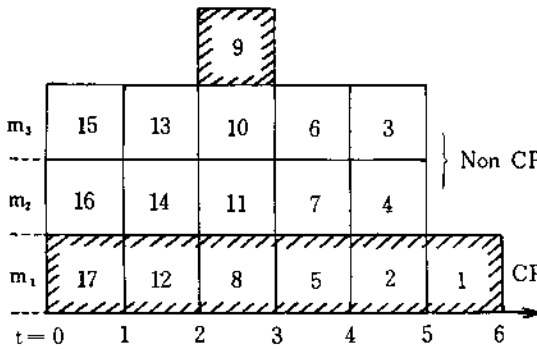


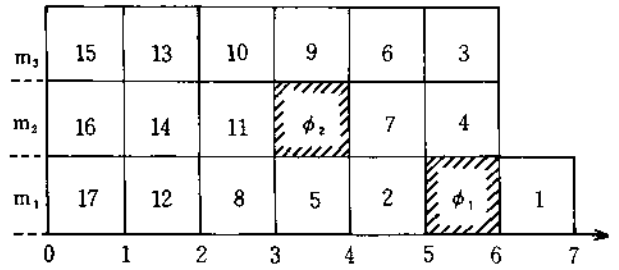
그림 4. (a) 作業工程網作成; EF, LF 計算 및 CP發見 (Hu의 例題解(그림 3)를 새 알고리즘으로 스케줄링)



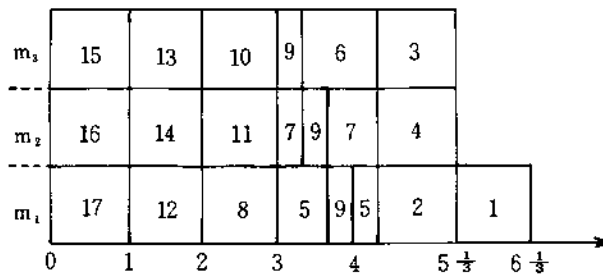
(b) 主工程을 m_1 에 配定하고 나머지 工程을 m_2 와 m_3 에 同時作業可能한 作業群으로 zoning



(c) 1次 m_1 에 主工程 配定 2次 m_2, m_3 에 zoning 順으로 非主工程 配定



(d) 超過負荷를 平準化한 未調整計劃



(e) 超過負荷를 各 機械에 均等配分하여 調整한 計劃
 $M = 6 \frac{1}{3}$

그림 4. Hu의 例題(그림 3)를 새 알고리즘으로 스케줄링

Hu's Algorithm으로는 $M = 7$,

$F = \frac{1}{7} \{3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 6 + 7\} = 3.412$
로 되어 새 알고리즘에 의한 解를 따르지 못한다.

檢證 - 2. Muntz-Coffman 알고리즘에 의한 例題(그림 3)의 結果는 $m = 2$ 의 特殊한 경우로 새 알고리즘을 適用한 結果도 이와 같으며 그림 2. (a)~(e)에 提示하였다.

檢證 - 3. Muntz-Coffman 알고리즘을 적용한 다음의 例題에 새 알고리즘을 적용하여 비교해보면 아래와 같다.

[例題]

作業	1	2	5	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Sj	3	3	4, 5, 6	-	-	-	10	10	10	11, 12	-	-

($t_j = 1, \forall j$)

(1) $m = 2$ 의 경우(附表 2 및 附表 3 參照)

Algorithm	M	F	特 徵
Muntz-Coffman	7	4.0	理論的일뿐 非實際的
새알고리즘	6	3.5	實際的이며 計劃容易

(2) $m = 3$ 의 경우(附表 4 및 附表 5 參照)

Algorithm	M	F	特 徵
Muntz-Coffman	5	4	理論的일뿐 非實際的
새알고리즘	2.917	2.5	實際的이며 計劃容易

證檢 - 4. Muntz-Coffman이 試圖하지 못한 $m = 3$, $t_j = 1$, 그리고 組立木型이 아닌 다음 例題를 새 알고리즘으로 스케줄링 해보기로 한다.

[例題]

作業j	1	2	3	4	5	6	7	8
tj	1	2	3	4	2	1	2	2
Sj	2, 3, 4	7, 8	5, 6	-	-	-	-	-

結果는 附表 1 (a), (b), (c), (d)에서 보는바와 같이 超過負荷의 均等配定으로 各機械는 最初의 先行作業 ①의 作業時間동안 ($t = 1$)을 빼 놓고는 모두 滿負荷가 되어 最適計劃을 얻고

$M^* = 6$ ½이 된다.

最適性 檢證

$t_{j,k}$ = 機械 k의 作業 j 加工時間

$I_{j,k}$ = 機械 k의 作業 j 直前に 일어나는 遊休時間

으로 놓으면 makespan은

$$M = \max \left\{ \sum_{j=1}^n t_{j,1} + I_{j,1}, \sum_{j=1}^n t_{j,2} + \sum_{j=1}^n I_{j,2}, \dots, \sum_{j=1}^n t_{j,m} + \sum_{j=1}^n I_{j,m} \right\}$$

으로 表示할 수 있다.

위 檢證한바, 各 例題에서 새 알고리즘을 適用한 스케줄은 檢證 4 (附表 1, (d))의 最初作業을 기다리는 作業 2와 作業 4의 待機時間 $I_{2,2} = I_{4,3} = t_{1,1}$ (工程順序上 不可避)을 除外하고 모두

$$\sum_{j=1}^n I_{j,k} = 0, \forall k$$

가 되어 最適計劃이 됨을 알 수 있다.

第 4 章 結 論

새 알고리즘은 同性能並行機械의 台數에 制限을 두지 않고 各 作業時間 $t_j \geq 1$ 의 緩和된 條件下에서 生産工程이나 組立工程을 不問하고 preemptive sequence dependent jobs scheduling의 一般的 節次를 開發할 目的으로 發見의 方法(heuristic procedure)으로 提示하였다.

第 3 章의 몇가지 檢證을 通하여 새 알고리즘의 長點을 確認한 것을 要約하면 아래와 같다.

1. 一般的인 一時作業中斷을 許容하는 順序從屬 工程計劃에 利用할 수 있다.

2. Hu's Algorithm의 前提條件 $t_j = 1$ 에 구애되지 않고 一般的인 $t \geq 1$ 의 工程計劃에 適用할 수 있다.

3. Muntz-Coffman Algorithm의 $m = 2$ 에서 만의 makespan 最小化를 保障하는 制限을 脫皮하여 $m \geq 2$ 의 一般的인 工程計劃에 適用할 수

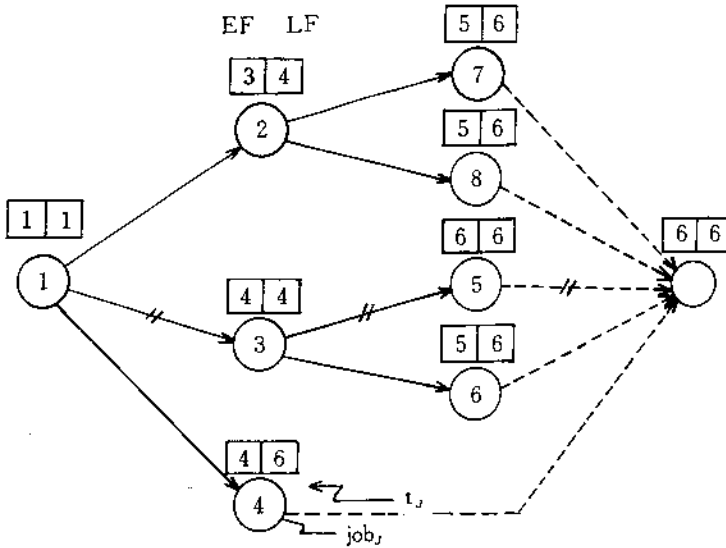
있다.

4. Muntz-Coffman Algorithm에 比하여 機械分坦率 P의 計算이 必要치 않고 計劃이 現實的이며 容易하다. 卽 한 機械가 몇개의 作業을 同時에 할 수 있다는 假定(實際는 不可能)을 할 必要가 없고 주어진 時間에 한 機械가 한 作業

만 수행하는 實際的인 스케줄링이 된다.

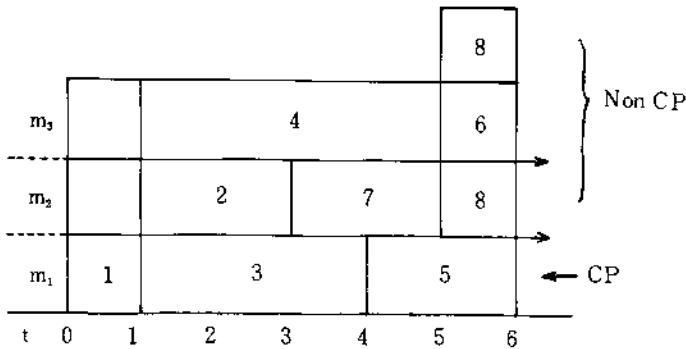
5. makespan 最小化의 效果가 既存方法보다 優越하다. 많은 경우 最適計劃을 얻을 수 있다.

6. 製造工程 및 建設工程의 一般的인 스케줄링에 널리 適用할 수 있다.



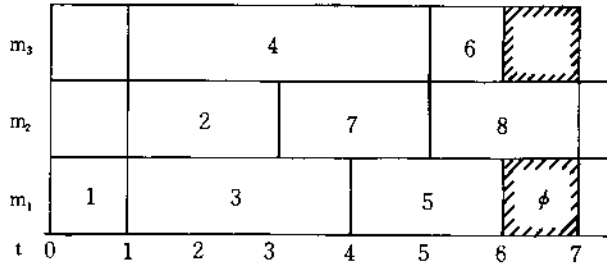
附表-1 檢證 4의 例題를 새 알고리즘 適用으로 스케줄링 (m=3)

(a) 主工程網作成 및 主工程

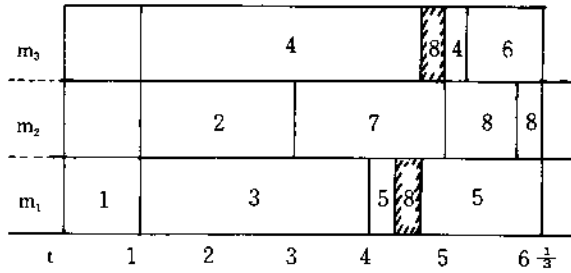


(b) m₁에 主工程作業負荷

m₂ 및 m₃에 非主工程 作業負荷 作業 8이 超過負荷

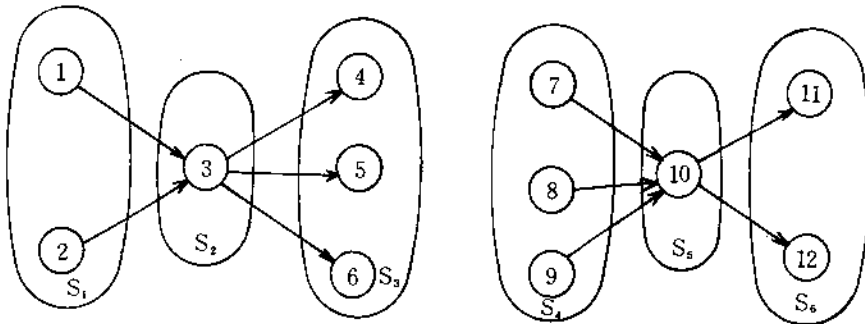


(c) 超過資源의 平準化

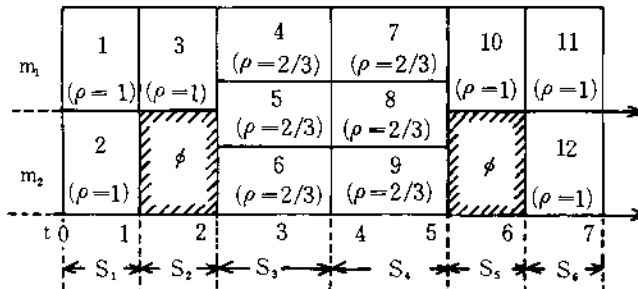


(d) 超過負荷作業의 各機械均等配分

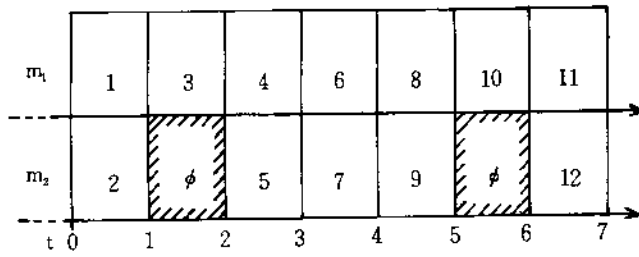
[附表 2] 檢證 3 의 例題 Muntz-Coffman 알고리즘 適用 ($m=2$ 의 경우)



(a) 作業工程網, 번호부여 및 同時作業區間

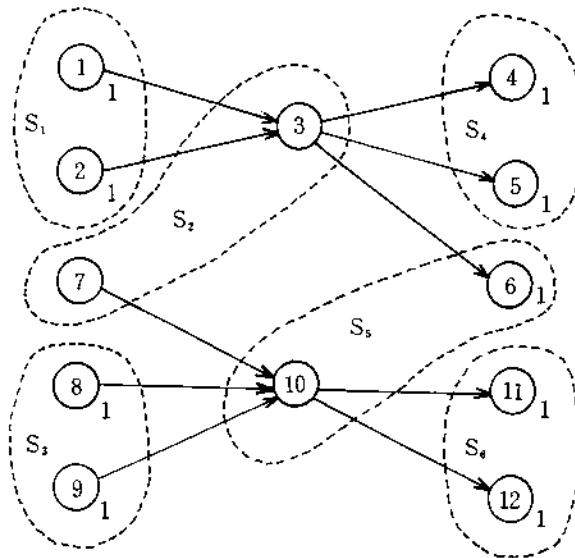


(b) 機械分坦스케줄

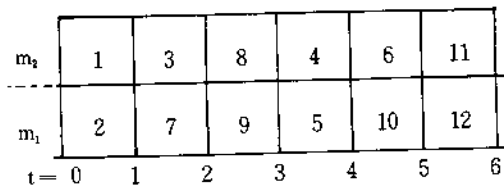


(c) $\rho = 1$ 로 조정된 스케줄

[附表 3] 檢證 3 의 例題를 새 알고리즘으로 스케줄링 ($m=2$ 의 경우)

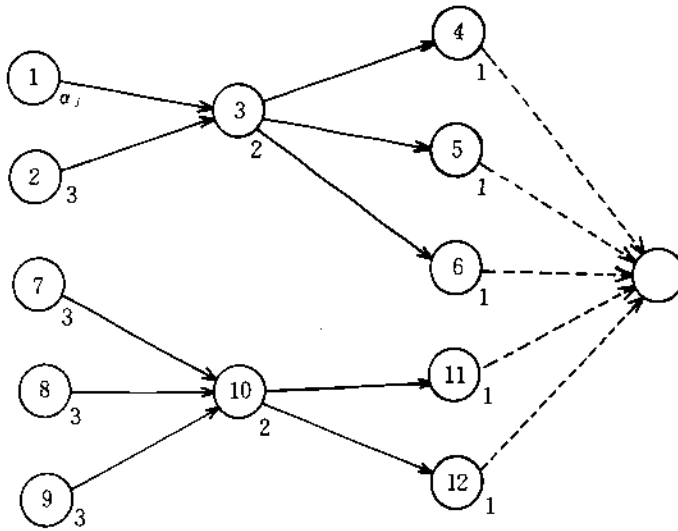


(a) 主工程網作成 및 同時作業群의 zoning



(b) 機械負荷 配定計劃 $M=6, F=3.5$

[附表 4] 檢證 3 의 例題를 Muntz Coffman 알고리즘으로 스케줄링 (m=3 의 경우)



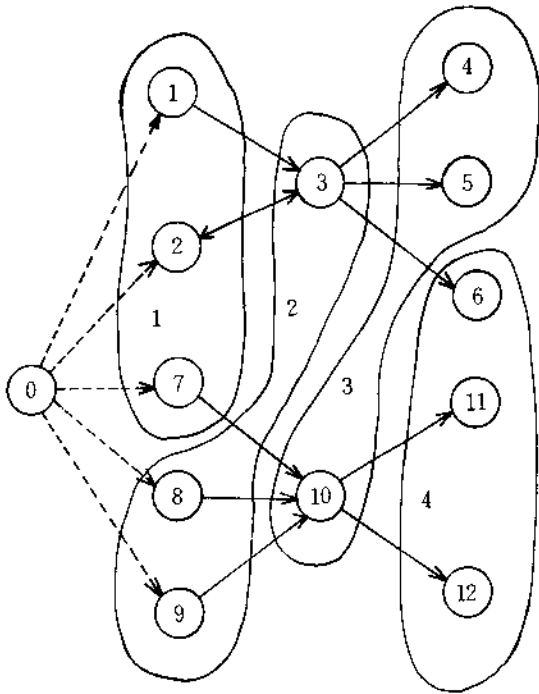
m ₁	1 ρ=3/5	3	4 ρ=3/5	→
	2 ρ=2/5		5 ρ=3/5	
m ₂	7 ρ=3/5	10	6 ρ=3/5	→
	8 ρ=3/5		11 ρ=3/5	
m ₃	9 ρ=3/5	φ	12 ρ=3/5	→
t	0	1 2/3	2 2/3	4 1/3

(b) 理論的 作業配定

m ₁	1	8	3	4	→	
	2	9	10	5		
m ₂					→	
	7	φ	φ	6		φ
t	0	1	2	3	4	5

(c) 實際可能한 作業配定

[附表 5] 檢證 3 的 例題를 새 알고리즘으로 스케줄링 ($m=3$ 的 경우)



(a) 主工程網과 同時作業群 zoning

m_1	1	3	4	6	→
m_2	2	8	5	11	→
m_3	7	9	10	12	→
t	0	1	2	3	4

(b) 作業配定計劃

References

- McNaughton, R. "Scheduling with Deadlines and Loss Functions," *Management Science*, Vol. 6, No. 1 (October, 1959).
- Hu, T. C. "Parallel Sequencing and Assembly Line Problems," *Operations Research*, Vol. 9, No. 6 (November, 1961).
- Muntz, R. R., and Coffman, E. G., "Optimal Preemptive Scheduling on Two-Processor Systems," *IEEE Transactions on Computers*, Vol. 18, No. 11 (November, 1969).
- Kedia, S. K. "A Job Shop Scheduling Problem with Parallel Machines," Unpublished Report, Department of Industrial Engineering, University of Michigan, 1970.
- Baker, K. R., and Merten, A. G. "Scheduling with Parallel Processors and Linear Delay Costs," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 20, No. 4 (December, 1973).
- Eastman, W. L., Even, S., and Isaacs, I. M. "Bounds for the Optimal Scheduling of n Jobs on M Processors," *Management Science*, Vol. 11, No. 2 (November, 1964).
- Baker, K. R., *Introduction to Sequencing and Scheduling*, John Wiley & Sons Inc. 1974.
- Conway, R. W., Maxwell W. L. and Miller, L. W., *Theory of Scheduling*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967.
- Muntz, R. R., and Coffman, E. "Preemptive Scheduling of Real-Time Tasks on Multiprocessor Systems," *Journal of the ACM*, Vol. 17, No. 2 (April, 1970).
- Buffa, Elwoods S, pp. 203~208, *Modern Production/ Operation Management 7/e*, John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- Wiest, J. D. and F. K. Levy, *A Management Guide to PERT/ CPM* (2nd ed) Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1977.