〈研究論文〉

Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 13, No. 2, Dec. 1987

利子率을 고려한 部分 負在庫 在庫 模型에 관한 연구

(An Inventory Policy for Partial Backorders Case with Interest Rate)

김 재 완*
오 세 호**

Abstract

In this paper, a deterministic EOQ model with interest rate in which a proportion (β) of the demand is backlogged and the rest ($1-\beta$) is lost. The optimal order quantity is derived and the corresponding average cost is obtained. Sensitivity analysis is performed to see the influence of interest rate on the optimal order quantity and the average cost. Finally a numerical example is given in which optimum quantities of the model developed in this study and those of the conventional EOQ model are compared.

1. 서 론

재고의 통제와 유지는 어떠한 경제분분의 組織에서도 공통적으로 중요한 문제가 된다. 따라서 영리단체 뿐만 아니라 비영리 단체에서도 재고관리를 중요한 과제로 다루고 있다. 일반적으로 재고보유의 필요성은 재화나 용역을 제공하는 측과 제공받는 측사이의 시간적 공간적 차이 때문에 생긴다. 즉 재고는 제품의 원료 구입에서 생산 및 판매에 이르는 경제활동의 제단계를 거치는 동안 수요와 공급의 불확실성에 대비하기 위해 존재한다. 그렇지만 과다한 재고는 기회손실을 뜻하기 때문에 재고자산의 효율적인 관리는 매우 중요한 것이다. 따라서 자원의 효율적 활용과 자본생산성 提高에 대한 압력은 의사결정과정에서 재고관리의 비중을 높이게 한다.

본 연구에서는 재고모형에 있어서 가장 기본이 되는 확정적 모형에 속하는 정량발주체제를 바탕으로 최적 재고정책을 도출하고, 이자율을 고려한 부분 부재고 재고모형으로 확장시켜 최적결정변수를 구함으로써 보다 현실적이고 일반화한 재고모형을 도출하였다.

K.S. Park는 기존의 경제적발주량(EOQ)모형에 제한조건을 첨가하여 최적해를 구하였다. 즉 외상매입금정책이 재고체계 운용비용과 EOQ 모형에 어떻게 영향을 미치는가를 보여주고 있다. 재고투자의 비용함수인 현재 가치를 최소화하는 재고 정책을 유도하였다. [5] 현금할인 혜

* 청주대학교 산업대학원 산업공학과
** 청주대학교 이공대학 산업공학과

택을 활용하는가 혹은 외상매입을 하는가에 대한 최적의사결정규칙을 도출하였는데 현금만 있는 극단적인 경우에는 통상의 EOQ공식으로 환원됨을 보여주고 있다. 앞에서 언급한 정량발주체계는 재고부족이 허용되지 않는 모형을 취급했으나 본 연구에서는 재고부족이 허용되는 경우를 고려하여 모형을 세우고 최적결정변수(Optimal decision variables) 값들을 계산하였다.

부재고(backorder)의 상황에서는 재고가 고갈되어도 판매를 유실(lost)하지 않는 경우이며 고객은 未決주문이 도착할 때까지 기다려서 이로부터 공급받게 된다. 이 모형은 품절상황에 대한 고객의 다양한 반응에서 착안되었다. 부재고를 유발하는데 따른 관련비용이 없다면 재고는 유지되지 않을 것이다. 또한 본 연구는 품절기간중 수요의 일부는 부재고가 되고 나머지 일부는 유실(lost)되는 일반적인 상황을 고려하였기 때문에 부족기간중의 전 수요가 부재고 되든지 아니면 부족기간중의 전수요가 유실되는 확정적 부분 부재고 모형은 모수값에 따른 특수한 경우로 기존모형과 일치함을 알 수 있다.

2. 이자율을 고려한 부분 부재고 재고모형

2－1. 모형의 가정

1) 먼저 一階(single-echelon), 단일품목인 경우
2) 단위시간당 수요율은 알려져 있고 일정하다.
3) 자체 생산은 없고 구입하는 경우이다.
4) 재고부족(backorder)은 허용된다.
5) 재고조사는 항시 한다.
6) 재고능력(창고능력)에 제한이 없다.
7) 여유재고는 허용되지 않는다(여유재고=0)
8) 판매가 할인은 없는 것으로 가정한다.
9) 주문비, 가변비는 즉시 지출한다.
10) 초기재고는 0에서 시작한다.

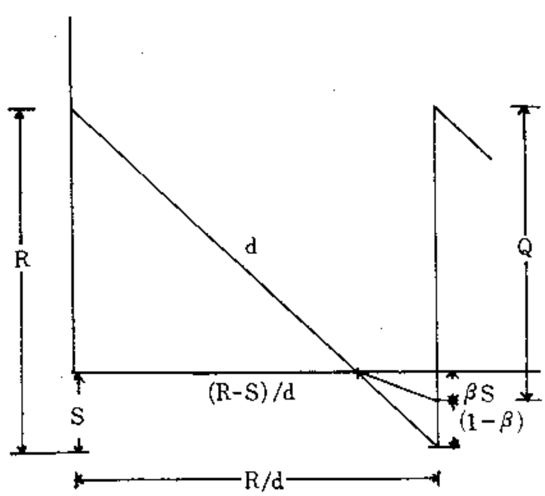
2.2 모형의 기호

부분 부재고 재고모형에서 사용될 기호들은 다음과 같다.

d : 년간수요
R : 주기당 총수요
S : 품절기간중의 주기당 총수요
Q : 발주량
h : 단위당 연간재고유지비용
π : 부재고당 단위시간당 부족비용
P : 유실이윤을 포함한 유실판매 벌과비용
(단($\pi > 0$, $P > 0$)
A : 재고주기당 고정발주비용
r : 년간공칭이자율
P_c : 현재가치비용의 목적함수
AE : 평균 年間비용의 목적함수

2.3 모협의 정립 및 해법

본 연구에서는 품절기간중 수요의 일부는 부재고 되고 나머지 일부는 유실되는 상황에서의 확정적 재고모형에 연속이자율(Continuosu interest rate)을 고려할때 최적결정변수(Optimal decision variables) 값들을 파악하고자 한다. 재고주기당 부재고 되는 총수요는 βS 이고 유실되는 총수요는 $(1-\beta)S$ 이다.



〈그림 1〉 부분 부재고 재고모형의 형태

만일 수요가 포획성이라면 미충족 수요는 완전히 유실된다. 따라서 품절기간중 수요의 일부분 $\beta(0\leq\beta\leq 1)$만이 부재고 되고 나머지 일부 $(1-\beta)$는 유실된다고 가정하는 것이 합리적이다. 이러한 재고모형하에 이자율을 고려할때 재고체계형태의 최적결정변수값들을 찾고 NEWTON-RAPHSON의 연산방법을 이용하여 모형의 해법을 찾고자 한다. 시점 $t=0$에서의 비용구성은 재고유지비 품절(부족) 비용 유실판매비용 등으로 구성된다. 품절비용은 통상확인하기 힘든 비용이다. 품절비용은 부재고 (back-order) 혹은 유실판매 (lost sale)때문이며 이는 단위당, 품절당 혹은 다른 기반에 의해서 선정된다. 따라서 〈그림 1〉은 t의 시점에 따라 다음의 두가지 경우가 발생한다.

즉 $(0\leq t\leq\frac{R-S}{d})$에서는 재고유지비용이 발생하고 $(\frac{R-S}{d}\leq t\leq\frac{R}{d})$에서는 부재고비용과 유실판매 벌과비용이 발생한다. 이 두가지경우를 고려한 단위기간당 총비용은 다음식으로 주어진다.

주기당 총비용=주문비+재고유지비용+부재고비용+유실판매 벌과비용

1주기 동안의 비용에 대한 현재가치(주기초)의 비용함수는 다음과 같다.

$$P_c(R,\ S)=A+\int_0^{\frac{R-S}{d}}\exp(-rt)h[(R-S)-dt]\,dt+\int_{\frac{R-S}{d}}^{\frac{R}{d}}\pi\beta\exp(-rt)\ [(S-R)+dt]\,dt+\int_{\frac{R-S}{d}}^{\frac{R}{d}}Pd\exp(-rt)\ (1-\beta)dt$$

$$P_c(R,\ S)=A+\frac{h(R-S)r-hd[1-\exp(-\frac{R-S}{d}r)]}{r^2}+\frac{\pi\beta d\exp(-\frac{R-S}{d}r)-\pi\beta d\exp(-\frac{R}{d}r)-\pi\beta rS\exp(-\frac{R}{d}r)}{r^2}+\frac{pd(1-\beta)\exp(-\frac{R-S}{d}r)-pd(1-\beta)\exp(-\frac{R}{d}r)}{r}\quad(2-1)$$

참고로 식(2-1)에서 $r=0$으로 두면 기존의 비용 함수식과 일치함을 볼 수 있다.[1]

즉

$$\lim_{r\to 0}\left\{\frac{h(R-S)r-hd[1-\exp(-\frac{R-S}{d}r)]}{r^2}+\frac{\pi\beta d\exp(-\frac{R-S}{d}r)-\pi\beta d\exp(-\frac{R}{d}r)-\pi\beta rs\exp(-\frac{R}{d}r)}{r^2}+\frac{pd(1-\beta)\exp(-\frac{R-S}{d}r)-pd(1-\beta)\exp(-\frac{R}{d}r)}{r}\right\}$$

$$=\frac{h(R-S)^2}{2d}+\frac{\pi\beta S^2}{2d}+P(1-\beta)S$$

또한 평균 년간비용함수를 구하기 위해 식(2-1)에 년간동가계수

$AE=P_c\{\frac{\exp(r)-1}{1-\exp(\frac{R}{d}r)}\}$를 모든 비용에

곱하면 다음과 같은 평균년간 비용함수 AE(R, S)가 얻어진다.

$$AE(R,S)=A+\frac{h\{r(R-S)-d[1-\exp(-\frac{R-S}{d}r)]\}}{r^2}$$

$$+\frac{\pi\beta[d\exp(-\frac{R-S}{d}r)-d\exp(-\frac{R}{d}r)-Sr\exp(-\frac{R}{d}r)]}{r^2}$$

$$+\frac{pd(1-\beta)\ [\exp(-\frac{R-S}{d}r)-\exp(-\frac{R}{d}r)]}{r}$$

$$\{\frac{[\exp(r)-1]}{1-\exp(-\frac{R}{d}r)}\} \qquad (2-2)$$

이 평균년간 비용함수 AE(R, S)을 최소화하는 (R*, S*)는 다음의 조건을 만족한다.

$$\frac{\partial AE(R,S)}{\partial R}=\frac{-A[\exp(r)-1]\frac{r}{d}\exp(-\frac{R}{d})r}{[1-\exp(-\frac{R}{d}r)]^2}$$

$$+\frac{h[\exp(r)-1]\ [1-\exp(-\frac{R-S}{d}r)-\frac{r}{d}(R-S)\exp(-\frac{R}{d}r)]}{r[1-\exp(-\frac{R}{d}r)]^2}$$

$$+\frac{\pi\beta[\exp(r)-1]\ [-\exp(-\frac{R-S}{d}r)+\exp(-\frac{R}{d}r)+\frac{Sr}{d}\exp(-\frac{R}{d}r)}{r[1-\exp(-\frac{R}{d}r)]^2}$$

$$+\frac{P(1-\beta)\ [\exp(r)-1]\ [\exp(-\frac{R}{d}r)-\exp(-\frac{R-S}{d}r)]}{[1-\exp(-\frac{R}{d}r)]^2}=0 \qquad (2-3)$$

$$\frac{\partial AE(R,S)}{\partial S}=\frac{h[\exp(r)-1]\ [\exp(-\frac{R-S}{d}r)-1]}{r[1-\exp(-\frac{R}{d}r)]}$$

$$+\frac{\pi\beta[\exp(r)-1]\ [\exp(-\frac{R-S}{d}r)-\exp(-\frac{R}{d}r)]}{r[1-\exp(-\frac{R}{d}r)]}$$

$$+\frac{P(1-\beta)\ [\exp(r)-1]\ [\exp(-\frac{R-S}{d}r)]}{[1-\exp(-\frac{R}{d}r)]}$$

$$=0 \qquad (2-4)$$

식(2 − 3), (2 − 4)를 정리하면 다음과 같이 표시된다.

$$-\frac{Ar^2}{d}\exp(-\frac{R}{d}r)+h\{[1-\exp(-\frac{R-S}{d}r)]-\frac{r}{d}(R-S)\exp(-\frac{R}{d}r)\}$$

$$+\pi\beta[-\exp(\frac{R-S}{d}r)+\exp(-\frac{R}{d}r)+\frac{Sr}{d}\exp(-\frac{R}{d}r)]$$

$$+rp(1-\beta)\ [-\exp(-\frac{R-S}{d}r)+\exp(-\frac{R}{d}r)]=0 \qquad (2-5)$$

$$h[\exp(-\frac{R-S}{d}r)-1]+\pi\beta[\exp(\frac{R-S}{d}r)-\exp(-\frac{R}{d}r)]$$

$$+rp(1-\beta)\ \exp(-\frac{R-S}{d}r)=0 \qquad (2-6)$$

두개의 결과식을 연립으로 풀면 R와 S에 대한 해를 구할 수 있다. 먼저 주기당 총수요(R)의 최적치(R*)을 구하기 위해서

식(2 − 6)을 식(2 − 5)에 대입하면

$$-\frac{Ar^2}{d}\exp(-\frac{R}{d}r)-\frac{hr}{d}(R-S)\exp(-\frac{R}{d}r)+$$

$$+\frac{\pi\beta Sr}{d}\exp(-\frac{R}{d}r)+rp(1-\beta)\exp(-\frac{R}{d}r)=0$$

$$(2-7)$$

을 얻고 따라서

$$R^{*}=\frac{-Ar+(1-\beta)pd+(h+\pi\beta)S^{*}}{h} \text{ 가 된다} \qquad (2-8)$$

한편 품절기간당 총수요(S)를 구하기 위해서 식(2－8)의 결과치를 식(2－6)에 대입하면 다음과 같은 수식을 얻는다.

$$h+\pi\beta+rp(1-\beta)=h\exp\left\{\frac{[-Ar+(1-\beta)pd]r}{hd}\right\}\times$$

$$\exp\left(\frac{\pi\beta r}{hd}S^{*}\right)+\pi\beta\exp\left(-\frac{r}{d}S^{*}\right) \qquad (2-9)$$

결국 식(2－8)과 (2－9)에서 부터 최적해 R^*, S^*가 구해진다. 여기서 S^*는 NEWTON-RAPHSON의 연산방법을 이용하여 구할 수 있다. 그러므로 주기당 총수요의 최적치(R^*)와 품절기간당 총수요의 최적치(S^*)가 결정되면 최적발주량은 다음과 같이 쉽게 얻어진다.

최적발주량은 : $Q^*=R^*-(1-\beta)S^*$가 된다.

참고로 식(2－3)과 식(2－4)에서 $r=0$으로 두면 기존의 비용함수식과 일치함을 볼 수 있다.[1]

먼저 식(2－3)은

$$\lim_{r\to 0}\left\{\frac{-A[\exp(r)-1]\frac{r}{d}\exp\left(-\frac{R}{d}r\right)}{\left[1-\exp\left(-\frac{R}{d}r\right)\right]^{2}}\right.$$

$$+\frac{h[\exp(r)-1]\left[1-\exp\left(-\frac{R-S}{d}r\right)-\frac{r}{d}(R-S)\right]\exp\left(-\frac{R}{d}r\right)}{r\left[1-\exp\left(-\frac{R}{d}r\right)\right]^{2}}$$

$$+\frac{\pi\beta[\exp(r)-1]\left[-\exp\left(-\frac{R-S}{d}r\right)+\exp\left(-\frac{R}{d}r\right)+\frac{Sr}{d}\exp\left(-\frac{R}{d}r\right)\right]}{r\left[1-\exp\left(-\frac{R}{d}r\right)\right]^{2}}$$

$$\left.+\frac{P(1-\beta)[\exp(r)-1]\left[\exp\left(-\frac{R}{d}r\right)-\exp\left(-\frac{R-S}{d}r\right)\right]}{\left[1-\exp\left(-\frac{R}{d}r\right)\right]^{2}}\right\}$$

$$=\frac{Ad}{R^{2}}+\frac{1}{R}h(R-S)-\frac{1}{2R^{2}}h(R-S)^{2}-\frac{\pi\beta S^{2}}{2R^{2}}-\frac{Pd(1-\beta)S}{R^{2}} \qquad (2-11)$$

이고 또한 식(2－4)은

$$\lim_{r\to 0}\left\{\frac{h(\exp(r)-1]\left[\exp\left(-\frac{R-S}{d}r\right)-1\right]}{r\left[1-\exp\left(-\frac{R}{d}r\right)\right]}\right.$$

$$+\frac{\pi\beta[\exp(r)-1]\left[\exp\left(-\frac{R-S}{d}r\right)-\exp\left(-\frac{R}{d}r\right)\right]}{r\left[1-\exp\left(-\frac{R}{r}r\right)\right]}$$

$$\left.+\frac{P(1-\beta)[\exp(r)-1]\left[\exp\left(-\frac{R-S}{d}r\right)\right]}{\left[1-\exp\left(-\frac{R}{d}r\right)\right]}\right\}$$

$$=-\frac{1}{R}h(R-S)+\frac{1}{R}\pi\beta S+\frac{1}{R}Pd(1-\beta) \text{ 가 된다.} \qquad (2-12)$$

그러므로 식(2－3)과 식(2－4)의 결과식에 $r=0$으로 두면 식(2－11 과 식(2－12)이 원식의 비용함수식과 일치함을 볼 수 있다.[1,5]

2.4 예제 및 민감도 분석

본 절에서는 부분 부재고 재고체계에서 구한 최적결정변수들과 평균 년간비용 등에 이자율이 어떻게 영향을 주고 있는지에 대해 민감도분석을 수행하고 이자율을 고려하지 않을때의 결과들과 비교하고자 한다. 예로써 다음과 같은 품목의 재고정책을 생각해 보자.

d =200단위 / 년　　P = 0.2萬 / 유실단위

h =0.3萬 / 년　　π =부재고당 0.1萬/년

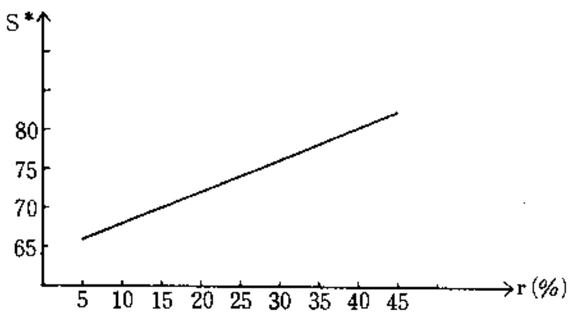
A = 5萬 / 주문

〈표 2 - 1〉 이자율이 변할때 최적해의 값

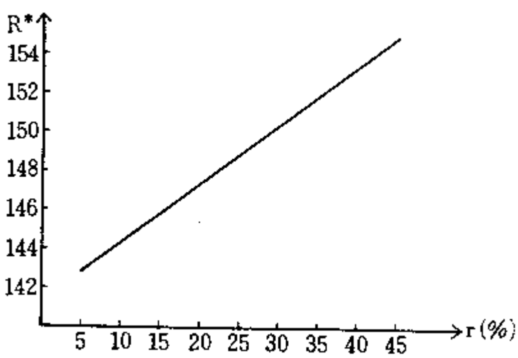
optimal \ r	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
S*	66.1	68.1	70.1	72.1	0.25	0.3	78.1	80.1	82.1
R*	142.9	144.4	145.9	147.4	148.9	150.4	151.9	153.4	154.9
Q*	109.9	110.4	110.9	114.4	111.9	112.4	112.9	113.4	113.9
A(S*, R*)	23.9萬	24.6萬	25.4萬	26.1萬	26.9萬	27.8萬	28.6萬	29.5萬	30.4萬

여기서 이자율(interest rate : r)을 0으로 두고 $\beta=0$ 즉 미충족 수요가 전부 유실되는 것으로 보면 이 문제는 기본적인 EOQ 문제로 환원된다. 따라서 Q*=R*=82단위이다. 이 결과는 Hadley and Whitin의 결과치와 일치한다.[3] 모든 모수들을 고정시키고 $\beta=0.5$, 즉 미충족 수요의 반은 다음번 積送으로부터 충당된다고 가정하고 이자율을 변화시키면 〈표 2 -1〉와 같은 결과가 얻어진다

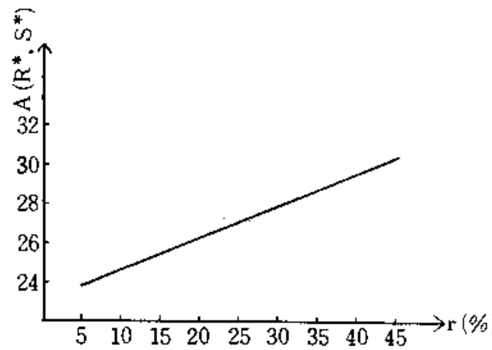
이자율이 변할때 품절기간당 총수요(S*)와 주기당총수요(R*), 연간평균비용, AE(R*, S*)에 미치는 영향을 도표로써 나타내면 다음과 같다.



〈그림 2〉 이자율이 변할때 품절기간당총수요(S*)에 미치는 영향



〈그림 3〉 이자율이 변할때 주기당총수요(R*)에 미치는 영향



〈그림 4〉 이자율이 변할때 평균년간 총비용에 미치는 영향

〈표 2 - 1〉은 부분 부재고 재고모형에 r의 여러값에 대한 최적운용정책을 보여준다. r가 증가함에 따라 S*와 R*는 일정한 간격으로 증가하고 최소 년간평균비용은 완만히 증가하는 것을 볼 수 있다. 또한 모수에 따른 민감도분석 결과 재고유지비와 주문비가 이자율의 변화에 대단히 민감하게 나타나고 있다. 한편 이자율을 고려하지않고 일부의 수요가 반은 부재가 되고 나머지 일부는 유실되는 경우와 수요가 거의 ($\beta=0.9$) 유실될때의 부재고 분수β의 민감도 분석은 아래 표와 같다.

〈표 2 - 2〉 β의 민감도

optimal \ β	0	0.5	0.9	1
S*	0	64	119	122
R*	82	141	168	163
Q*	82	109	156	163
A(R*, S*)	24.5萬	23.2國	14.7萬	12.2萬

만약 실질이자율이 20%인데도 불구하고 이자

율을 무시한채 재고정책을 결정한다면 이때의 의사결정은 〈표 2 - 2〉로부터 ($S^*=64$ $R^*=141$ $Q^*=109$ $\beta=0.5$)이다. 평균년간비용 A(R^* S^*)은 26.144萬이다. 이때 매주기에 109단위를 주문하고 누적품전량 64단위에 이를때 보충재고가 도착하도록 재발주점을 선정하게 된다. 실질이율이 20%일때의 최적의사결정은 〈표 2 - 1〉에서 ($S^*=72.1$, $R^*=147.4$, $Q^*=111.4$) 이고 평균년간비용 A(R^*, S^*)=26.1萬이다. 따라서 잘못된 이자율을 사용한 경우 최적 결정변수 S^* R^*값은 큰차이가 있으나 목적함수 자체가 결정변수 S, R, Q에 민감하지 않기 때문에 년간평균비용은 별차이가 없음을 알 수 있다. 한편 부분 부재고 재고모형에서 품절기간 중 전수요가 거의 유실($\beta=0.9$) 된다고 가정하자. 이자율은 실제 20%임에도 불구하고 잘못으로 이자율을 고려하지 않을 때와의 최적해를 비교해보면 다음과 같은 결과를 얻는다.

1) 이자율을 고려하지 않을때의 최적해는 다음과 같다.

$S^*=119$

$R^*=168$

$Q^*=156$

A(R^*, S^*)= 14.7萬

2) 이자율을 고려할때 최적해는 다음과 같다. ($r=20\%$)

$S^*=123.8$

$R^*=170.9$

$Q^*=158.5$

A(R^*, S^*)=16.8萬

따라서 적절한 의사결정을 사용하지 못한 것이 이 한품목에 대해서 평균년간비용 (16.8－14.7) =2.1萬의 비용차가 나타나므로 이자율의 틀린 가정은 재고문제의 실용적인 解에 도움이 되지만 재고체계를 운용하는 년간평균비용에는 별차이가 없음을 알 수 있다.

3. 결　론

본 논문에서는 확정적모형인 정량발주체계 (fixed order size system)와 품절기간중 수요의 일부는 부재고 되고 나머지 일부는 遺失되는 상황인 부분 부재고 재고모형에서 이자율을 고려할때 재고모형을 설정하여 최적결정변수들을 구하였다. 또한 이자율 부분 부재고 비율등의 값의 변화가 최적해에 미치는 영향을 분석하고 년간총비용의 변화를 추적해 보았다. 이자율의 변화에 따라 총비용이 민감하게 변하는 것으로 나타났고 이러한 값들은 이자율을 고려하지 않았을때의 값들과는 상당한 차이를 보이고 있다. 따라서 본 연구에서 설정한 모형이 보다 현실적이고 일반화한 모형이라 볼 수 있다. 끝으로 다음과 같은 연구과제들을 고려할 수 있을 것이다.

첫째, 본 논문에서는 수요율이 일정한 것으로 가정했으나 이의 변화를 함께 고려함으로써 보다 더 현실에 적합한 모형을 설정할 수 있을 것이다.

둘째, 재고보충이 순간적으로 일어나는 경제적 발주량모형(EOQ) 대신 수요량을 일정한 생산율로 일정한기간 생산하여 충당시키는 (EPQ : Economic Production Quantity) 모형에 이자율을 고려하여 새로운 경제적 생산량모형(EPQ)을 도출할 수 있을 것이다.

참고문헌

1. 박경수, 자재관리 및 재고관리, 구민사, 1986.
2. ______, 경제성공학-공업경제학, 탑출판사, 1979.
3. Hadley, G. and T. Whitin, Analysis of Inventory Systems, Englewood Cliffs N.J. ; Prentice Hall, 1963.
4. Montogomery, D.M. Bazaraa, and A. Keswani, "Inventory Models with a Mixture of Backorders and Lost Sales", Naval Res, Logist. Q., Vol. 20, No. 2, June, 1973.
5. Park, K.S., "EOQ under Trade-credit Financing", International J., Policy and Information, Vol. 13, No. 2, December, 1982.