〈硏究論文〉

Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers Vol. 13, No. 1, June. 1987

수정된 Karmarkar 기법과 이의 효율성†

정 성 진**
이 창 훈**

ABSTRACT

Karmakar suggested two methods to transform the general linear programming into his specially structured linear programming problem. We show that there are bad cases that cause difficulties in the use of Karmakar's methods. We also develop a new transformation method which can handle those difficulties.

1. 서 론

선형계획 문제들은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} &\text{최소화(Min.)} && c^T x \\ &\text{제약조건(Sub. to)} : && Ax = b \\ & && x \geq 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

이러한 선형계획을 효율적으로 푸는 기법은 심플렉스기법이다. 이 기법은 경험적 분석(empirical analysis) 및 평균적분석(average analysis)에 의하면, 문제 크기의 다항식으로 나타나는 계산단계가 필요하다고 발표되었으나 [3], 최악상황 분석(worst case analysis)을 할 경우 문제크기의 지수함수로 나타나는 계산과정이 요구된다는 것이 발표되었다[2, 6].

최근에 발표된 Karmarkar의 기법[4]은 Khachian[5]이 제시한 Ellipsoid 기법과 같이 문제크기의 다항식의 계산단계를 갖고 있으며, Ellipsoid 기법보다 computer 적용성과 실용적인 효율성에 있어 우월한 장점을 가지고있다[9].

그러나 Karmarkar 기법은 다음의 특별한 형태의 선형계획을 푸는 기법이다. 즉

$$\begin{aligned} &\text{Min} && c^T x \\ &\text{Sub. to} : && Ax = 0 \\ & && e^T x = 1 \\ & && x \geq 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

위에서 $e^T = (1, \ldots, 1)$이다. 또 Karmarkar의 기법을 위의 문제(2)에 적용하려면 다음의 가정들이 필요하다.

가정 1 : $(1/n)\,e$가 문제(2)의 가능해이다.

가정 2 : 문제(2)의 최적해의 목적함수의 값이 0이다.

따라서 일반 선형계획문제－문제(1)－를 Karmarkar가 제시한 특별한 형태의 선형계획문

---

† 본 연구는 1986년도 문교부 학술연구조성비 지원에 의해 수행되었음.

** 서울대학교 공과대학

제 - 문제(2)와 가정 (1)(2) - 로의 변환에 있어 몇가지의 단점들이 지적된다. 본 논문에서는 Karmarkar가 제시한 big-M 기법이나 투영변환을 사용할 경우 나타날 수 있는 문제점을 추출하였고, 이러한 문제점을 해결하는 새로운 기법이 제시되었다.

2. Karmarkar 기법

Karmarkar 기법은 다음의 특별한 선형계획을 푸는 기법이다.

즉

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c^T x \\ \text{Sub. to} \quad & Ax = 0 \\ & e^T x = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

위에서 $e^T = (1, \cdots, 1)$이다. Karmarkar 기법을 문제(2)에 적용하려면 다음의 가정이 필요하다.

가정 1 : $(1/n)e$는 문제(2)의 가능해이다.

가정 2 : x^*을 최적해라 할때 $c^T x^* = 0$이다.

일반적으로 Karmarkar 기법도 심플렉스 기법과 같이 2국면(Two Phase)의 과정이 필요하다. 제1국면은 가능해를 구하는 가능문제 단계이고, 제2국면은 그 가능해를 시작점으로 하여 최적해를 구하는 최적화 단계이다.

가능문제(Feasibility problem) 국면은 인공변수 x_{n+1}을 도입하여 $(1/(n+1))e$를 내부 가능해로 만들고 이에 대응하는 열 벡터를 $(-Ae)$로 정의하면 다음의 최적화 문제를 얻는다.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & x_{n+1} \\ \text{Sub. to} \quad & Ax - (Ae)x_{n+1} = 0 \\ & e^T x + x_{n+1} = 1 \\ & x \geq 0, \ x_{n+1} \geq 0 \end{aligned} \tag{2'}$$

문제 (2)의 모든 가능해는 문제(2')의 최적해이며, 만일 문제(2)의 가능해가 존재한다면 문제(2')의 최적해의 목적함수의 값은 0이다.

2.1 Karmarkar 기법

주어진 $d = (d_1, \cdots, d_n)$, $d_i > 0$, $i = 1, \cdots n$, 에 대해 D를, $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$인 대각행렬(diagonal matrix)라 하자.

단계 0. (시작점)

$x^0 = (1/n)e$, $k = 0$

단계 1. (종결조건)

$c^T x^k = 0$이거나 $k \geq q$ (q는 미리 주어진 값이다). 종결조건을 만족시키지 못하면 단계 2로 간다.

단계 2. (계산단계)

$d = x^k$, $D = \text{diag}\{d_1, \cdots, d_n\}$이라 하고 다음의 계산단계를 거친다.

1. $B = \begin{bmatrix} AD \\ e^T \end{bmatrix}$
2. $c_P = [I - B^T(BB^T)^{-1}B]Dc$
3. $\bar{c} = c_P / |c_P|$
4. $b = (1/n)e - \alpha r \bar{c}$, $\alpha = \frac{1}{4}$, $r^2 = 1/(n(n-1))$
5. $k = k+1$, $x^k = Db/e^T Db$

단계 1로 간다.

단계 2가 Karmarkar 기법의 요체이다. 문제(2)의 현재해가 $d = x^k > 0$이고 D을 대응하는 대각선 행렬이라 할때 $y = D^{-1}x/e^T D^{-1}x$, $x = Dy/e^T Dy$라 정의하면 문제(2)는 다음의 문제로 변환한다.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c^T Dy / e^T Dy \\ \text{Sub. to} \quad & ADy = 0 \\ & e^T y = 1, \\ & y \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

그러나 위의 문제는 선형계획이 아닌 분수선형계획(Fractional Linear Programming) 문제이다. Karmarkar는 최적해 목적함수의 값이 0이라는 가정하에 분수선형의 목적함수를 $c^T Dy$로 변환하여 아래의 선형계획으로 근사(approximation) 하였다.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c^T Dy \\ \text{Sub. to} \quad & ADy = 0 \\ & e^T y = 1 \\ & y \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

따라서 가정(2)가 필요한 것이다. 그러나 일반적으로 3.4.4에서 상술할 바와 같이, 문제(3)의 최적해의 목적함수의 값이 0이 아니면 문제(3)과 문제(4)의 최적해가 다른 경우도 존

재한다.

이러한 경우 Karmakar 기법은 q만큼의 계산 과정후에 $c^T x^* > 0$ 이라는 사실만을 증명하며 x^q 가 최적해의 근처에 있다는 보장은 할 수 없다. 이러한 단점을 보강하려고 Karmarkar는 "sliding objective function" 기법을 제시하였다. 그러나 이기법은 비선형 계획에서 나오는 불확실성 구간(Interval of uncertainty)의 구간을, 선형계획문제의 크기를 L이라 할때, $2^{-0(L)}$의 크기로 줄여야 하는 문제점이 있다. 이러한 문제점을 보완하려는 연구가 Todd와 Burrell [8] 및 Anstreicher [1] 등에 의해 시도되었다. Todd와 Burrell은 최적해의 목적함수의 값을추정하는 Karmarkar 기법과 달리 쌍대 관계를 이용하여 목적함수의 값의 하한을 제시하는 기법을 제시하였고, Anstreicher도 이와 유사한 기법을 제시하였다. 또한 Megidd [7]는 Karmarkar의 개념을 일반선형계획 : Min cx : $Ax \geq b$ $x \geq 0$의 내부가능해 x $(Ax > b,\ x > 0)$에 확대·적용을 시도하였다.

3. Karmarkar 형태로의 변환

일반적 형태의 선형계획 문제(1)을 Karmarkar의 기법을 적용하기위한 특별한 형태의 문제(2)로의 변환에 있어, Karmarkar는 다음의 두가지 방법을 제시하였다.

3.1 Big-M 기법

L을 선형계획문제의 크기, $M = 2^{0(L)}$라 할때

$$\sum_i x_i \leq M$$

인 가상부등식을 문제(1)에 추가한다. 여유 변수를 x_{n+1}이라하면 다음의 선형계획이 된다.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c^T x \\ \text{Sub. to} \quad & Ax = b \\ & e^T x + x_{n+1} = M \\ & x \geq 0 \quad x_{n+1} \geq 0 \end{aligned}$$

$y = (1/M)\,x$로 정의하고, $e^T y + y_{n+1} = 1$을 이용하여 $AMy = b$로 동차등식(homogeneous equations)으로 변환하면 다음의 선형계획을 얻는다.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & (1/M)\ c^T y \\ \text{Sub. to} \quad & (MA_i. - b_i e^T)\, y - b_i y_{n+1} = 0 \\ & \qquad i = 1, \cdots, m \\ & e^T y + y_{n+1} = 1 \\ & y \geq 0 \quad y_{n+1} \geq 0 \end{aligned}$$

Big-M 기법의 단점은 변환된 문제의 행렬 A가 M값을 포함하고, 목적함수의 계수 및 y_{n+1}의 열벡터의 계수들의 크기와 현격한 차이를 갖게되므로, 컴퓨터적용시 수치 해석적인 오차등으로 인하여 계산상의 어려움이 따르는 것이다. 만일 실제적으로 M값을 극소화시킬 수 있다면 위의 단점을 제거할 수 있으나, 일반형의 선형계획에서는 그러한 M의 값을 구하는것은 선형계획을 푸는것과 대등한 계산상의 복잡성을 갖고 있다.

3.2 투영변환

$R_+ = \{x \in R^n : x \geq 0\}$ 라 하고

$S^n = \{x \in R^n : e^T x = 1,\ x \geq 0\}$.

이때 S^n은 R^n상의 $(n-1)$차원의 심플렉스이다.

3.2.1 가능문제의 변환

일반 선형계획 문제(1)의 가능문제는 문제(1)의 가능해를 구하는 문제이다. Karmarkar는 다음의 투영변환을 제시하였다.

$y_j = x_j / (e^T x + 1)$, $j = 1, \cdots, n$

$y_{n+1} = 1 - e^T y$라 정의하면

$x_j = y_j / y_{n+1}$, $j = 1, \cdots, n$ 가 된다.

따라서 가능문제 : $Ax = b$, $x \geq 0$는 다음의 Karmarkar 형태의 가능문제로 변환된다.

$$Ay - by_{n+1} = 0,\quad y \in S^{n+1} \tag{5}$$

위에서 제시된 투영변환은 R^n_+를 S^{n+1}로 투영하며 e를 S_{n+1}의 중심인 $e/(n+1)$로 투영함을 보여준다.

위의 가능문제는 § 2의 가능해 과정과 마찬가지로 인공변수 y_{n+2}와 이에 대응하는 가상 열벡터를 도입하여 다음의 최적화 선형계획으로 변환하여 푼다.

$$\text{Min} \quad y_{n+2}$$

$$\text{Sub. to } Ay - by_{n+1} - (Ae - b)\, y_{n+2} = 0 \qquad (6)$$

$$y \in S^{n+2}$$

위에서 $e/(n+2)$ 는 S^{n+2} 의 중심점이며 가능해이다.

3. 2. 2 가능문제 투영변환의 문제점

문제 (6)의 최적해를 $(\bar{y},\ \bar{y}_{n+1},\ \bar{y}_{n+2})$ 라 하면, 다음의 세가지의 경우가 발생된다.

경우 1 : $\bar{y}_{n+2} > 0$.

문제 (1)의 가능해는 존재하지 않는다.

경우 2 : $\bar{y}_{n+2} = 0$ 이고 $\bar{y}_{n+1} > 0$.

$\bar{x} = \bar{y}/\bar{y}_{n+1}$ 로 정의하면 $\bar{x}$는 문제 (1)의 가능해이다.

경우 3 : $\bar{y}_{n+2} = 0$ 이고 $\bar{y}_{n+1} = 0$.

이 경우에는 $\bar{y}$가 문제 (1)의 extreme homogeneous 해이다.

그러나 선형계획문제의 동차해는, 원문제의 해에 관하여 효율적인 정보를 제시하지 못하는 것으로 알려져 있다. 즉 경우 3이 발생할 경우, Karmarkar 가 제시한 기법은 문제 (1)의 가능해에 아무런 해결책을 주지 못한다.

이에 대한 예로써, 다음의 보기는 경우3에서 문제 (1)의 가능해가 존재하는 경우와 존재하지 않는 경우가 생길 수 있는 것을 보여준다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$b^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

라 정의하면 $Ax = b^1$ 일때는 문제 (1)의 가능해는 존재하지 않으며, $Ax = b^2$ 일때는 $(1, 1, 1, 1)$ 이 가능해이다. Karmarkar 가 제시한 투영변환 후 인공변수 y_6을 도입하면 다음의 최적화 문제가 된다.

$$\text{Min} \quad y_6$$

$$Ay - b^t y_5 - (Ae - b^t)\, y_6 = 0$$

$$y \in S^6 \quad t = 1, 2$$

여기서 만일 최적해 $\bar{y}$가 $y = (1/3)(1, 1, 1, 0, 0, 0)$ 로 주어지면 b의 값에 관련없이 $\bar{y}$가 최적해임을 알 수 있다. Karmarkar 가 제시한 투영변환은 이러한 문제점을 갖고 있다.

일반적으로 무한 가능해 집합 K에서 homogeneous 해를 제거하려면 K의 꼭지점을 모두 포함할 수 있는 부등식(예를 들면 $\sum x_i \leq M$)의 첨가가 필요하나, 이의 첨가는 big-M 기법과 대등한 문제가 된다.

3. 2. 3 최적화문제의 변환

$d > 0$ 가 문제 (1)의 가능해이고, D를 d로 만든 대각행렬이라 하자.

$$y_j = (x_j / d_j) \,/\, (e^T D^{-1} x + 1), \quad j = 1, \cdots, n$$

$$y_{n+1} = 1 - e^T y$$

로 정의하면 $x = Dy / y_{n+1}$ 가 된다.

따라서 최적화 문제 (1)은 다음의 형태의 문제로 변환된다.

$$\text{Min} \quad c^T Dy / y_{n+1}$$

$$\text{Sub. to } ADy - by_{n+1} = 0 \qquad (7)$$

$$y \in S^{n+1}$$

문제 (7)은 선형계획 문제가 아닌 분수선형계획(Fractional Linear Programming) 문제이다. 문제 (7)의 목적함수를 $c^T Dy$로 선택하면 Karmarkar 형태의 선형계획이 된다.

$$\text{Min} \quad c^T Dy$$

$$\text{Sub. to } ADy - by_{n+1} = 0 \qquad (8)$$

$$y \in S^{n+1}$$

3. 2. 4 최적화문제의 투영변환시 문제점

§ 2 에서 언급한 것처럼, 문제 (7)을 Karmarkar 가 제시한 문제 (8)의 형태로 근사하여 풀기 위해서는 최적해의 목적함수값, $c^T x^* = 0$ 이어야 한다. $c^T x^* > 0$ 인 경우 문제 (8)의 최적해는 문제 (7)의 최적해가 아닐 경우도 있으며, 극단적인 경우 문제 (8)의 감소가, 문제 (7)에서는증가로 대응되는 경우도 생길 수 있다.

다음의 예를 보자.

$$\text{Min} \quad -16x_1 + 27x_2 = z(x)$$

$$\text{Sub. to} \quad -2x_1 + 3x_2 = 1$$

$$3x_2 - x_3 \qquad = 2 \qquad (9)$$
$$3x_2 \qquad + x_4 = 4$$
$$x_j \geq 0 \ \forall_j$$

여기서 (1, 1, 1, 1) 이 가능해이므로, 이 점을 사용하여 Karmarkar 가 제시한 투영변환 후, 문제 (8) 의 형태로 고치면,

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & -16y_1 + 27y_2 = c(y) \\ \text{Sub. to} \quad & -2y_1 + 3y_2 \qquad\qquad - y_5 = 0 \\ & 3y_2 - y_3 \qquad - 2y_5 = 0 \\ & 3y^2 \qquad + y_4 - 4y_5 = 0 \qquad (10) \\ & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 1 \\ & y_j \geq 0 \quad \forall_j \end{aligned}$$

다음의 (9) 와 (10) 의 가능해, x^i, y^i 들을 고려하자.

$x^1 = (1/2, 2/3, 0, 2)$ $x^2 = (3/2, 4/3, 2, 0)$

$x^3 = (1, 1, 1, 1)$

$y^1 = (1/25)(3, 4, 0, 12, 6)$

$y^2 = (1/35)(9, 8, 12, 0, 6)$

$y^3 = (1/5)(1, 1, 1, 1, 1)$

이때의 목적함수 값은,

$z(x^1) = 10, \quad z(x^2) = 12, \quad z(x^3) = 11$

$z(y^1) = 60/25 \quad z(y^2) = 72/35 \quad z(y^3) = 11/5$

$z(y^i) / y_5 = z(x^i) \quad i = 1, 2, 3$ 으로 주어진다.

그리고 x^i 는 투영변환에 의하여 y^i에 대응된다. 위의 예에서 알 수 있듯이, 문제 (10) 에서의 해가 y^3에서 목적함수가 감소하는 방향인 y^2 로 움직일 때, 문제 (9) 의 해는 목적함수가 증가하는 방향인 x^3에서 x^2로 증가하는 것을 알 수 있다.

그러나, (1, 1, 1, 1) 대신 또 다른 가능해 ($\frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$) 을 사용하여 투영변환하면, 문제 (9) 와 문제 (10) 은 서로 대응하는 최적해를 갖게 된다.

또한 $-2x_1 + 3x_1 = 1$ 을 이용하여 $z'(x) = z(x) - 10(-2x + 3x_1) = 4x_1 - 3x_2$ 로 놓고, 투영 변환하여 풀면 (1, 1, 1, 1) 을 사용하여도 (9)와 (10) 은 서로 대응하는 최적해 x^1, y^1을 갖게 되며, 이것은 Karmarkar 의 가정, $c^T x^* = 0$ 을 만족하기 때문이다.

이와같이, 최적해의 목적함수의 값이 0 이 아닐 경우, 일반선형계획문제 (1) 과 Karmarkar 의 형태문제 (5) 는 서로의 최적해가 대응되지 못하는 경우가 발생할 수 있다는 점에서, 동등한 문제가 되지 못하는 문제를 안고있다.

또한 문제 (1) 의 동차해가 문제 (8) 의 하나의 해가 되므로 문제 (8) 의 최적해가 문제 (1) 의 해가 아닌 경우도, 동차해로 될 경우가 존재할 수 있다.

4. 수정된 Karmarkar 기법과 변환

4.1 Karmarkar 의 투영변환에 의한 가능문제기법의 수정

여기서는 3.2.2 에서 언급된 Karmarkar의 투영변환에 의한 문제점의 해결책을 제시하려고 한다. Karmarkar 형태의 가능문제가 $Ax = 0$ $x \in S^n$ (11) 으로 주어졌을 때, 이문제를 풀기 위한 최적화문제는

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & x_{n+1} \\ & Ax - (Ae)\, x_{n+1} = 0 \qquad (2') \\ & (x, x_{n+1}) \in S^{n+1} \end{aligned}$$

(11) 의 문제가 해가 존재하지 않는 것과 (2′) 의 최적해가 $x_{n+1} > 0$ 을 갖는 것은 동치이다.

d를 문제 (2′) 의 내부가능해라 하고 D를 d로 만든 대각행렬이라하자. 또한 c_P를 Karmarkar 가 제시한 기법의 단계 2 에서의 Dc 의 투영이라 하자(여기서 $c^T = (0, \cdots, 0)$).

정리 1 : $c^T d > R \, |c_P|$ 이면 (11) 의 해는 존재하지 않는다. (단, R은 $e/(n+1)$ 을 중심으로 S^{n+1}에 외접하는 원구로 $R^2 = (n+1)/n$ 이된다)

증명 : R이 S^{n+1}에 외접하고 c_P는 $c^T D$를 단위길이당 최소화하는 투영이므로 y^*를 d가 $e/(n+1)$ 으로 투영된, 다음 선형계획의 최적해라 하자.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c^T D y \\ & [A \,\vdots\, -Ae]\, y = 0 \\ & y \in S^{n+1} \end{aligned}$$

그러면, x^*를 문제 (2′) 의 최적해라 할 때

$$c^T x^* = c^T D y^* / e^T D y^*$$

$$c^T D y^* \geq c^T D \left(e/(n+1) - R\, c_P / |c_P| \right)$$

$=c^T d - R c^T D c_p / |c_p|$

$c_P = [I - B^T(BB^T)^{-1}B]\ Dc$

$c_P^T c_P = c_P^T [I - B^T(BB^T)^{-1}B]\ Dc$

$= c^T D [I - B^T(BB^T)^{-1}B]\ Dc$

$= c^T D c_P$

그러나 $c_P^T c_P = |c_P|^2$ 이므로 $c^T Dy^* \geq c^T d - R|c_P| > 0$ 따라서 $c^T Dy^* > 0$. 그러므로 문제 (2′)의 최적해의 목적함수값 $x_{n+1}^* > 0$. 주어진 Karmarkar 형태의 가능문제의 해는 존재 하지 않는다.

위의 정리를 이용하여, 원래 Karmarkar가 제시한 방법의 종결조건(termination criteria)을 보완한다.

4.1.1 수정된 Karmarkar 기법

기법 1 : (종결조건)

i) $c^T x^k = 0$

ii) $d = x^k$라할때 $c^T D$의 투영을 c_P라 할 때 $c^T d > R|c_P|$

iii) $k \geqq q$

기법 2 (종결조건)

i) $c^T x^k < 0$

ii) iii) 기법 1과 같다.

다음의 Karmarkar 형태의 가능문제를 고려하자.

$$x_1 + 2x_2 = 0$$
$$x \in S^2$$

위의 문제는 가능해가 존재하지 않는다. 이의 최적화문제는

$$\text{Min} \quad x_3$$
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$
$$x \in S^3$$

로 주어진다. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$은 가능해이고

$c_P = (1/42)(-5, 4, 1)^T$, $R^2 = 3/2$, $c^T d$는 $\frac{1}{3}$이다.

$\frac{1}{3} = c^T d = x_3 > R|c_P| = \sqrt{1/28}$이 되어 1계산단계후 해가 존재하지 않는다는 결론을 얻는다.

만일 Karmakar가 제시한 기법을 사용하면 q단계후에야 같은 결론을 얻게 된다.

일반적으로 가능해가 존재하지 않을 경우에는 수정된 기법 1이 효율적인 것은 확실하다. 그리고 해가 있을 경우에는 q단계까지 정리 1의 조건이 만족되지 않는 것을 알수있다.

4.1.2 보완된 종결조건을 사용한, 가능문제의 해결

주어진 가능문제를 $Ax = b$, $x \geq 0$라 하자. 만일 $b = 0$이면 Karmarkar 형태의 선형 계획이므로 $b \neq 0$라 가정하고, 적어도 한개 이상의 0이 아닌 b_i를 갖으므로 어떤 m에 대하여 $b_m > 0$이라 하자.

$$\bar{A}_{i\cdot} = \begin{cases} A_{i\cdot} & (b_i = 0) \\ b_m A_{i\cdot} - b_i A_{m\cdot} & (b_i \neq 0) \end{cases}$$

라 정의하고 다음의 선형계획을 고려하자.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & -A_{m\cdot} y = z(y) \\ & \bar{A}_{i\cdot} y = 0, \quad i = 1, \cdots, m-1 \\ & y \in S^n \end{aligned} \tag{12}$$

정리 2 : 주어진 원문제를 $Ax = b$, $x \geq 0$, $b_m > 0$이라하자. 만일 원문제의 가능해가 존재하면 문제(12)에서 $z(y) < 0$인 가능해가 존재한다.

증명 : $\bar{x}$를 원문제의 가능해라 하자.

$y = \bar{x}/e^T\bar{x}$라 정의하면 $\bar{y}$는 (12)의 가능해이고 $z(\bar{y}) = -A_{m\cdot}\bar{x}/e^T\bar{x} = -b_m/e^T\bar{x} < 0$이다.

수정된 가능문제 해법

단계 1. 주어진 원문제를 문제(12)의 형태로 변환한다.

단계 2. 문제(12)의 가능문제를 수정된 Karmarkar 기법 1로 푼다.

(i) 만일 가능해가 존재하지 않으면 원문제의 가능해도 존재하지 않는다.

(ii) $\bar{y}$를 문제(12)의 가능해라 하자.

단계 3. (i) 만일 $z(\bar{y}) < 0$이면, $\bar{x} = \bar{y}/(-z(\bar{y}))$는 원문제의 가능해이다.

(ii) 만일 $z(y) \geq 0$이면 $D = \text{diag}\{\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n\}$인 대각선행렬이라하고 $w = D^{-1}y$라 하자.

단계 4. 다음의 최적화 문제를 수정된 Karmarkar 기법 2로 푼다.

$$\text{Min } -A_m.Dw = z(w)$$
$$\bar{A}_i.Dw = 0,\ i = 1, \cdots, m-1$$
$$w \in S^n$$

단계 5. $\bar{w}$를 단계 4의 최종해라 하자.

(i) 만일 $z(\bar{w}) \geqq 0$이면 원문제의 가능해는 존재하지 않는다.

(ii) 만일 $z(\bar{w}) < 0$이면 단계 3의 (i)과 같이 $\bar{x}$를 구한다.

단계 3의 (ii)에서 $z(\bar{y}) = 0$이면 $\bar{y}$는 원문제의 homogeneous 해이며 만일 원문제의 해가 있다면 단계 4에서 homogeneous 해는 제거된다. 따라서 3장에서의 문제점은 위의 기법에서는 발생하지 않는다.

4.2 Karmarkar의 최적화문제의 투영변환에 대한 대안

최적화 문제의 원문제를 Min $c^T x$: $Ax \geqq b$, $x \geqq 0$라 하자. 쌍대문제는 Max $b^T y$: $A^T y \leqq c$, $y \geqq 0$로 주어진다.

3장에서 제시된 문제점을 피하기 위하여 다음의 단계를 고려한다.

단계 1 : $Ax \geqq b$, $x \geqq 0$의 가능문제를 여유변수를 첨가한후 앞에서 제시한 기법으로 푼다. 가능해가 존재하면 단계 2로 간다.

단계 2 : $A^T y \leqq c$, $y \geqq 0$의 가능문제를 여유변수를 첨가한 후 앞에서 제시한 기법으로 푼다.
가능해가 없으면 최적화문제는 unbounded below이다. 가능해 y를 구하면 3단계으로 간다.

단계 3 : 단계 1과 단계 2에 의하여 x^*, y^*가 원문제, 쌍대문제의 최적해로 존재한다고 하자. 목적함수를 $c^T x - b^T y$와 놓으면 Min $c\,x - b^T y$: $Ax \geqq b$, $x \geqq 0$, $A^T y \leqq c$, $y \geqq 0$의 최적해의 값은 0이다.

위에 제시된 단계들은, 목적함수값을 0으로 만들므로 이론적인 면에서는 3장의 문제점을해소하였으나, 실용면에 있어서 변수의 증가로 인하여 기법이 계산의 효율성 측면에서 바람직스럽지 못하다.

參 考 文 獻

1. Anstreicher, K.M., "Analysis of a Modified Karmarkar Algorithm for Linear Programming", Yale School of Organization and Management, Working Paper Series B #84, 1984.
2. Avis, D. and Chvatal, V., "Notes on Bland's Pivoting Rule", in Mathematical Programming Study 8, North-Holland, Amsterdam, July 1978, pp. 24–34
3. Borgwardt, K.H., "Some Distribution Independent Results About the Asymptotic Order of the Average Number of Pivot Steps in the Simplex Method", Mathematics of Operations Research 7, 3(August 1982), 441–462.
4. Karmarkar, N., "A new ploynomial time algorithm for linear programming", manuscript, Mathematical Sciences Division, AT&T:Bell Laboratories(Murray Hill, New Jersey).
5. Khachiyan, L.G., "Polynomial Algorithm in Linear Programming", Soviet Mathematic Doklady, No. 1, 20 1979.
6. Klee, V. and Minty, G.I., "How Good is the Simplex Algorithm"? in:O. Shisha, ed., Inequalities III, Academic Press York, 1972.

7. N. Megiddo, "A variation on Karmarkar's Algorithm", manuscript, IBM Research Laboratory-(San Jose, California, 1985).
8. Todd, M.J. and B.P. Burrell, "An extension of Karmarkar's algorithm for linear programming using dual variables", Technical Report No. 648, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University(Ithaca, New York, 1985).
9. J.A. Tomlin, "An experimental approach to Karmarkar's projective method for linear programming", manuscript, Ketron Inc(Mountain View, California, 1985).