〈研究論文〉

Journal of the Korean Industitute of Industrial Engineers
Vol. 13, No. 1, June. 1987

다품목단일입찰경매의 최적경매설계와 전체낙찰자기대이익

(Optimal Auction Design and All the Winners' Expected Profit in the Multiple Unit Auction)

김 여 근*
박 순 달**

Abstract

This paper is concerned with the multiple unit auction under the following assumptions:1) multiple identical objects are to be sold to the highest bidders, but a bidder may obtain at most one, 2) each bidder has a fixed reservation value and draws his reservation value independently in the same distribution, 3) The greater a bidder's reservation value is, the more a bidder will bid for the object, and 4) a bidder will bid when his expected profit is more than zero.

The purpose of this paper is to design the optimal auctions, in terms of the reserve price and entry fee, that can be applied in any types of multiple unit auctions under the above assumptions. Further, auctioneer's expected revenue and profit, and all the winners' expected profit are analyzed.

1. 서 론

다품목단일입찰경매(multiple Unit auctions)는 경매품목이 동일다품목이고 한 입찰자가 많아야 한 품목 낙찰받을 수 있는 경매이다. 이경매의 경매방법은 여러가지가 있을 수 있다. 예로써 전품목을 동시에 경매하는 경매방법과 한 품목씩 연속적으로 경매하는 경매방법이 있을 수 있으며 또한 낙찰가나 낙찰자를 결정하는 방법에 따라 여러 경매방법이 있을 수 있다.

경매에 있어서 흔히 경매자는 수입면에서 가장 유리한 경매방법을 택하려 하고 입찰자는 주어진 경매방법하에서 상대입찰자들에 대처하여 이익을 최대로 하는 입찰가를 결정하고자 할 것이다.

경매자는 수입을 높이기 위하여 최저 경매가와 참가비를 고려할 수 있다. 최저경매가는 낙찰할 수 있는 최저의 가격이고 참가비는 응찰하기 위하여 응찰자가 경매자에게 지불하는 금액이다. 경매자는 최저경매가와 참가비를 제시하면 낙찰될 때 낙찰가가 최저경매가 이상이고 응찰자로 부터 참가비를 받아 수입이 증가할 수도 있으나, 응찰자수가 감소하고 유찰될 위험이 따르며 참가비로 인하여 낙찰가가 낮아져 수입이

*전남대학교 공과대학 산업공학과
**서울대학교 공과대학 산업공학과

감소할 수도 있다. 따라서 경매자는 수입을 높이기 위하여 적정한 최저경매가와 참가비를 제시하여야 한다.

한편 입찰자는 최저경매가와 참가비가 제시되면 먼저 응찰여부를 결정하고 응찰하는 경우 상대입찰자에 대처하여 기대이익을 최대로 하는 최적입찰가를 결정하려고 할 것이다. 다품목단일입찰경매에 있어서 입찰자의 입장에서 기대이익을 최대로 하는 평형입찰전략(equilibrium bidding strategy)에 관한 연구는 한국경영과학회지 제11권 제2호〔2〕에서 이미 다루었다. 이 연구는 그 후속으로 경매자의 수입면에서 가장 유리한 다품목단일입찰경매의 최적경매 설계를 다루고자 한다.

경매자의 수입에 관한 연구는 경매품목이 단일품목인 경우에 있어서 Vickrey〔10〕와 Milgrom과 Weber〔6〕가 최고입찰자가 낙찰자가 되고 최고입찰가를 낙찰가로 하는 제1입찰가 경매와 낙찰자는 최고입찰자로 하되 낙찰가를 제2최고입찰가로 하는 제2입찰가경매의 수입을 비교하였고, Holt〔4〕는 입찰자의 위험선호 도에 따른 이 두경매방법의 수입을 비교하였다. 다품목단일입찰경매의 경매방법에 따른 수입비교는 Ortega-Reichert〔8〕와 Harris와 Raviv〔3〕등에 의해 이루어 졌다. 이러한 연구 들은 최저경매가와 참가비가 없는 경우에 있어서 경매방법에 따른 수입비교의 연구에 그치고 있다. 한편 최적경매설계에 관한 연구는 Reley와 Samuelson〔9〕, Myerson〔7〕에 의해 이루어 졌으나 이들의 연구는 단일품목인 경우이고 최저경매가 만을 고려하고 있다.

이 논문은 이들〔7, 9〕의 연구결과를 경매품목이 동일다품목인 경우로 확장하고 더 나아가 최저경매가와 참가비를 동시에 고려한 다품목단일입찰경매의 최적경매를 설계하고자 한다. 다품목단일입찰경매에 있어서 평형입찰전략에서의 경매자의 기대수입과 기대이익을 구하여 이를 최대로 하는 최저경매가와 참가비를 결정하며 더 나아가 전체낙찰자의 기대이익에 대해서도 다루고자 한다.

최저경매가와 참가비가 있는 다품목단일입찰경매의 최적경매를 설계하고 전체 낙찰자의 기대이익을 구하는데 다음과 같은 가정을 두기로 한다.

가정 1. 경매자는 ℓ 개의 동일품목으로 $n(>\ell)$ 명의 입찰자를 상대로 경매전에 최저경매가 m과 참가비 c를 제시하며 입찰자는 단지 한 품목만 응찰할 수 있으며 서로 비협조적으로 응찰한다. 그리고 낙찰자는 ℓ 번째 최고입찰자 까지로 한다.

가정 2. 입찰자 i, $i=1, 2, \cdots, n$의 경매품목에 대한 평가액은 $v_i \in [\underline{v}, \overline{v}]$, $\underline{v} \geq 0$ 이다. 각 입찰자는 모든 상대입찰자의 평가액분포함수를 $F(v)$로 본다. $F(v)$는 $F(\underline{v})=0$, $F(\overline{v})=1$인 연속적이고 미분가능한 증가함수이다.

가정 3. 각 입찰자의 입찰가 $U(v_i)$는 각자 평가액 v_i의 연속적이고 미분가능한 증가함수이다.

가정 4. 입찰자는 기대이익이 零이상일 때 응찰한다.

위 가정들의 의미는 연구〔2〕에서 설명하였다. 다루고자 하는 최적경매의 설계는 이러한 가정하에서 다루는 다품목단일입찰경매에서 경매방법에 상관없이 적용될 수 있다. 경매방법으로는 최고입찰자들을 낙찰자로 하되 낙찰가를 결정하는 방법이 다른 경우, 모든 품목을 동시에 경매하는 동시경매의 경우, 또는 한 품목씩 연속적으로 경매하는 축차경매의 경우등의 다품목단일입찰경매가 있을 수 있다.

이 연구는 2절에서 평형입찰전략에서의경매자의 기대수입과 기대이익을 구하고 3절에서 경매자의 기대수입과 기대이익을 최대로 하는 최적경매설계를 제시한다. 4절은 평형입찰전략에서의 전체낙찰자의 기대이익을 구하고 5절은 최적경매설계와 전체낙찰자 기대이익에 대한 예제를 보이며 6절은 결론으로 되어있다.

2. 경매자의 기대수입과 기대이익

다품목단일입찰경매에서 모든 입찰자가 평형

입찰전략을 사용할 때 경매자의 기대수입과 기대이익을 구하여 보자.

다루고자 하는 경매모형에서 각 입찰자의 평가액분포함수는 경매자와 모든 입찰자에게 알려져 있고 하나의 같은 분포함수를 따른다고 가정하였다. 이런 경우를 대칭정보를 갖는다고 한다. 각 입찰자의 정보가 대칭이고 경매자에게 이 정보가 알려져 있으므로 경매자기대수입은 한 입찰자에게 받는 기대수입에 입찰자수를 곱한 것으로 된다.

평형입찰전략에서 한 입찰자에 대한 기대수입을 구하기 위하여 먼저 낙찰확률과 응찰조건을 구하여 보자. $(n-1)$ 명의 상대입찰자의 평가액을 가장 작은 것부터 나열하여 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1}$로 둘 때 $x_{n-\ell}$의 확률밀도함수 $h(x)$와 누적밀도함수 $H(x)$는

$$h(x) = \frac{(n-1)\,!}{(n-\ell-1)\,!\ (\ell-1)\,!} F^{n-\ell-1}(x)$$

$$\{1-F(x)\}^{\ell-1} f(x), \quad \underline{v} \leq x \leq \bar{v} \tag{1}$$

과

$$H(x) = \sum_{j=n-\ell}^{n-1} \binom{n-1}{j} F^j(x) \ \{1-F(x)\}^{n-1-j},$$

$$\underline{v} \leq x \leq \bar{v} \tag{2}$$

가 된다([5] P. 325). 평가액이 v인 입찰자가 평형입찰전략을 사용할 때 낙찰확률은 $H(v)$가 된다[2].

다음은 응찰조건을 구하여 보자. 최저 경매가로 낙찰될 때 기대이익이 零이되는 평가액을 v_*로 두면 이 v_*는

$$(v_* - m)\ H(v_*) - C = 0 \tag{3}$$

을 만족하는 값이 된다[2]. 입찰자는 기대이익 零이상일 때 응찰한다고 가정함으로써 식(3)의 v_*보다 크면 응찰하게 되고 작으면 응찰하지 않게 된다.

한 입찰자로 부터 받는 경매자기대수입을 구하여 보자. 평가액이 $v(\geq v_*)$인 입찰자의 기대지불가를 $P(v)$로 두자. 경매사는 입찰자의 평가액 v의 확률밀도함수가 $f(v)$ 입을 알고 있으므로 한 입찰자로 부터 받는 경매자기대수 입은

$$\int_{v_*}^{\bar{v}} P(v)\, f(v)\, dv \tag{4}$$

가 된다. 경매자기대수입은 한 입찰자의 경매자기대수입에 입찰자수 n을 곱한 것으로 다음 定理가 성립한다.

定理 1. 다품목단일입찰경매에서 모든 입찰자가 평형입찰전략을 사용할 때 경매자기대수입은

$$n \int_{v_*}^{\bar{v}} (vf(v) + F(v) - 1)\ H(v)\, dv \tag{5}$$

이다.

증명. 먼저 $P(v)$를 구한다. 평가액이 v인입찰자의 기대이익, $E[U(v)]$은 평가액에 낙찰확률을 곱한 것에서 기대지불가 $P(v)$를 뺀 것이다. 따라서 기대지불가는

$$P(v) = vH(v) - E[U(v)] \tag{6}$$

로 표현된다. $E[U(v)]$는 연구[2]의 定理 1에서

$$E[U(v)] = \int_{v_*}^{v} H(z)\, dz, \quad v \geq v_* \tag{7}$$

로 되었다. 식(7)을 식(6)에 대입하면

$$P(v) = vH(v) - \int_{v_*}^{v} H(z)\, dz \tag{8}$$

가 된다. 식(8)을 식(4)에 대입하면

$$\int_{v_*}^{\bar{v}} P(v)\, f(v)\, dv$$

$$= \int_{v_*}^{\bar{v}} [vH(v) - \int_{v_*}^{v} H(z)\, dz]\, f(v)\, dv$$

$$= \int_{v_*}^{\bar{v}} vf(v)\, H(v)\, dv - \int_{v_*}^{\bar{v}} \int_{v_*}^{v} H(z)\, dz f(v)$$

$$dv = \int_{v_*}^{\bar{v}} vf(v)\, H(v)\, dv - \int_{v_*}^{\bar{v}} \int_{z}^{\bar{v}} f(v)\, dv$$

$$H(z)\, dz = \int_{v_*}^{\bar{v}} (vf(v) + F(v) - 1)\ H(v)\, dv \tag{9}$$

가 된다. 그러므로 경매자기대수입은 한 입찰자로 부터 받는 기대수입, 식(9)에 입찰자수 n을 곱한 것으로써 이 定理가 성립한다. □

Riley 와 Samuelson[9]은 단일품목인 경우의 최적경매를 설계하였다. 그들의 proposition 1과 定理 1. 을 비교하여 보면 식(5)의 $H(v)$가 $F^{n-1}(v)$로 되고 응찰하는 최저의 평가액 v_*가 그들의 연구에서는 최저경매가 인데 定理 1에서는 최저경매가와 참가비를 동시에 고려함

으로써 식(3)을 만족하는 값이다. 한편 Ortega-Reichart〔8〕와 Harris와 Raviv〔3〕가 최저경매가와 참가비가 없는 경우 경매자기대수입은 n명의 입찰자 중에서 $(\ell+1)$ 번째 최고평가액의 기대값에 품목수를 곱한 것임을 보였다. 定理1. 로 부터 최저경매가와 참가비가 없는 경우는 $v^*=\underline{v}$가 되어 그들의 연구결과〔3, 8〕와 같이 됨을 보일 수 있다.

경매가기대수입은 입찰자수, 품목수, 최저경매가, 참가비, 평가액분포에 따라 결정된다. 식(5)로 부터 경매자기대수입은 입찰자수가 많아지면 증가하고 품목수가 많아지면 증가하나 품목당 경매자기대수입은 감소한다. 최저경매가와 참가비의 변화에 따라 경매자기대수입은 증가 또는 감소할 수 있다. 최저경매가와 참가비가 있는 경우에 경매자기대수입은 최저경매가와 참가비가 없는 경우보다

$$n\int_{\underline{v}}^{v_*}[vf(v)+F(v)-1]\,H(v)\,dv \tag{10}$$

만큼 차이가 있다.

다음은 평형입찰전략에서의 경매자기대이익을 구하여 보자. 경매자기대이익은 경매되지 않는 품목의 경매자기대평가액과 입찰자로 부터 받는 경매자기대수입을 합한 것에서 경매자의 전체 품목에 대한 기대평가액을 뺀 것으로 된다. 응찰을 희망하는 입찰자의 수는 품목수보다 많다고 가정하였다. 그러나 최저경매가와 참가비가 있으므로 응찰자수가 품목수보다 적을 수 있다. 이 경우에는 경매되지 않는 품목이 있게 된다.

경매자의 기대이익을 구하는 데 필요한 평가액의 순서통계량(order statistics)의 확률밀도함수와 누적밀도함수를 먼저 구하여 두자. 입찰자의 평가액 $v_1, v_2, \cdots, v_n$을 가장 작은 것부터 나열하여 $v_{(1)}\leqq v_{(2)}\leqq\cdots\leqq v_{(n)}$으로 둘 때, 평가액 $v_i, i=1, 2, \cdots, n$가 서로 독립이고 확률밀도함수가 $f(v)$이므로 $v_{(i)}$의 확률밀도함수 $g_i(v)$는

$$g_i(v)=\frac{n!}{(n-i)!\,(i-1)!}F^{i-1}(v)[1-F(v)]^{n-i}f(v) \quad i=1,\ 2,\cdots,n \tag{11}$$

가 된다. (〔5〕 P.325)

평형입찰전략에서의 경매자기대이익은 다음 定理와 같다.

定理2. 다품목단일입찰경매에서 모든 입찰자가 평형입찰전략을 사용할 때 경매자 기대이익은

$$nv_0\int_{\underline{v}}^{v_*}f(v)H(v)dv+n\int_{v_*}^{\bar{v}}[vf(v)+F(v)-1]H(v)dv-\ell v_0 \tag{12}$$

이다.

證明. 먼저 경매되지 않는 품목에 대한 경매자의 기대평가액을 구한다. ℓ개의 동일품목을 나열하여 i번째 것은 i번째 최고입찰자가 낙찰받는다고 하자. 가정3. 에 의해 평형입찰 전략에서의 i번째 최고입찰자의 평가액을 $V_{(n-i+1)}$ 이다. 각 입찰자가 평형입찰전략을 사용할 때 평가액이 v_*이상일 때 응찰하므로 ℓ 번째 최고평가액, 즉 $v_{n-\ell+1}$이 v_*보다 낮으면 ℓ 번째 품목이 경매되지 않는다. 이 확률은

$$\int_{\underline{v}}^{v_*}g_{n-\ell+1}(v)dv$$

가 된다. 같은 방법으로 i번째, $i=1, 2, \cdots, \ell$ 품목이 경매되지 않을 확률은 i번째 최고평가액이 v_*보다 낮을 확률로 된다. 따라서 경매되지 않는 품목의 경매자 기대평가액은 경매자평가액, v_0에 각 품목이 경매되지 않을 확률을 곱한 것을 합한 것으로

$$v_0\sum_{i=n-\ell+1}^{n}\int_{\underline{v}}^{v_*}g_{(i)}(v)\,dv \tag{13}$$

로 표현된다. 식(13)에 식(11)을 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}
&v_0\sum_{i=n-\ell+1}^{n}\int_{\underline{v}}^{v_*}\frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}F^{i-1}(v)[1-F(v)]^{n-i}f(v)dv\\
&=nv_0\int_{\underline{v}}^{v_*}f(v)\sum_{i=n-\ell}^{n-1}\frac{(n-1)!}{i!\,(n-i-1)}F^{i}(v)[1-F(v)]^{n-i-1}dv\\
&=nv_0\int_{\underline{v}}^{v_*}f(v)H(v)dv
\end{aligned}\tag{14}$$

가 된다.

입찰자에게 받는 경매자기대수입은 定理 1. 과 같고, 경매자의 모든 경매품목에 대한 기대평가액은 경매자의 한 품목에 대한 평가액이 고정된 v_0 이므로 ℓv_0 가 된다. 따라서 경매되지 않는 품목의 기대평가액, 식(14)와 입찰자에게 받는 경매자기대수입, 식(5)를 합한 것에서 모든 경매품목에 대한 경매자의 기대평가액, ℓv_0 를 빼면 식(12)가 성립한다. □

경매자기대이익은 입찰자수가 많아지면 증가하며, 또한 적절한 v_* 를 선택하면 증가시킬 수 있음을 알 수 있다.

3. 최적경매설계

경매자는 자신에게 가장 유리한 경매를 설계하려고 할 것이다. 이 때 경매자는 수입을 가장 높이려는 경우와 이익을 가장 높이려는 경우가 있을 수 있다. 이 절에서는 경매자의 수입이나 이익면에서 가장 유리한 최적경매를 최저경매가와 참가비에 의해 설계하고 분석하고자 한다. 즉 경매자의 기대수입과 기대이익을 최대로 하는 최저경매가와 참가비를 결정하고자 한다.

먼저 경매자기대수입을 가장 높일 수 있는 최저경매가와 참가비를 결정하여 보자. 경매자기대수입은 定理 1. 에서 구하였다. 식(5)로 부터 경매자기대수입은 v_* 에 영향을 받는다. v_* 는 식(3)에서 최저경매가와 참가비에 의해 결정된다. 따라서 경매자기대수입을 최대로 하는 최저경매가와 참가비를 결정하기 위해서는 식(5)를 최대로 하는 v_* 를 결정하면 된다.

定理 3. 평형입찰전략하에서 경매자기대수입을 최대로 하는 v_* 를 α 로 둔다. 그러면 α 는

$$\alpha = [1 - F(\alpha)]/f(\alpha) \tag{15}$$

을 만족하는 값이다.

證明. 경매자기대수입을 최대로 하는 v_* 를 구하기 위하여 식(5)를 v_* 에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$-n[v_* f(v_*) + F(v_*) - 1]\, H(v_*) \tag{16}$$

그러면 α 는 식(16)으로 부터

$$-n[\alpha f(\alpha) + F(\alpha) - 1]\, H(\alpha) = 0 \tag{17}$$

을 만족해야 한다. $nH(\alpha) > 0$ 이므로 $\alpha f(\alpha) + F(\alpha) - 1 = 0$ 로 되어 식(15)가 성립한다. 식(15)를 만족하는 α 가 확률밀도함수 $f(v)$ 에 따라 여러개 존재할 수 있다. 이때 식(15)를 만족하고 식(5)를 최대로 하는 α 를 선택하면 된다. □

다음은 최저경매가와 참가비에 의해 경매자기대이익을 최대로 하는 최적경매를 설계하여 보자. 경매자기대이익을 나타낸 식(12)에서 경매자기대이익은 최저경매가와 참가비에 의해 결정되는 v_* 에 영향을 받는다. 앞에서와 같은 이유에서 식(12)를 최대로 하는 v_* 를 결정하면 된다.

定理 4. 평형입찰전략하에서 경매자기대이익을 최대로 하는 v_* 를 β 로 둔다. 그러면 β 는

$$\beta = v_0 + \{1 - F(\beta)\}/f(\beta) \tag{18}$$

을 만족하는 값이다.

證明. 경매자기대이익을 나타낸 식(12)를 v_* 에 대하여 미분하면

$$nv_0 f(v_*) H(v_*) - n[v_* f(v_*) + F(v_*) - 1] H(v_*)$$

로 된다. 그러면 β 는

$$nv_0 f(\beta) H(\beta) - n[\beta f(\beta) + F(\beta) - 1] H(\beta) = 0 \tag{19}$$

을 만족해야 한다. $nH(\beta) > 0$ 이므로 식(19)로부터 식(18)이 쉽게 유도된다. 식(19)를 만족하는 β 가 여러개 존재하면 식(12)를 최대로 하는 β 를 선택하면 된다. □

Riley와 Samuelson [9]은 Proposition 3. 에서 경매품목이 하나이고 최저경매가만 있는 경매의 최적경매설계를 제시하였다. 그의 결과는 식(18)과 같았으나 **定理 4** 는 품목이 다수이고 v_* 는 식(3)을 만족하는 값이다.

α 와 β 가 구하여지면 식(3)으로 부터 경매자의 기대수입과 기대이익을 최대로 하는 최저경매가와 참가비를 구할 수 있다. 이때 경매자의 기대수입과 기대이익을 최대로 하는 (최저경매가, 참가비)는 유일하지 않고 여러 (m, c) 双이 존재한다. 예로써 참가비가 없으면 경매자기대이익을 최대로 하는 최저경매가는

$$m = \beta \tag{ }$$

가 되고 최저경매가가 零이면 최적의 참가비는

$$C = \beta H(\beta) \tag{21}$$

가 된다.

定理 3과 定理4.로 부터 α, β는 입찰자수와 품목수에 상관없이 결정된다. 경매자기대이익을 최대로 하는 최적경매설계를 할 때 최저경매가만을 도입하면 식(20)으로 부터 입찰자수와 품목수에 무관하고, 단지 평가액분포에 의해 결정됨을 알 수 있다. 그러나 참가비만을 도입하면 식(21)로 부터 $H(\beta)$가 입찰자수, 품목수,평가액분포액 따라 결정되므로, 최적의 참가비는 이들에 의해 결정된다. 그러므로 경매자는 최저경매가와 참가비 또는 최저경매가나 참가비 중에서 어느 하나를 도입하든지 최저의 경매설계를 하면 기대이익은 같으나, 입찰자수가 명확하지 않는 경우에는 입찰자수와 품목수에 무관하게 결정할 수 있는 최저경매가만을 사용하여 최적경매를 설계하는 것이 좋을 것이다.

경매자가 손해보면서 경매하려고 하지않는다면 자신의 평가액 v_0보다 낮게 경매하지는 않을 것이다. 경매자의 기대이익을 최대로 하는 β는 定理4.로 부터 자신의 평가액 v_0보다 항상 크다. 그러나 입찰자로 부터 받는 수입을 최대로 하려면, 定理3.과 定理4.로 부터 경매자기대수입을 최대로 하는 α를 경매자기대이익을최대로 하는 β보다 v_0만큼 낮게 하는 것이다.

4. 전체낙찰자의 기대이익

지금까지 경매자의 입장에서 경매를 분석하였다. 여기서는 모든 입찰자가 평형입찰전략을 사용할 때 전체낙찰자의 기대이익을 구하여 보기로 한다.

전체낙찰자의 기대이익은 전체낙찰자의 기대평가액에서 전체낙찰자의 기대지불가를 뺀 것으로 된다. 전체낙찰자의 기대지불가는 전체낙찰자의 기대낙찰가와 기대참가비를 합한 것으로 이는 경매자기대수입에서 낙찰되지 않는입찰자의 기대참가비를 뺀 것과 같다. 전체낙찰자의 기대이익은 다음 定理와 같게 된다.

定理5. 다품목단일입찰경매에서 모든 입찰자가 평형입찰전략을 사용할 때 전체낙찰자의 기대이익은

$$n\int_{v_*}^{\bar{v}}[1-F(v)]H(v)dv+nc\int_{v_*}^{\bar{v}}f(v)[1-H(v)]dv \tag{22}$$

이다.

證明. 먼저 낙찰자의 기대평가액을 구한다. 가정3.에 의해 평가액이 높을 수록 높게 입찰하므로 모든 입찰자가 평형입찰전략을 사용할 때 낙찰자는 평가액이 $v_{n-\ell+1}$, $v_{n-\ell+2}$, $\cdots$, v_n인 입찰자들이다. 따라서 전체낙찰자의 기대평가액은

$$\sum_{i=n-\ell+1}^{n}\int_{v_*}^{\bar{v}}vg_i(v)dv \tag{23}$$

로 된다. 식(11)의 $g_i(v)$를 식(23)에 대입하면

$$\sum_{i=n-\ell+1}^{n}\int_{v_*}^{\bar{v}}v\frac{n!}{(i-1)!(n-\ell)!}F^{i-1}(v)[1-F(v)]^{n-i}f(v)dv$$
$$=\int_{v_*}^{\bar{v}}nvf(v)\sum_{i=n-\ell}^{n-1}\frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!}F^{i}(v)[1-F(v)]^{n-i-1}dv \tag{24}$$

가 된다. 식(2)로 부터 식(24)는

$$n\int_{v_*}^{\bar{v}}vf(v)H(v)dv \tag{25}$$

로 표현된다.

전체낙찰자의 기대지불가는 경매자기대수입에서 낙찰되지 않는 입찰자의 기대 참가비를 뺀 것이다. 경매자기대수입은 定理1.과 같다. 그러면 낙찰되지 않는 입찰자의 기대참가비를 구하여 보자. 낙찰되지 않는 입찰자는 평가액이 가정3.에 의해 v_1, v_2, $\cdots$, $v_{n-\ell}$인 입찰자이다. 그러므로 낙찰되지 않는 입찰자의기대참가비는

$$C\sum_{i=1}^{n-\ell}\int_{v_*}^{\bar{v}}g_i(v)du \tag{26}$$

로 된다. 식(25)의 유도과정과 비슷한 방법으로 식(26)을 유도하면

$$nc\int_{v_*}^{\bar{v}}f(v)[1-H(v)]dv \tag{27}$$

과 같이 된다. 그러므로 전체낙찰자의 기대평가액, 식(25)와 경매자기대수입, 식(5)와 낙찰되지 않는 입찰자의 기대참가비, 식(27)로 부터 전

체낙찰자의 기대이익을 나타낸 식(22)를 얻는다.

최저경매가와 참가비가 없는 경우는 $v_* = \underline{v}$, $c = 0$가 되어, 식(22)로 부터 최저경매가와 참가비의 有無에 따른 전체낙찰자 기대이익의 변화는

$$n \int_{\underline{v}}^{v_*} [1 - F(v)] H(v) dv - nc \int_{v_*}^{\bar{v}} f(v) [1 - H(v)] dv \tag{28}$$

가 된다. 식(28)이 陽이면 최저경매가와 참가비가 없을 때가 陰이면 최저경매가와 참가비가 있을 때가 전체낙찰자기대이익이 많다. 이는 최저경매가가 있으면 전체낙찰자기대이익이 낮아지고 참가비가 있으면 입찰가가 낮아져 결과적으로 낙찰되지 않는 입찰자의 기대참가비가 전체낙찰자에게 돌아와 항상 감소하는 것은 아니기 때문이다. 그러나 최저경매가와 참가비를 높게 하면 v_*는 $\bar{v}$에 접근하여 응찰자수가 적어지므로 전체낙찰자 기대이익이 零에 접근한다.

품목수와 입찰자수에 따른 전체낙찰자기대이익의 변화를 보면, 품목수가 많아지면 $H(v)$가 증가하여 전체낙찰자기대이익은 증가하나, 입찰자수가 많아지면 항상 감소하는 것은 아니다. 이는 입찰자수가 증가하면 평형입찰전략은 높아지나 평가액이 높은 입찰자수가 많아질 수 있기 때문이다. 그러나 입찰자수가 매우 많아지면 전체낙찰자기대이익은 零에 접근한다.

5. 예 제

경매자는 동일한 경매품목 2개를 경매하려고 한다. 경매자는 이 경매품을 각기 100만원으로 평가하고 있고 응찰을 희망하는 입찰자는 어느 가격에 치우침이 없이 50만원부터 150만원 사이의 가격으로 평가할 것으로 보고 있다. 그리고 그는 한 입찰자가 두개를 모두 낙찰받는 것을 원하지 않는다고 하자.

경매자는 헐값에 경매되는 것을 막고 이익을 최대로 하기 위하여 최적의 최저경매가와 참가비를 선택하려고 한다.

입찰자의 평가액 누적밀도함수는

$$F(v) = \frac{v - 50}{100}, \quad 50 \leq v \leq 150$$

가 된다.

경매자가 입찰자수를 정확히 알지 못할 때는 定理 3과 定理 4로 부터 최저경매가에 의해 경매자의 기대수입과 기대이익을 최대로 할 수 있다. 定理 3에 의해 경매자기대수입을 최대로 하는 α는 75만원이 되고 定理 4에 의해 경매자기대이익을 최대로 하는 β는 125만원이 되어, 최저경매가를 75만원, 125만원으로 할 때 기대수입과 기대이익이 각각 최대가 된다.

입찰자수가 3명이라면 식(3)으로 부터 경매자기대수입을 최대로 하는 (최저경매가, 참가비)는 여러개 존재한다. 예로써 (75, 0), (0, 32.8), (50, 10.9)일 때 최대가 되고 定理 1로부터 이때의 기대수입은 153.0만원이 된다. 또한 경매자기대이익을 최대로 하는 여러 (최저경매가, 참가비)쌍이 존재하는데, 예로써 (125, 0), (0, 117.2), (100, 23.4) 등이 있다. 이때 定理 2로 부터 기대이익은 18.6만원이 된다. 참가비가 없는 경우에 최저경매가를 75만원으로 하면 입찰자로부터 받는 경매자기대수입은 153.0만원으로 최대가 되나 경매자가 한 품목의 평가를 100만원하면 경매자기대이익은 −29.8만원이 된다. 즉 기대손해액이 29.8만원이다. 그러나 최저경매가를 125만원으로 하면 경매되지 않을 확률이 높아져 기대수입이 92.1만원이 되어 최저경매가를 75만원으로 할 때보다 40.9만원 감소하나 경매되면 이익이 많게 되어 기대이익은 18.6만원으로 최대가 된다.

전체낙찰자의 기대이익은 입찰자가 3명일 때 최저경매가를 75만원, 125만원으로 하면 定理 5에 의해 각각 60.6만원, 9.1만원으로 된다.

6. 결 론

다품목단일입찰경매의 모형을 다루는데 있어서 i) 최고입찰자들이 낙찰자가 되고 입찰자는 단지 한 품목만을 낙찰받을 수 있으며, ii) 모든 입찰자의 평가액은 서로 독립이고 하나의 같은

분포를 따르고, iii) 입찰가는 평가액의 함수로 평가액이 높을수록 높게 입찰하며, iv) 입찰자는 기대이익이 零이상일 때 응찰한다고 가정하였다. 이러한 가정을 만족하는 다품목단일입찰경매의 모든 경매에 대하여 경매자의 기대수입과 기대이익을 구하여 최저경매가와 참가비에 의해 최적경매설계를 제시하였으며 또한 전체낙찰자의 기대이익을 구하였다.

연구결과, 경매자는 적절한 최저경매가와 참가비를 제시하면 기대수입과 기대이익을 높일 수 있었다. 경매자의 기대수입과 기대이익을 최대로 하는 최저경매가와 참가비는 유일하게 존재하지 않았다. 경매자의 기대수입 또는 기대이익을 최대로 하는 참가비는 입찰자수와 품목수에 영향을 받으나 최저경매가는 이것들에 영향을 받지 않았다. 따라서 경매자는 입찰자수를 정확히 알지 못하여도 입찰자들의 평가액분포를 추정하여 이로 부터 기대이익을 최대로 하는 최저경매가를 제시할 수 있다. 최적의 최저경매가만을 경매자가 제시하면 입찰자도 평가액이 최저경매가 이상이면 응찰하게 되므로 응찰여부를 결정하는 데 어려움이 없게 된다. 참가비가 없을 때 경매자기대이익을 최대로 하는 최저경매가는 항상 경매자의 경매품목에 대한 평가액보다 높았다.

전체낙찰자의 기대이익은 최저경매가가 높을수록 감소하였다. 참가비가 많아지거나 또는 입찰자수가 많아질 때는 항상 감소하는 것은 아니었다. 이것은 참가비가 있을 경우 낙찰되지 않는 입찰자의 기대참가비가 결과적으로 전체낙찰자에게 돌아오기 때문이며, 입찰자수가 많아지면 평가액이 높은 입찰자가 있을 수 있기 때문이다. 그러나 참가비가 아주 높아지거나 입찰자수가 아주 많아지면 전체낙찰자기대이익은 零에 접근하였다.

이러한 연구결과들은 경매자가 경매에 관련된 입찰자들의 정보를 정확히 알 수 없고 경매품목의 평가액에 기초하여 자신에게 가장 유리하게 경매하려고 할 때 응용될 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

1. 김여근 "최저경매가와 참가비가 있는 다품단일입찰경매에 관한 연구,"박사학위논문, 서울대 공대, 1986.
2. 김여근, 박순달 "다품목단일입찰동시경매의 평형입찰전략과 기대이익", 한국경영과학회지, 제11권 제2호, PP27~36, 1986. 10.
3. Harris, M. and A. Raviv, "Allocation Mechanisms and the Design of Auctions", Econometrica, Vol. 49, pp. 1477–14499, 1981.
4. Holt, C.A., Jr., "Competitive Bidding for Contracts under Alternative Auction Procedures", J. of political Economy, Vol. 88, pp. 433–445, 1980.
5. Kendall, M.G. and A. Stuart, The Advanced Theory of statistics, Vol. 1, Hafner publlishing Company, New York, 1969.
6. Milgrom, P.R. and R.J.Weber, "A Theory of Auctions and Competitive Bidding", Econometrica, Vol. 50, pp. 1089–1122, 1982.
7. Myerson, R.B. "Optimal Auction Design", Mathematics of Operations Research, Vol. 6, pp. 58–73, 1981.
8. Ortega-Reichert, A., "Models of Competitive Bidding under Uncertainty", ph.D. Dissertaton, Dep. of Industrial Engineering, Stanford University, Stanford, Calif., 1968.
9. Riley, J. and W. Samuellson, "Optimal Auctions", American Economic Review, Vol. 71, pp. 381–392, 1981.
10. Vickrey, W., "Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders", Journel of Finance, Vol. 16, pp. 8–37, 1961.