〈研究論文〉

Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 13, No. 1, June. 1987

商習慣에 의한 在庫金利를 고려한 單一 製造라인의 複數製品 生産計劃 †

(A Single-Line Multi-Product Planning Problem Considering Inventory Interest Based on the Business Custom)

朴 承 憲*

Abstract

This paper deals with a single-facility multiproduct lot-size model requiring consideration of setup costs. Each product is demanded at the constant rate per unit time in the next particular period. Due to the limitation of the production capacity, some productions of total demand requirement in that period must be pre-produced.

The aim of this project is to determine when and how much of each product to make in order to minimize the total setup costs and inventory carrying-costs of all products. Also this paper contains the further realistic treatment of inventory carrying-costs.

1. 序 論

生産計劃에 있어서 Lot. Size등 經濟的인 分割生産方式을 구하는 많은 종류의 연구가 행하여져 왔다. 그대부분은 在庫維持費와 Set·up cost의 비용합계를 최소로 한것이 목적이나 定式化에 있어서는 "在庫維持費는 平均在庫量에 比例"한다는 것을 전제로 數式的展開를 하고 있는것이 보편적이다. 그러나 이전제가 성립하기 위해서는 在庫維持費의 중요한 要素인 在庫金利는 재고의 時間과 數量에 관해 比例的 이어야만 한다. 즉 생산을 위한 資材는 購入 즉시 代金을 지불하여 그시점 부터 在庫金利가 발생하는 것으로 간주하는 것이다.

그러나 在庫金利에 관해서는 이미 指適[4]되고 있는 바와같이 「1개월 단위로 總購入費를 지정된 날에 一括的으로 마감 계산하여 그후 一定期間後에 一括的으로 支拂」하는 商習慣을 가진 한국, 일본등 그밖의 몇개국에서는 특별한 경우를 제외하고 在庫金利가 平均在庫量에 비례

*仁荷大學校 工科大學 産業工學科

†本研究는 인하대학교 산업과학기술연구소의 지원에 의한것임.

한다고는 할수없다.(주1) 오히려 指定된 마감계산일을 전후하여 離散的으로 변화한다. 또 保管費에 관해서도 自會社의 창고에 보관하는 경우, 어느 일정의 許容 限度內에서는 재고량에 관계없이 一定値로 간주할수 있는등 在庫金利와 비슷한 議論이 성립되나 본연구의 대상에서는 제외 한다.

이상과 같은 관점에서 본연구에서는 전술의 商習慣下에 발생하는 現實의 Cash flow로 부터 직접 在庫金利를 평가하여, 單一製造라인 에서 複數製品에 관한 문제가 어떠한 基本構造를 갖는가를 검토하고, 그것에 근거한 最適解를 제시하고자 한다. 그리고 대상으로한 製品需要의 발생형태 로서는 에어콘, 수영복, 크리스마스 용품과 같이 年間 어떤 일정기간내에만 需要가 연속적으로 발생하는 경우를 대상으로 模型을 限定하나, 본연구가 今後 우리나라 商習慣을 고려한 현실에 부합된 연구의 기틀이 되었으면 한다.

2. 模型의 前提條件 및 定式化

2.1 模型의 前提條件

어떤 특정의 一個月間에 수요가 집중하여 全設備를 稼動하여도 設備能力이 부족하기 때문에 그일부를 事前에 生產(以後에는 先行生產 이라고 한다) 하기위한 組立공장에서의 생산계획 문제를 상정한다. 또한 수요집중기간 1개월 동안은 각제품은 극히 짧은 시간간격(近似的으로 連續으로 생각할 수 있을 정도)으로 出荷가 요구되며 그때 單一라인에서 複數의 製品을 생산한다. 구체적인 前提條件은 다음과 같다.

(1) 製造工程은 一段階工程으로 한다.

(2) 三種類의 製品 A, B, C를 單一製造라인에서 생산한다.(주2)

(3) 각제품의 需要量 D_A, D_B, D_C는 주어진 것으로 하며 어떤달의 月初부터 月末까지의 1개월(T單位 時間)간에 각각 一定速度 $d_A=D_A/T$, $d_B=D_B/T$, $d_C=D_C/T$로서 連續的으로 발생하는 것으로 한다.

(4) 品切은 認定하지 않는 것으로 한다.

(5) 尺度를 統一하기위해 각제품의 單位時間當생산량을제품 1개로 한다.

(6) 각제품 1개당의 材料費 및 變動加工費는 제품의 종류에 관계없이 一定値 V원으로 한다.

(7) 1회의 Set·up마다 일정의 費用 F 원이 들고 시간은 걸리지 않는 것으로 간주한다.

(8) 在庫保管費의 총액은 一定額으로 한다.

(9) 每月의 購入資材費는 月末에 마감하여 일정기일후에 一括的으로 支拂한다.(주3)

2.2 定式化

본연구 에서는 주어진 需要에 대응하기 위한 最適生產計劃을 고찰한다. 수요가 정해져 있기 때문에 어떠한 생산계획을 세워도 賣上收益의 額數와 時期가 변하지 않는다. 또한 자재구입액의 총액도 不變이나 그購入時期가 當月인가 前月인가에 따라 1개월분의 金利에 차이가 발생한다. 따라서 이문제는 金利의 差額과 Set·up 費用을 고려한 費用最小化가 목적이 된다 (그림 1 참조).

그러면 전제조건에 밝힌바와 같이 다음달 이후의 수요는 없는 것으로 하기 때문에 각제품 전부가 當月末 在庫가 0이 되는 생산계획을 세우기로 한다. 또 전제조건 (2), (3), (4)로 부터 어떠한 생산계획을 세워도 최소한 2종류의 제품은 어느정도의 量을 前月末까지 先行生產을 하여야만 한다. 當月內에서 n회(當月內 최초의 생산을 위한 Set·up을 포함) Set·up을 행하는 생산계획을 대상으로 先行生產量을 S_1 金利의率을 i로하면 在庫維持費와 Set·up비용 중에

(주1) 上記의 商習慣은 모든 경우를 의미하는것은 아니며 資材購入 거래처와 每月의 一括計算 마감일이 존재하는 경우를 의미한다.

(주2) 일반의 m種類(m>3)의 경우에도 확장가능 하나 數學的 定式化 및 說明이 煩雜함으로 3種類로 限定하였다.

(주3) 마감계산일과 需要開始時點이 一致하지 않는 경우에도 需要期間이 1개월 미만이면 동일하게 다룰수 있다.

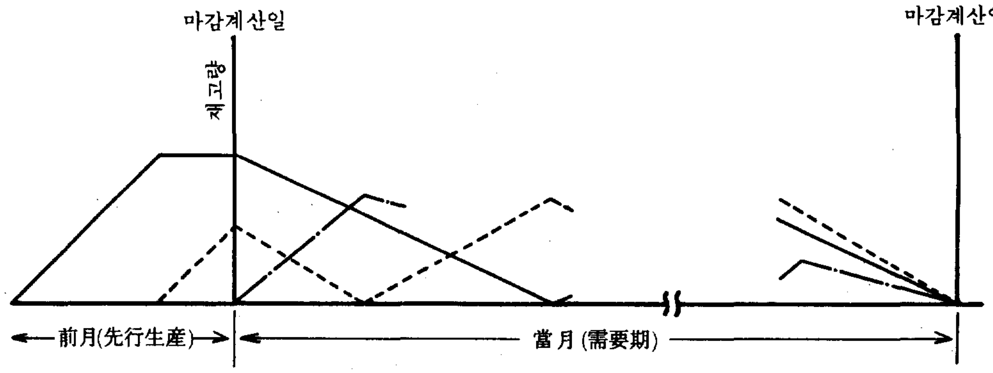

그림 1. 재고량 변동

서 最小化할 비용의 正味變動分은 先行生產을 위하여 구입한 자재의 金利增加分과 Set·up 비용의 合計로 歸着 되어지기 때문에 전제(6), (7)을 고려하면

$$iVS + nF \tag{1}$$

로 표현할수 있다.

다음으로 S를 評價하기 위해 생산계획을 구체적으로 표현하기로 한다. 우선 當月內에서生產順序를 指定하는 함수

$$f : \{1, 2, \cdots, n\} \rightarrow \{A, B, C\}$$

를 결정한다. 예를들어 $f(i) = A$ 이라면 제품A를 當月末부터 逆順으로 따져 第i番에서 생산한다고 읽는다(이와같이 생산순서와 시간의 경과를 逆順으로 지정한 것은 後述의 逆順解歸納法에 對應시키기 위한 便宜이다). 이때 $f(i+1) \neq A$ 이기 때문에 $3 \times 2^{n-1}$의 생산순서 f가 존재한다(그림 3 참조). 또 f의 $\{1, 2, \cdots, k\}$ $(1 \leq k < n)$ 에의 限定을 f_k로 표현한다. 즉 $f_k(i) = f(i)$, $(i = 1, \cdots, k)$

이와같이 n, f가 주어졌을때의 各製品의 先行 生產量을 x_{0A}, x_{0B}, x_{0C}로 표현하고當月末부터 세어 第i番에서 當月內 생산하는 제품f(i)의 생산량을 x_i로서 표현 한다면 전제(5)로 부터

$$\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \leq T \tag{2}$$

이어야만 한다. 다음에 이생산 방법이 當月內의 각제품의 總需要를 만족시키고 또한 月末在庫가 0이 되기 위해서는 예를들어 A제품에 관해서는

$$x_{0A} + \sum_{\substack{f(i)=A \\ 1 \leq i \leq n}} x_i = D_A \tag{3-A}$$

이어야만 한다. (제품B, C에 관해서도 同一)

月末부터 세어 제i번에서 제품f(i)의 生產開始時點을 t_i (時點만은 月初부터 계산한다. 따라서 $0 = t_n < t_{n-1} < \cdots < t_1 \leq T$)로 하고 t_i에서제품 f(i)의 재고량을 $x_{f(i)}(t_i)$ 또한 月初부터 t_i까지의 라인의 遊休時間의 합계를 W_i로 한다. 따라서 t_i로 부터 月末 T까지의 기간에 式(3-f(i))와 같은 論理로 適用시키면 전제(5)로 부터 모든 $i = 1, 2, \cdots, n$에 대하여

$$x_{f(i)}(t_i) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq i \\ f(j)=f(i)}} x_j = d_{f(i)} \left(T - \sum_{i+1 \leq j \leq n} x_j - W_i\right) \tag{4-i}$$

를 얻는다. 또한 이 생산 방법이 實行可能 하기 위해서는 전제(4)로 부터 $x_{f(i)}(t_i) \geq 0$ 이어야만 하고, 또한 $W_i \geq 0$을 만족 시켜야만 한다. 以上을 고려하면 식 (4-i)는

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq i \\ f(j)=f(i)}} x_j + d_{f(i)} \sum_{i+1 \leq j \leq n} x_j \leq D_{f(i)} \tag{5-i}$$

로 變換시킬수 있다.

이와 같이 Set·up 횟수 및 生產順序 n, f를

任意로 指定하였을 경우 실행 가능한 1개의 생산계획은 식(2), (3), (4)의 非陰解(x_1, x_2, … x_n, x_{0A}, x_{0B}, x_{0C})로서 표현할수 있다. 以後 간단하게 이 (n+3)次元 生產量 벡터를 $\mathbb{X}$ (≥ 0)로 한다. 또 $\mathbb{X}$의 제k ($1 \leq k \leq n$) 성분 까지의 한정을 $\mathbb{X}_K$로 표시한다. 즉 $\mathbb{X}_K = (x_1, x_2, \cdots, x_K)$.

생산계획 全體로서 식(1)을 最小로 하기 위해 본 연구에서는 우선 각 n에 대하여 최소의 先行生產 S_n^*을 달성하는 일단계의 생산계획을 구하고, 다음으로 통상의 限界分析의 手法을사용하여 最適 Set·up 횟수 n*를 구하는 방법을 채용한다.

그때의 총수요와 생산능력의 관계는 $D_A + D_B + D_C > T$인 것을 주로 상정하나 각각의 제품에 관해서는

$$D_A < T,\ D_B < T,\ D_C < T \tag{6}$$

로서 간주한다. 왜냐하면 실제 식(2), (3) 으로부터 任意의 實行可能한 생산계획 $\mathbb{X}$는

$$x_{0A} + x_{0B} + x_{0C} \geq D_A + D_B + D_C - T \tag{7}$$

를 만족하고, 더우기 等號가 성립하는 것은 $\mathbb{X}$가 식(2)를 等號로서 만족하는 경우 뿐이다. 예를들어 $D_A \geq T$라 하면 月初부터 月末까지 제품 A 만을 계속하여 생산할수 있기 때문에 그때의 Set.up 횟수는 1회이고 先行生產量은 $D_A + D_B + D_C - T \geq 0$이 되나 이생산 방법이 식(1)을 최소로 하는 생산계획이 되는 것은 식(7)과 n=1 인 점으로 부터 自明하다. 따라서 식(6)을 만족하지 않는 경우의 最適生產計劃은 自明하므로 본연구에서 제외하겠다. 또 식(6)의 條件下에서는

〔補助定理〕

「式(4)의 任意의 非陰解 $\mathbb{X} \geq 0$은 式(2)를 Strict한 不等號(<)로서 만족한다」는 것을i=1에 대한 식 (4-1)로부터 확인할 수 있다.

3. Set·up횟수 n을 指定하였을때의 最適生產計劃

3.1 生產順序와 實行可能한 生產方法

우선 生產順序 f를 임의로 指定한다. 이때制約條件式(3), (4) 下에서 $S = x_{0A} + x_{0B} + x_{0C}$를 최소로 하는 $\mathbb{X} \geq 0$를 구하는, 문제는 전형적인 線型計劃問題이다. 또한 명백하게 S_n^*를 실현하는 생산계획은 이線型計劃 問題가 $3 \times 2^{n-1}$의 生產順序中에서 先行生產量 最小가 되도록 f를 選擇하였을 때의 最適解인 것이다. 따라서 모든 가능한 f에 대하여 線型計劃을 풀면 해결되겠으나 이것을 그대로 실행한다는 것은 n이 증가함에 따라 각각의 문제의 規模가 커질뿐만아니라 다시 풀어야 하는 횟수도 指數的으로 증가하기 때문에 實用上 불가능에 가깝다.

본연구 에서는 이문제가 이하의 基本構造를 갖는점에 착안하여 $3 \times 2^{n-1}$의 생산순서에 대해 암묵적 열거(implict enumeration) 방법과 또한 各線型計劃을 풀지않고 S_n^*와 그에 대응하는 最適生產計劃을 구하겠다.

3.2 問題의 基本構造

우선 n, f에 대한 不等式(5)를 等號化시킨 방정식

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq i \\ f(j) = f(i)}} x_j + d_{f(i)} \sum_{i+1 \leq j \leq n} x_j = D_{f(i)} \tag{8-i}$$

에 대해 고찰한다. 連位1次方程式(3), (8)을

$\mathbb{X} M = (d_{f(1)}, \cdots d_{f(n)}, d_A, d_B, d_C)$

의 형태로 行列表現 하였을때의 行列 M은條件式(6)下에서 正則이 된다. 따라서 식(3), (8) 은 오직 한개의 解 $\overline{\mathbb{X}}^n$을 갖는다. 이때에는 $\overline{\mathbb{X}}^n$의 제n成分까지의 限定 $\overline{\mathbb{X}}_n^n$은 식(8)의 오직 한개의 解이며 逆으로 식(8)의 解를 $\overline{\mathbb{X}}_n^n$이라 하면式(3), (8)의 解 $\overline{\mathbb{X}}^n$은

$$\overline{\mathbb{X}}^n = (\overline{\mathbb{X}}_n^n,\ d_A \sum_{i_A+1 \leq j \leq n} \overline{x}_j^n,\ d_B \sum_{i_B+1 \leq j \leq n} \overline{x}_j^n,\ d_C \sum_{i_C+1 \leq j \leq n} \overline{x}_j^n) \tag{9-n}$$

으로 주어진다 여기서 i_A는 $f(i) = A$가 되는 최대의 i이다(B, C동일).

더우기 $f(n) = A$이라면 $i_A = n$이 되기 때문에 $n+1 \leq j \leq n$을 만족하는 j는 존재하지 않고 따라서 $d_A \sum_{i_A+1 \leq j \leq n} \overline{x}_j^n = 0$이 되어야만 한다. 또式(8)의 解 $\overline{\mathbb{X}}_n^n$이 非陰이라면 식(9-n)으로 정의되는 $\overline{\mathbb{X}}^n$도 非陰이다. 이상과 같이 $\overline{\mathbb{X}}^n$의 性質을

조사하려면 $\bar{X}^n_n$에 관해 검토하면 충분하다는것을 알수있다.

위와 同一하게 k(<n), f의 {1, …, k} 에의 限定 f_k에 대한 식(8)의 解를 $\bar{X}^k_k$라 하면

$\bar{X}^k_k=\gamma_{k+1}\bar{X}^{k+1}_k=\cdots=\gamma^{k+1}\cdots\gamma_n\bar{X}^n_k$ (10-k)

가 성립되는 것을 k, f_k에 대한 식(8)과 k+1, f_{k+1}에 대한 식(8-1)~(8-k)를 비교해 보면 확인할수 있다. 여기서 $\gamma_i=T/(T-\bar{x}^i_i)$, i=1, …, n이다. 따라서 k=1일때 $X^1_1=d_{f(1)}>0$ 이고 더우기 k(<n)에 대해서 $\bar{X}^k_k>0$이라면 $\bar{x}^{k+1}_{k+1}$은 식 (10-k)와 k+1, f_{k+1}에 대한 식 (8-(k+1))로 부터

$\bar{x}^{k+1}_{k+1}=T\bar{x}^k_{0,f(k+1)}/(T-d_{f(k+1)}+\bar{x}^k_{0,f(k+1)})<T$ (11-k)

로 주어진다. 生産順序의 定義에서 f(k+1) ≠ f(k)이기때문에 식(9-k)로 부터 $\bar{x}^k_{0,f(k+1)}>0$을 얻을수 있다. 따라서 $T>\bar{x}^{k+1}_{k+1}>0$이다 (條件式(6)으로 식(11-k)의 分母는 $\bar{x}^k_{0,f(k+1)}$ 보다 큰正數가 되는것의 注意). 이것으로 부터 $\gamma_{k+1}>0$이 되기 때문에 결국

$\bar{X}^{k+1}_{k+1}=(\bar{X}^{k+1}_k, \bar{x}^{k+1}_{k+1})=(\gamma^{-1}_{k+1}\bar{X}^k_k, \bar{x}^{k+1}_{k+1})>0$

이된다. 이상의 逆順解歸納法에 의해 $\bar{X}^n_n>0$ 따라서 $\bar{X}^n\geq 0$가 됨을 확인하였다. 이것은 任意의 n, f에 대해 식(3), (8)의 解 $\bar{X}^n$이 實行可能 임을 의미한다.

또한 식(11-k)는 $\bar{x}^{k+1}_{k+1}=\bar{x}^k_{0,f(k+1)}/\gamma_{k+1}(1-d_{f(k+1)})$의 형태로도 變換할수 있다. 따라서 $\bar{X}^{k+1}_{k+1}$은

$\bar{X}^{k+1}_{k+1}=\gamma^{-1}_{k+1}(\bar{X}^k_k, \bar{x}^k_{0,f(k+1)}/1-d_{f(k+1)})$ (12-k)

의 형태로도 표현할수 있다. 이것은 그림 2에 나타낸 바와같이 f(1)만을 當月內 生産하는 경우로부터 시작하여 f(k)까지 진행하였다면 段階k에 있어서 그하나 前의 제품f(k+1)의 先行生産量 $\bar{x}^k_{0,f(k+1)}$을 기울기 $(1-d_{f(k+1)})$로서 時間軸에 부딪칠때 까지 減少(즉 $f_{(k+1)}$의 先行生産量을 0으로함) 시키는 조작을 f(n)까지 반복한다. 또한 그때마다 時點 t_k와 當月末 時點 Z의 간격을 T로 하는 尺度로 부터 t_{k+1}과의Z의 간격을 T로 하는 尺度로 Scale變換 γ^{-1}_{k+1}을 중복시켜 가는것으로서 $\bar{X}^n$을 作圖에 의해서도 구할수 있다는 것을 표현하고 있다.

식(3), (5)의 任意의 非陰解 X^n에 대해서는 Scale 變換때 마다 Slack變數值가 변하기때문에 等號解 $\bar{X}^n$의 경우와 꼭같은 逆順解歸納法 이 되지는 않으나 식(12-k)까지 제시한 거의 同等한 性質을 適用할수 있다. 즉 X^n_n을 n, f에대한 식(3), (5)의 任意의 非陰解라 한다면 X^n_n은 식(5)의 단한개의 非陰解이며, 逆으로 X^n_n을 식(5)의 任意의 非陰解라 한다면

$$X^n=\Big(X^n_n,\ D_A-\sum_{\substack{1\le i\le n\\ f(i)=A}}x^n_i,\ D_B-\sum_{\substack{1\le i\le n\\ f(i)=B}}x^n_i,\ D_C-\sum_{\substack{1\le i\le n\\ f(i)=C}}x^n_i\Big) \qquad (13-n)$$

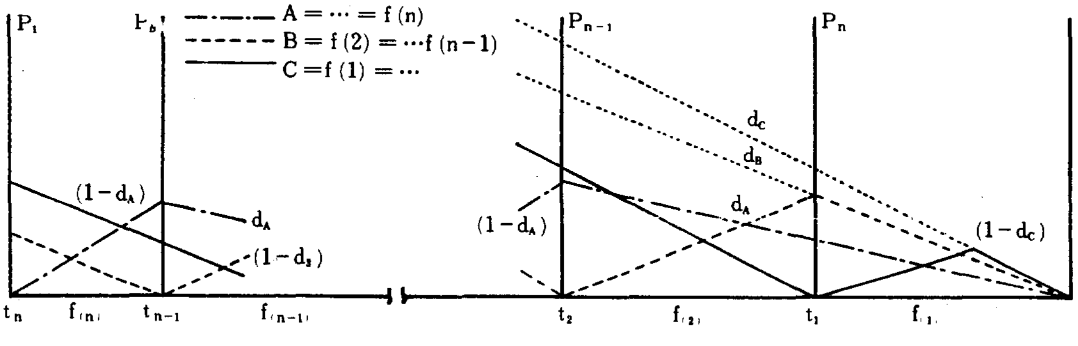

그림 2. 逆順解로서 X^f를 구할때의 在庫量 變動

으로 정의 되어진다. $\mathbb{X}^n$은 식(3), (5)의 1개의 非陰解가 된다. 더우기

$$\mathbb{X}_k^k=\beta_{k+1}\,\mathbb{X}_k^{k+1}=\cdots=\beta_{k+1}\cdots\beta_n\,\mathbb{X}_n^n \tag{14-k}$$

(단 $\beta_i=T/(T-x_i^i)$, $i=1,\cdots,n$)와 같이 歸納法的으로 정의 되어지는 $\mathbb{X}_k^k$는 $k\ (<n)$, f_k에 대하여 식(5)의 1개의 非陰解이다. 以上의 準備下에서

〔基本定理〕

「Set·up 횟수를 n으로 하여 f, f′를 $f(n)=f'(n)$, $f(n-1)=f'(n-1)$을 만족하는 2개의 임의의 生産順序로 한다(물론 f=f′이어도 무방함).

또한 $\overline{\mathbb{X}}^n$을 n, f에 대하여 식(3), (8)의 解 그리고 $\mathbb{X}^n$을 n, f′에 대한 식(3), (5)의 任意의 非陰解(等號解 이어도 무방함)로 하여 $\overline{\mathbb{X}}^{n-1}$, $\mathbb{X}^{n-1}$을 각각 $\overline{\mathbb{X}}^n$, $\mathbb{X}^n$으로 부터 식(9), (10), (13), (14)를 $n-1$, f_n 또는 f'_{n-1}에 適用시켜 生成되어지는 식(3), (8) 또는 식(3), (5)의 解로 한다.

이때 $\mathbb{X}^{n-1}$이 $\overline{\mathbb{X}}^{n-1}$에 대하여

$$\varDelta_{n-1}=(x_{0A}^{n-1}+x_{0B}^{n-1}+x_{0C}^{n-1})-(\bar{x}_{0A}^{n-1}+\bar{x}_{0B}^{n-1}+\bar{x}^{n-1})>0 \tag{15}$$

$$(x_{0A}^{n-1}-\bar{x}_{0A}^{n-1})\geqq-(D_A-\bar{x}_{0A}^{n-1})\ S_f^{n-1} \tag{16}$$

(B, C에 관해서도 同一)

을 만족한다면 $\mathbb{X}^n$과 $\overline{\mathbb{X}}^n$에 대하여 (여기에서 $\delta_f^{n-1}=(T-\sum_{1\leqq i\leqq n-1}x_i^{n-1})^{-1}\ \varDelta_{n-1}$, 식(15)와 補助定理로 부터 $\delta_f^{n-1}>0$)

$$\varDelta_n=(x_{0A}^n+x_{0B}^n+x_{0C}^n)-(\bar{x}_{0A}^n+\bar{x}_{0B}^n+\bar{x}_{0C}^n)>0$$

$$(x_{0A}^n-\bar{x}_{0A}^n)\geqq-(D_A-\bar{x}_{0A}^n)\ \delta_f^n$$

(B, C에 관해서도 同一)

을 만족한다. (여기에서 $\delta_f^n=(T-\sum_{1\leqq i\leqq n}\bar{x}_i^{n-1})^{-1}\ \varDelta_n>0$)」

이 定理(證明은 부록 참조)는 f, f′가 어떤 $k\ (<n)$에 대하여 $f(i)=f'(i)$, $i=k,\cdots,n$을 만족하는 적당한 $k\leqq i<n$로서 $\mathbb{X}^i$와 $\overline{\mathbb{X}}^i$의 사이에 일단 한번의 先行生産量의 優劣이 가지려고 동시에 附帶條件式(16)이 만족되어진다면 그 優劣關係는 $\mathbb{X}^n$과 $\overline{\mathbb{X}}^n$에 이르기 까지 계속해서 保存되어지는 것을 의미한다. 여기에서 附帶條件式(16)은 $\mathbb{X}^{n-1}$과 $\overline{\mathbb{X}}^{n-1}$의 간에, 어떤 제품의 先行生産量의 差가 先行生産量 全體의 差와 符號가 逆轉되어 있을 경우에 그比의 절대치가 生産方式 $\overline{\mathbb{X}}$를 실행 했을때의 식(2)의 양변의 차이 즉 餘裕時間과 그제품의 當月內 生産時間의 比率 以內에 있을것을 요구하는 것이다.

3.3 指定되어진 生産順序에 대한 先行生産 最小

이번에는 n, f를 임의로 고정시켰을 경우 식(3), (5)의 非陰解 $\mathbb{X}^n$중에서 S를 최소로 하는 生産方式이 식(3), (8)의 解 $\overline{\mathbb{X}}^n$이되는 즉 3.1에서 설명한 線型計劃의 等號最適性에 관하여 설명하겠다.

$\overline{\mathbb{X}}^n\neq\mathbb{X}^n$이라면 $\mathbb{X}_n^n$은 적어도 식(5-i)를 1개의 不等號로 만족한다. 따라서 식(14)에 의한 縮小操作을 반복해 가면 각 $\mathbb{X}_k^k$는 $k=1$이 될때까지 k, f_k에 대한 식(5-i)를 적어도 1개의 不等號로서 계속만족시키든가 또는 어떤k에서 $\mathbb{X}_k^k$가 k, f_k에 대한 식(8)의 解가 되든가 둘중의 한경우가 된다. 前者의 경우는 $\mathbb{X}_1^1<D_{f(1)}=\overline{\mathbb{X}}_1^1$이 되는것으로 부터 $\mathbb{X}'$가 $\overline{\mathbb{X}}'$에 대하여 식(15), (16)을 만족시키는 것을 알 수 있다. 後者의경우에는 $\mathbb{X}_{k+1}^{k+1}$은 $k+1$, f_{k+1}에 대한 식(5-i) 중 식(5-(k+1))만을 不等號로 만족시키고 나머지 k개는 等號로서 만족시켜야만 하지만 이것은 $x_{k+1}^{k+1}<\bar{x}_{k+1}^{k+1}$을 의미한다. 따라서 전자의 경우와 동일하게 $\mathbb{X}^{k+1}$이 $\overline{\mathbb{X}}^{k+1}$에 대하여 식(15), (16)을 만족시키는 것을 확인할수 있다. 어느경우라도 基本 定理로부터 $\mathbb{X}^n$은 $\overline{\mathbb{X}}^n$에 대하여 $\varDelta_n>0$을 만족한다. $\overline{\mathbb{X}}^n\geqq0$가 됨은 3.2에서 제시하였다. 따라서

〔定理 1〕

〔任意의 n과 f에 대하여 等號解 $\overline{\mathbb{X}}^n$은 식(3), (5)의 非陰解 중에서 S最小를 실현하는 線形計劃의 最適解이다.」

3.4 Branch and Exclude法의 應用

다음에는 임의로 n이 주어졌을 경우 $3\times2^{n-1}$

표 1. Branch & Exclude法의 數値例

T =600	$3\times2^{n-1}$	d_A 200	100	70	50
Set·up 횟수n	생산순서의 총개수	d_B 300	300	100	400
		d_C 400	500	730	450
		$f\in H_n$ 의 개수			
8	384	23	17	18	17
14	42576	20	21	21	17
20	1572864	19	22	23	19

의 生産順序(그림 3 참조) 全體에 대한 계산을 피하기 위해 基本定理를 應用하여 다음과 같은 branch and exclude法을 사용한다. 구체적인 알고리즘은 아래와 같다.

(1) $n=1$, $G_1=\{f:\{1\}\rightarrow\{A,B,C\}\}$로 한다.

(2) $f(n)=f'(n)$을 만족하는 2개의 다른 f, $f'\in G_n$에 대하여 $\bar{\mathbb{X}}$(또는$\bar{\mathbb{X}}'$)가 $\bar{\mathbb{X}}'$(또는$\bar{\mathbb{X}}$)에 대해서 식(15), (16)을 만족한다면, f(또는f')를 exclude하고 그렇지 않으면 兩方을 남겨둔다. 이 조작을 $f(n)=f'(n)$인 모든 f, $f'\in G_n$의 双에 대하여 행하고 최후까지 남아있는 生産順序 의 集合을 $H_n(\subset G_n)$으로 한다.

(3) $n+1$에 대한 生産順序로서 그$\{1,\cdots,n\}$에의 限定이 H_n에 포함되는것 전부의 集合을 G_{n+1}로 한다.

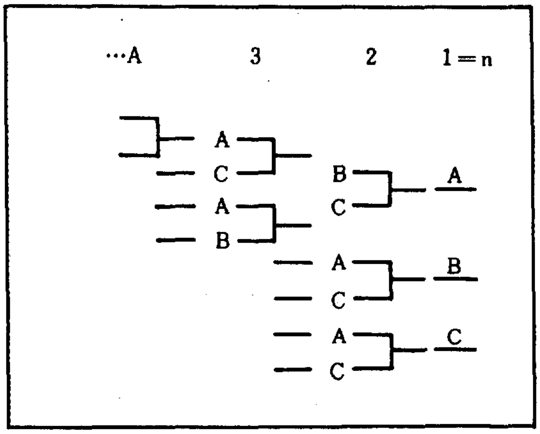

그림 3. n에의한 생산순서

(4) n을 n+1로서 바꾸어 節次(2)에 되돌아간다.

上記의 節次를 실행하였을때 임의의 n, f 에 대하여 f의 $\{1,\cdots,k\}$에의 限定이 H_k에 포함되지 않는 $k(<n)$가 한개라도 存在한다면 基本定理에 의하여 f가 S_n^*를 달성하는 生産順序 일수는 없다. 따라서

〔定理 2〕

「임의의 Set·up횟수 n에 대해 S_n^*를 달성하는 生産順序 f는 항상 exclude 되지 않는다. 즉 $f\in H_n$」

표 1은 알고리즘이 어느정도 有效한가를 조사하기 위해 몇개의 數値例로서 컴퓨터에 실험을 행한 결과이다. 예를들어 Set·up 횟수가 $n=20$일때에는 약15萬 경우의 실행 가능한 生産順序가 있으나 이알고리즘에 의하면 불과 20경우 전후의 生産順序에 관해서만 連立 1次方程式을 풀면 先行生産量을 最小로 하는 생산계획을 얻을수 있다.

4. 最適生産計劃

4.1 최적Set·up 횟수의 결정

n에 대한 最小先行生産量 S_n^*및 이를 달성하는 생산계획은 3.4에 의해 구해진다. $S_n^*-S_{n-1}^*=\varDelta S_n$이라 하면 1회의 Set·up횟수 증가에 따른 金利의 減小分은 $iV\varDelta S_n$으로 주어진다($D_A+D_B+D_C$) T 의 경우에도 $\varDelta S_n>0$에 대한것은 3.2에서 설명하였다). 한편 Set·up

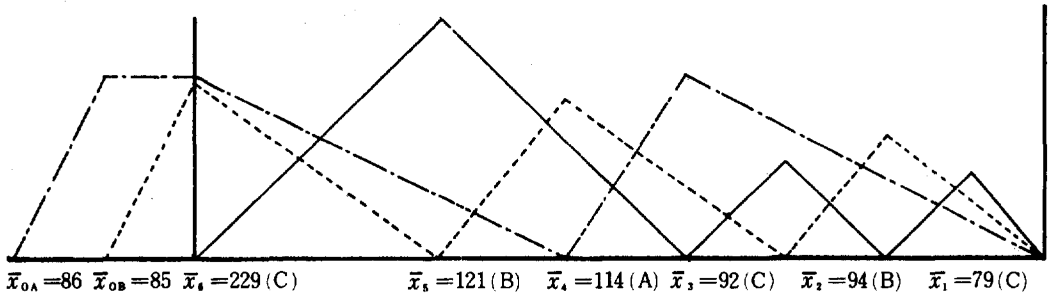

그림 4. 최적생산계획의 數値例

비용의 增分은 F이기 때문에 최적 Set·up 횟수 n*를 구하기 위해서는 不等式

$$iV\varDelta S_n > F \tag{17}$$

의 不等號가 처음으로 逆轉되는 하나 前의 n을 n*로 하면 된다.

4.2 最適生産計劃의 數値例

$D_A=200$, $D_B=300$, $D_C=400$, $T=800$의 경우에 예를들어 不等式(17)의 한계가 $n=6$ 까지 성립한다고 하자. 그때 $3\times2^{6-1}=96$ 경우의 生産可能한 順序中에서 先行生産量을 최소로 하는 生産方式은 그림 4 와 같다. 이解를 검토하여 보면 生産順序는 (f(1), …, f(6)) = (C, B, C, A, B, C) 이며 Cyclic한 성질을 갖지 않는다. 또 예를들어 제품C 의 각회의 生産量은 $x_1=79$, $x_3=92$, $x_6=229$와 같은등 從來의 等量의 Lot·Size生産과는 대단히 異質的인 解인것을 확인할수있다.

5. 結 論

본 연구는 購入資材代金의 每月 一括支拂 이라는 한국, 일본등의 商習慣을 고려하여 마감계산일의 전후로 購入資材에 관한 在庫金利가 離散的으로 변화한다는 입장에서 연속적인 短期需要에 대응하는 單一라인의 複數製品에 관한 月次生産計劃 模型을 작성하여 最適生産計劃을 구하는 방법을 검토하였다.

그결과 이론적으로는 等號最適性(定理 1) 을 제시함과 동시에 數値例를 통하여 最適解의 Lot·Size가 等量이 아닌 性質과, noncyclical 한 性質도 확인할수 있었다. 더우기 생산계획의 優劣의 移轉性(基本定理)과 等號最適性에 착안하여 실용적 알고리즘이며 항상 最適解를 구할수 있는 解法(定理 2와 branch & exclude法)을 얻을수가 있었다.

本模型을 長期需要의 일상적 생산의 경우에도 적용할수 있도록 확장하는 것은 今後의 課題라 하겠다.

References

1. Al, D., Panayiotopoulos, J. C. and Adam, N. R. : "The Dynamic Lot-Sizing Problem for Multiple Items Under Limited Capacity," AIIE, pp. 294-303, Vol. 13, No. 4 (1981)
2. Balinski, M. L. : "Integer Programing : Methods, Uses, Computation," Mangae. Sci., pp. 253-313, Vol. 12 (1965)
3. Gilmore, P. C. and Gomory, R. E. : "Multistage Cutting Stock Problem of Two and More Dimensions,"
4. 千住鎭雄 :「經營科學を生かしてうには(2)」 オペレーションズ・リサーチ, Vol. 23, No. 4 (1978)
5. 千住鎭雄 :「經濟性工學の應用」, 日本能率協會 (1983)
6. 村松林太郎 :「生産管理」, 朝倉書店 (1976)
7. 秋庭雅夫, 佐久間章行, 高橋弘之, 吉田祐夫 :「生産管理」, 日本規格協會 (1980)

附　錄
(基本定理 證明의 概略)

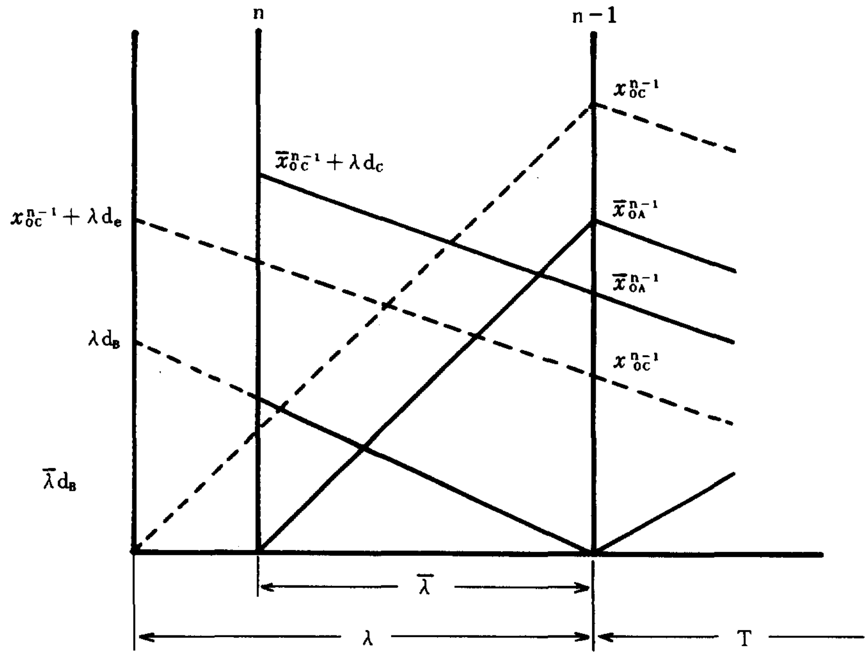

그림 5. 제품A를 當月에 생산한 경우

이정리의 證明은 $\mathbb{X}^{n-1}$, $\bar{\mathbb{X}}^{n-1}$부터 $\mathbb{X}^{n}$, $\bar{\mathbb{X}}^{n}$에의 變換의 過程을 일어날수 있는 경우마다 追跡하면 얻을수 있다. 그러나 여기서는 紙面의 관계로 $x_{0, n-1}^{n-1} = x_{0, n}^{n} = 0$인 경우에 限해서 證明의 概略

을 제시하는데 그친다.

記號를 간략히하여 $f(n)=f'(n)=A$, $f(n-1)=f'(n-1)=B$ 로 하여 $n-1$ 에 대하여 식(9), (10), (13), (14)를 適用하면(그림 5 참조)

$$\varDelta_n=(O+\beta_n^{-1}d_B\lambda+\beta_n^{-1}(x_{0C}^{n-1}+d_C\lambda))-(O+\gamma_n^{-1}d_B\bar{\lambda}+\gamma_n^{-1}(x_{0C}^{n-1}+d_C\bar{\lambda}))$$

가 된다. 여기서 $\lambda=x_{0A}^{n-1}/(1-d_A)$, $\bar{\lambda}=x_{0A}^{n-1}/(1-d_A)$ 이다. 이식을 展開하여 나아가면 결국

$$\varDelta_n=\gamma_n^{-1}\beta_n^{-1}(T-D_A)^{-1}\{(D_B+D_C-\bar{x}_{0C}^{n-1})\varDelta_{n-1}+(T-\sum_{1\leq i\leq n-1}\bar{x}_i^{n-1})(x_{0C}^{n-1}-\bar{x}_{0C}^{n-1})\} \qquad (18)$$

를 얻는다. 이때 $(x_{0C}^{n-1}-\bar{x}_{0C}^{n-1})>0$ 이라면, 補助定理와 식(6), (15)로부터 $\varDelta_n>0$ 가 됨을 알수있다. 그림 5 와 같이 $(x_{0C}^{n-1}-\bar{x}_{0C}^{n-1})<0$ 의 경우는 附帶條件式(16)과 補助定理에 의하여

$$(T-\sum_{1\leq i\leq n-1}\bar{x}_i^{n-1})(x_{0C}^{n-1}-\bar{x}_{0C}^{n-1})\geqq-(D_C-\bar{x}_{0C}^{n-1})\varDelta_{n-1}$$

이 되기 때문에 식(18)의 중괄호내의 값은 $D_B\varDelta_{n-1}$ 이상 인것을 알수있다. 따라서 이경우도 식(6), (15)에 의해 $\varDelta_n>0$ 가 얻어진다.

附帶條件式(16)이 移轉하는 것을 제시하려면 좀더 복잡한 計算節次를 요하나 本質的으로는 $\varDelta_n>0$ 의 證明과 동일한 조작을 행하면 된다.