

# 效果的인 工程能力의 解析技法에 관한 研究

## An Effective Analyzing Method of Process Capability

宋 瑞 日\*  
黃 義 徹\*\*

### ABSTRACT

It is common that the process capability fluctuates as time passes, but concentrates to the mean value. To keep up process capability with given limits is vital to stability of process.

Various control charts, especially  $\sigma$ -chart, have been used for analyzing process capability, but it sometimes can not give distinct answer.

So this paper introduces another analyzing method by ARMA (autoregressive moving average) which is originally developed for forecasting, and demonstrates the analyzing methodology through a case study.

### 1. 序 論

工程能力(process capability)은 工程을 이루는 要素, 즉 原材料의 品質水準, 機械의 狀態, 作業者의 熟練度, 作業方法 등에 따라 變化할 뿐만 아니라 測定時點에 따라서도 약간씩 變化한다.

工程能力値는 주어진 規格에서의 公差에 대한 工程의 自然公差(natural tolerance)의 比로 나타내어지기 때문에 이는 散布의 크기에 의하여 左右된다. 따라서 安定된 散布를 維持한다는 것은 管理水準의 向上이라고도 볼 수 있으

며, 同一 規格下에서의 安定된 작은 散布는 技術的인 優位를 말한다고도 볼 수 있다.

散布의 크기가 安定狀態인가의 與否判定과 그 管理는  $\sigma$ -管理圖에 의하여 할 수 있다.  $\sigma$ -管理圖에서는 다른 管理圖와 마찬가지로 plot된 點이 上限管理限界(UCL; Upper Control Limit), 下限管理限界(LCL; Lower Control Limit)를 벗어나는지의 與否와 아울러 plot된 點의 無作爲性(randomness) 調査로서 傾向(trend), 週期(cycle), 連(run), 偏向性 등을 問題로 삼는다. 그러나 이들을 直觀的으로 찾아내지 못할 정도의

\* 東亞大學校 工科大学 産業工學科  
\*\* 漢陽大學校 工科大学 産業工學科

모호한 狀態에 대한 判定은 쉽지 않다.

따라서 本 研究에서는 ARMA(autoregressive/moving average)方法을 이용하여 工程散布의 變化를 分析하는 方法을 提示하고자 한다.

## 2. 理 論

### 2-1. ARMA의 發達

ARMA는 自己回歸(AR; autoregressive) model과 移動平均(MA; moving average) model의 合成 model이다.

AR model은 Yule(1926)에 의하여 提起되었고, Walker(1931)에 의하여 一般化되었다. 또한 MA model은 Slutsky(1937)에 의하여 처음으로 사용되었으며, 두 model의 合成인 AR-MA model은 Wold(1938)에 의하여 理論的인 基礎가 提供되었다고 볼 수 있다. 이러한 AR-MA model은 주로 效果的인 識別(identification) 및 推定節次와 季節的인 時系列 變動的 豫測에 간간이 使用되어 왔다.

이러한 ARMA model이 學界와 產業界에 널리 알려지고 폭넓게 使用되기 시작한 것은 Box와 Jenkins(1970)가 ARMA model을 利用하여 無變動時系列(univariate time series)의 解析에 더욱 간편한 方法을 開發함으로써이며, 오늘날에는 이를 Box-Jenkins method라고 부르고 있다.

### 2-2. ARMA의 理論

時系列 現像의 豫測에는 平滑法(smoothing technique)과 分割法(decomposition)으로 나누어 볼 수 있다. 예를 들어 單純平滑法에서는

$$F_{t+1} = F_t + \alpha(X_t - F_t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

여기서  $F_t = F_{t-1} + \alpha(X_{t-1} - F_{t-1})$ 로 쓸 수 있다. 따라서  $F_{t+1}$ 은

$$F_{t+1} = F_{t-1} + \alpha(X_{t-1} - F_{t-1}) + \alpha(X_t - F_t) \quad \dots\dots\dots(2)$$

여기서  $F_{t-1} = F_{t-2} + \alpha(X_{t-2} - F_{t-2})$ 가 되고, 다시

$$F_{t+1} = F_{t-2} + \alpha(X_{t-2} - F_{t-2}) + \alpha(X_{t-1} - F_{t-1}) + \alpha(X_t - F_t) \quad \dots\dots\dots (3)$$

이 되며 계속하여 擴張可能하다.

한편 分割法에서는 時系列 變化上的 季節性(seasonality), 傾向, 週期性, 無作為性(rand-omness) 등을 각각 분리하여 分析하고 豫測하는 方法을 취한다.

또 多重回歸의 一般式은

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots\dots\dots + b_kX_k + U \quad \dots\dots\dots (4)$$

로 나타낼 수 있으며, 여기에서의  $U$ 는 誤差項으로서 이는  $N(0, \sigma^2)$ 의 分布를 따른다. 式(4)에서 각 變數들의 關係는  $X_1 = Y_{t-1}$ ,  $X_2 = Y_{t-2}$ ,  $\dots\dots$ ,  $X_k = Y_{t-k}$ 로 定義되므로 式(4)는

$$Y_t = a + b_1Y_{t-1} + b_2Y_{t-2} + \dots\dots + b_kY_{t-k} + U_t \quad \dots\dots\dots (5)$$

로 쓸 수 있다.

式(4), (5)는 一般的으로 볼 수 있는 回歸方程式이지만 式(5)의 *r. h. s.*가 獨立變數  $Y_t$ 의 前期值(previous value)임에 반하여 式(4)의 *r. h. s.*는 다른 獨立變數라는 점에서 差異가 있다. 이와 같이 독립변수를 從屬變數의 時遲延值(time lagged value)를 취한 回歸方程式을 自己回歸(AR) model이라고 한다.

그러나 式(5)와 같은 自己回歸 model에서는 獨立變數가 相互從屬이기 때문에 誤差의 獨立性이 쉽게 이루어지지 않고,  $Y_t$ 의 數를 얼마만큼 해야 할 것인가를 決定하는 것이 쉽지 않기 때문에 이를 보호할 수 있는 移動平均法(MA)과 연결하여 使用하게 되는데 이를 ARMA라

고 한다.

2-3. 自己相關係數  
(Autocorrelation Coefficient)

式(5)와 같이 쓸 수 있는 自己回歸關係에서  $Y_t$ 와  $Y_{t-1}$  사이의 相關係數는

$$r_{(Y_t, Y_{t-1})} = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (Y_t - \bar{Y}_t)(Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-1})}{\sigma_{Y_t} \cdot \sigma_{Y_{t-1}}} \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{여기서 } \sigma_{Y_t} = \sqrt{\frac{\sum (Y_t - \bar{Y}_t)^2}{n-1}}$$

$$\sigma_{Y_{t-1}} = \sqrt{\frac{\sum (Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-1})^2}{n-1}}$$

으로 쓸 수 있다. 여기서 만일  $Y_t$ 가 水平時系列(stationary; data 가운데 상승하거나 하강하는 것이 없는 경우를 말하며,  $x$ 軸 또는 時間軸에 대하여 水平이 되어야 한다. 다시 말해서 data가 시간에 獨立하여 一定한 平均值주위에서 散布할 때를 말한다.)이면  $\bar{Y}_t = \bar{Y}_{t-1}$ 가 되므로 時遲延間隔(time lag)  $k$ 에 대한 自己相關係數를  $r_k$ 라 하면, 이는

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (Y_t - \bar{Y})(\bar{Y}_{t+k} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2} \dots\dots (7)$$

로 쓸 수 있다.  $n$ 이 커지면  $r_k$ 의 값을 구하기 힘들어지나 computer에 의하여 계산하면 훨씬 손쉬워진다.

2-4. 無作為性(Randomness)의 檢定

(1) 自己相關의 分布에 의한 方法

無作為亂數에 대한 時系列의 自己相關係數는 理論的으로는 0(zero)가 되어야 한다. 또 有限數의 試料인 경우의 自己相關係數의 分布(time lag=1, 2, 3, ...)는  $N[0, (\frac{1}{\sqrt{n}})^2]$  임이 Anderson(1942), Batlett(1946), Quenouille(1949)에 의하여 밝혀져 있다.

만일 母相關係數가  $\rho_k$ 라하면 試料의 自己相關係數도  $\rho_k$ 에 가까운 값이어야 할 것이다.

따라서 time lag  $k$ 의 信賴區間은

$$-u(\alpha) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \leq r_k \leq u(\alpha) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \dots\dots\dots (8)$$

로 나타낼 수 있다. 즉  $r_k$ 의 값이 이 범위에 속할 때 data는 random하다고 할 수 있는 것이다. (信賴限界  $1-\alpha$ )

(2)  $\chi^2$ -檢定에 의한 方法

이것은 自己相關係數가 0(zero)에 有意差가 있는가를 檢定하는 方法으로서 Box와 Price(1970)가 開發한 方法이며 Box-Price의 Q-statistic이라고 알려져 있다. data로부터 計算한 Q-statistic과  $\chi^2(\phi, \alpha)$ 를 比較하여

$$Q\text{-statistic} < \chi^2(\phi, \alpha) \dots\dots\dots (9)$$

가 되면 歸無假說은 채택되어 有意差가 認定되지 않는다. 즉 data는 無作為하다고 볼 수 있다. 여기서 Q-statistic은 式(10)과 같다.

$$Q\text{-statistic} = n \sum_{k=1}^m r_k^2 \dots\dots\dots (10)$$

단,  $n$ ; 최대의 時遲延間隔

2-5. 傾向 및 週期性的의 識別

data가 stationarity이면 第2, 第3의 time lag가 되며 自己相關의 값이 0(zero)으로 떨어지기 때문에 stationarity를 찾아내기가 쉽다. nonstationarity인 時系列에서는 어느 기간 동안엔 0과는 현격한 차이가 있기 때문에 傾向을 찾아낼 수 있다.

또한 自己相關係數가 어떤 間隔으로 0에 有意的인 값이 出現될 때 data는 季節性이 있다고 하며, 이는 data가 週期的인 變化(cyclic change)를 한다고 할 수 있다. 이러한 變化가

복합적으로 存在하면 이를 쉽게 찾아내기가 어렵게 된다. 이 때는 傾向을 먼저 찾아내고 差減法(differencing method)에 의하여 data를 stationary로 바꾸어서 季節性을 찾아야 한다.

### 3. 適用事例

#### 3-1. 資 料

A社의 工程能力을 解析하기 위하여 每時間마다 random하게  $n=5$ 의 試料를 취하여 그 散布를 調査한 結果는 Table 1과 같다. 調査對象品目の 規格은  $71.5 \pm 1.5\text{cm}$ 로서 公差는 3.0cm이다.

Table 1. Process variations for A company

$k$	$\sigma_i$	$C_{pi}$	$\sigma_i \times 100$	$k$	$\sigma_i$	$C_{pi}$	$\sigma_i \times 100$
1	0.52	0.96	52	13	0.45	1.11	45
2	0.49	1.02	49	14	0.46	1.09	46
3	0.48	1.04	48	15	0.45	1.11	45
4	0.48	1.04	48	16	0.46	1.09	46
5	0.45	1.11	45	17	0.53	0.94	53
6	0.46	1.09	46	18	0.52	0.96	52
7	0.45	1.11	45	19	0.50	1.00	50
8	0.45	1.11	45	20	0.48	1.04	48
9	0.50	1.00	50	21	0.48	1.04	48
10	0.48	1.04	48	22	0.46	1.09	46
11	0.48	1.04	48	23	0.47	1.06	47
12	0.46	1.09	46	24	0.46	1.09	46

#### 3-2. $\sigma$ -管理圖에 의한 工程能力의 解析

$\sigma$ -管理圖에서의 管理限界線의 算定은 母標準偏差  $\sigma'$ 에 대한 基準  $\sigma''$ 이 주어져 있는 경우와 주어지지 않는 경우로 나누어 생각할 수 있다.  $\sigma''$ 이 주어져 있는 경우  $\sigma$ 의 分布는

$$\left. \begin{aligned} E(\sigma) &= c_4 \sigma'' \\ D(\sigma) &= \sqrt{1 - c_4^2} \cdot \sigma'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

가 되므로

$$CL = c_4 \sigma'' \quad \left. \vphantom{CL} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} UCL &= c_4 \sigma'' + 3\sigma''\sqrt{1 - c_4^2} \\ &= (c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2})\sigma'' \\ &= B_2 \sigma'' \\ LCL &= c_4 \sigma'' - 3\sigma''\sqrt{1 - c_4^2} \\ &= (c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2})\sigma'' \\ &= B_1 \sigma'' \end{aligned} \right\} \dots\dots (12)$$

가 된다.

또 母標準偏差  $\sigma'$ 를 모르는 경우에는

$$\left. \begin{aligned} E(\sigma) &= \bar{\sigma} / c_4 = c_4(\bar{\sigma} / c_4) = \bar{\sigma} \\ D(\sigma) &= \bar{\sigma} \sqrt{1 - c_4^2} / c_4 \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

이므로, 이 경우의 管理限界線은

$$\left. \begin{aligned} CL &= \bar{\sigma} \\ UCL &= \bar{\sigma} + 3 \cdot \frac{\bar{\sigma}}{c_4} \cdot \sqrt{1 - c_4^2} \\ &= \left( 1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \right) \cdot \bar{\sigma} \\ &= B_4 \bar{\sigma} \\ LCL &= \bar{\sigma} - 3 \cdot \frac{\bar{\sigma}}{c_4} \cdot \sqrt{1 - c_4^2} \\ &= \left( 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \right) \cdot \bar{\sigma} \\ &= B_3 \bar{\sigma} \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

가 된다. 따라서 本事例에서는  $\sigma'$ 를 모르는 경우에 해당하므로 式(14)에 의하여 구해 보면,  $n=5$  때의  $B_3=0$ ,  $B_4=1.964$  이고, Table 1에 의하여  $\sigma$ -管理圖를 作成하면 Fig. 1과 같고, 管理限界는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} CL &= 0.476 \\ UCL &= 0.935 \\ LCL &= - \end{aligned}$$

Fig. 1에서는 UCL, LCL을 벗어난 점이 없고 傾向도 없다. 또한 plot된 점들이 偏向性을 나타내지도 않는다. 다만 전체적으로 볼 때 過期性이 있는 것 같으나 確證할만한 근거를 提示할 수가 없다.

따라서 散布의 變動은 安定狀態라고 判斷할 수 있다.

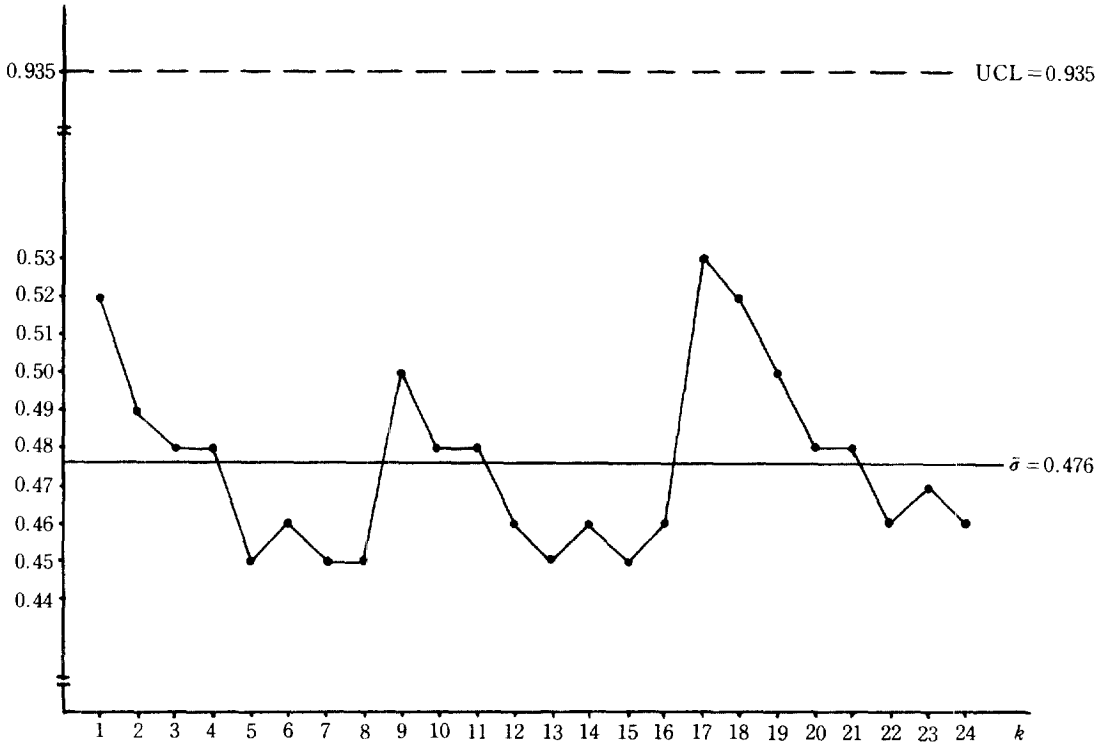


Fig. 1.  $\sigma$ -control chart for A company

3-3. ARMA에 의한 工程能力의 解析

로 간주하고 각각의 標準偏差에 100배를 하여 變數變換하면 Table 2와 같다.

(1) 自己相關係數의 算定

Table 1과 같이 얻어진 data를 時系列 data

Table 2. Time series data for process variations of A company

time lag	original value $Y_i = \sigma_i \times 100$	time lag	original value $Y_i = \sigma_i \times 100$
1	52	13	45
2	49	14	46
3	48	15	45
4	48	16	46
5	45	17	53
6	46	18	52
7	45	19	50
8	45	20	48
9	50	21	48
10	48	22	46
11	48	23	47
12	46	24	46

Table 3. Autocorrelation coefficients for time lag  $k$

time lag ( $k$ )	autocorrelation coefficient ( $r_k$ )	time lag ( $k$ )	autocorrelation coefficient ( $r_k$ )
1	0.45419	13	-2.20905
2	0.08890	14	-0.11833
3	-0.18689	15	0.02609
4	-0.45358	16	0.29035
5	-0.36226	17	0.24515
6	-0.21936	18	0.11195
7	0.01911	19	0.04248
8	0.39108	20	-0.01032
9	0.14715	21	-0.06462
10	-0.04217	22	-0.03701
11	-0.21936	23	-0.05340
12	-0.31159	24	---

Table 2의 data를 利用하여 時遲延間隔  $k=1, 2, 3, \dots$  에 대하여 自己相關係數를 式(7)에 의하여 求한 結果는 Table 3과 같고, Table 3의  $r_k$ 의 값은 HP 3000 II에 의하여 求하였다.

(2) 無作為性的 檢定

Table 3에서 求한 各々の 時遲延間隔  $k=1, 2, 3, \dots, n-k$ 에 대한 自己相關係數를 圖表化하면 Fig. 2와 같다. plot된 23個의 點이 random한가를 檢定하기 위하여 95%의 信賴水準으로 式(8)에 의하여 計算해 보면  $\pm 1.96 \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.400$

이 된다.

따라서 信賴下限 CL(L)은  $-0.4000$ , 信賴上限 CL(U)은  $+0.400$ 이므로  $r_1$ 과  $r_4$ 가 限界를 벗어나며,  $r_8$ 은 CL(U)를 벗어나지는 않으나 限界 가까이 있음을 알 수 있다.

또한 式(10)에 의하여  $\chi^2$ -檢定을 해보면  $Q$ -statistic  $= 23 \cdot \sum_{k=1}^{23} r_k^2 = 27.456$ 이 되어  $\chi^2(22, 0.05) = 33.9244$ 이므로 歸無假說이 채택된다. 즉 全體 23개의 點은 random하지 않다고 할 수 없다는 結果가 된다.

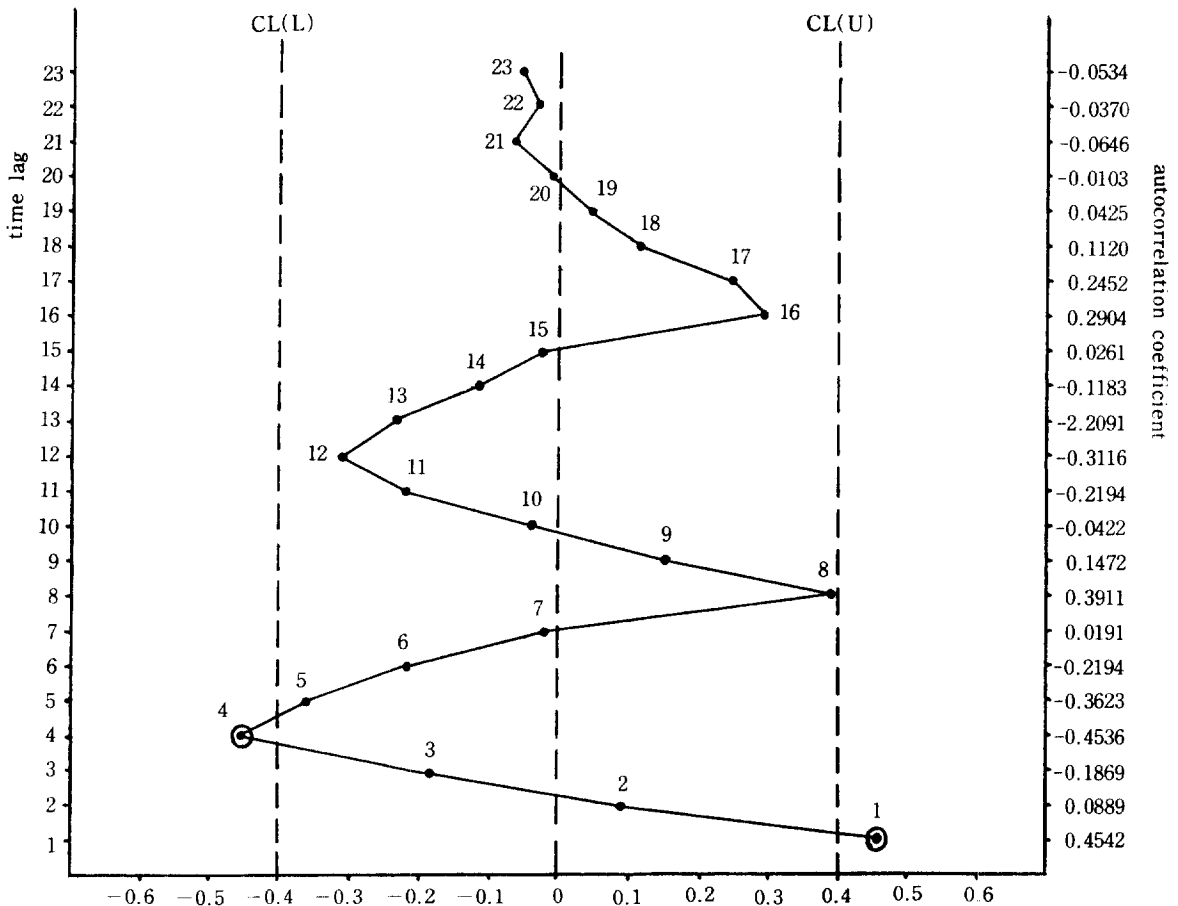


Fig. 2. An analysis of process capabilities by autocorrelation coefficients

以上の檢定結果에서는 全體的인 點의 plotting은 대체로 random 하나 局部的으로 두개의 점( $r_1, r_4$ )은 0와 有意差가 있다는 結論을 얻을 수 있다.

### (3) 傾向 및 週期性的의 識別

data가 stationary이면  $r_2, r_3$  이후의 點이 갑자기 0 이하로 뚝 떨어지게 된다. Fig. 2에서도  $r_3 = -0.1869$ 로서 0 이하로 떨어졌다. 따라서 Fig. 2에서는 상승 또는 하강의 傾向은 없다는 것을 쉽게 알 수 있다.

또한 自己相關係數가 어떤 間隔으로 0에 有意的인 값이 出現될 때 data는 季節性이 있다고 할 수 있다. Fig. 2에서도 보면  $r_1 = 0.4542$ ,  $r_8 = -0.4536$ ,  $r_8 = 0.3911$ ,  $r_{12} = -0.3116$ ,  $r_{16} = 0.2904$ 로서 대개  $k = 8$ 의 間隔으로 하나의 週期를 이루는 것을 볼 수 있다. 이는 工程의 散布에 週期性이 있음을 意味한다.

## 4. 結 論

以上과 같이 工程能力을 正確히 解析하고 管

理해 나가기 위한 合理的인 方法을 모색하고자  $\sigma$ -管理圖에 의한 解析方法과 ARMA에 의한 解析方法을 比較하여 보았다.

事例에서도 밝혀진 바와 같이  $\sigma$ -管理圖에서 확실히 밝혀지 못하는 工程情報도 自己相關係數를 利用하면 보다 效率的으로 밝혀낼 수 있다. 工程能力이  $k = 8$ 의 間隔으로 週期性을 가지는 原因으로서는

- ① 作業準備가 不充分하지 않는가?
- ② 機械를 充分히 warming시켰는가?
- ③ 出勤直後 作業者的의 情緒狀態는 安靜되어 있는가?
- ④ 作業者가 熟練되어 있는가?
- ⑤ 前日 退勤後 過飲, 過勞하지 않았는가?

등의 作業者를 中心으로 調査해 보면 그 原因이 밝혀질 것으로 생각된다.

또 根本的으로 全體의 工程能力指數는  $C_P = 3.0/6 \times 0.476 = 1.050$ 으로서 2等級 工程이므로 1等級 工程이 될 수 있게 管理해 나가야 할 것이다.

## 參 考 文 獻

1. George E.P. Box and Gwilym M. Jenkins (1976), "Time Series Analysis forecasting and Control", Holden-Day, Inc.
2. Sangit Chatterjee and Jonathan F. Bard (1985), "A Comparison of Box-Jenkins Time Series Models with Autoregressive Processes", IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. SMC-15, No. 2, March/April, 252-259.
3. Armand V. Feigenbaum (1983), "Total Quality Control", 3rd ed., McGraw-Hill.
4. Eugene L. Grant and Richard S. Leavenworth (1980), "Statistical Quality Control", 5th ed., McGraw-Hill.
5. Spyros Makridakis & Steven C. Wheelwright (1978), "Forecasting; Methods & Applications", John Wiley & Sons.
6. Charles R. Nelson (1973), "Applied Time Series Analysis for Managerial Forecasting", Holden-Day, Inc.
7. 田中英明・中川善明・狩野紀昭(1984), "工程能力의 公差決定への反映", 品質管理, Vol. 35, No. 5 臨時增刊号, 59~65
8. 金成寅(1985), "관리도", 博英社