Journal of the KSQC
Vol. 15, No. 1, 1987

修理可能한 製品의 最適 事後保證期間의 設定
Optimal Warranty Period for Repairable Goods

金 原 中*
李 根 熙**

ABSTRACT

This paper discusses the methods of determining optimal warranty period for repairable goods. The demand of the product is assumed to increase with the length of the warranty period. Good-as-new repair and minimal repair models are considered. The method of obtaining optimal warranty period is explored when the failure distribution is an exponential or a Weibull. The case of discounting all associated costs continuously over time is also considered.

I. 序 論

「事後保證」은 販賣된 製品에 대하여 供給業者가 一定期間동안 製品의 故障에 대하여 責任을 진다는 消費者와의 契約으로 중요한 經營政策 事項중 하나이다.

왜냐하면 消費者는 같은 性能의 製品이라면 事後保證이 確實한 製品을 信賴하고 선호할 것이고 또 明確한 事後保證의 設定은 消費者들로부터의 不當한 클레임에 대한 對應 手段의 근거로서 使用되어질 수 있기 때문이다.

事後保證政策은 販賣된 製品에서 發生하게 될 不確實한 故障때문에 必要한 것인바, 效果的인 保證政策의 樹立에는 다음과 같은 두가지의 問題가 수반된다.

첫째, 保證政策의 樹立을 위하여는 事後保證에 必要하게 될 資金의 適正 水準을 決定하여야 한다. 왜냐하면 事後保證 資金을 너무 많이 策定하면 그만큼 다른 곳에 投資할 기회를 상실하게 되고 또 너무 적게 策定하면 向後 發生할 會社의 利潤중 일부를 保證에 割愛하므로 利益計劃에 막대한 지장을 초래하게 된다. 따라서 事後保證에 必要하게 될 資金의 適正水準을 정확히 決定하거나 推定할 수 있는 節次나 體制가 必要하다. Lowerre (1968) 와 Heschel (19

* 亞洲大學校 工科大學 敎授
** 漢陽大學校 工科大學 敎授

71), Karmarker(1978) 등은 修理가 可能한 製品들에 대한 適切한 事後保證 資金 策定을 硏究하였으며 Amato와 Anderson(1976) 등은 修理가 不可能하여 故障이 나면 新製品으로 交換하여야 하는 製品들에 대하여 硏究하였다.

둘째, 保證政策의 樹立에는 適切한 保證과 그 保證期間內에서 供給業者와 消費者가 어느 정도의 比率로 修理費用을 부담할 것인가 하는 保證比率을 決定하여야 한다. 後者의 경우에는 保證期間 동안에 發生한 故障部品 또는 製品에 대하여 그 修理 혹은 交換에 必要한 모든 費用을 전부 供給業者가 부담하는 無料保證政策(free warranty policy)과 使用期間의 增加에 따라 消費者의 負擔比率을 增加시키는 時間比率保證政策(pro rata warranty policy) 등이 많이 쓰이고 있으나 前者의 경우에는 아직 많은 硏究가 進行되고 있지 않다. 適切한 保證期間의 選定은 그동안 경험적으로 競爭業體와의 關係를 고려하여 決定하는 方法이 많이 論議되었으나, 保證期間의 延長은 製品의 信賴度를 크게 높히지 않는 한 供給業者에게 막대한 損失을 초래하게 되는 바 競爭業體와의 關係는 물론 製品의 故障에 關한 情報도 아울러 고려하여 이루어져야 한다. Anderson(1977), Glickman과 Berger(1976) 등은 保證期間과 利潤과의 關係를 硏究하였는데 Thomas(1983)는 이 結果들을 應用하여 修理不可能한 製品들에 대한 適切한 保證期間의 設定에 關한 問題를 硏究하였다.

또한 Ritchken과 Tapiero(1986)는 같은 問題를 意思決定論的 接近方法으로 解決하였다. 그러나 위의 硏究들은 모두 修理不可能한 製品들에 대한 것인바, 이들은 自動車나 컴퓨터와 같이 복잡하고 큰 製品들에 대하여는 適用이 어렵게 된다. 또 事後保證은 미래에 發生하게 될 故障修理費用에 대한 것이므로 이 費用들에 대하여는 現在等價로 割引하여 活用하여야만 보다 效果的인 保證期間의 設定이 可能해진다.

本 論文에서는 이와 같은 점에 着眼하여 修理가 可能한 製品들에 대한 保證期間 設定問題를 다루고자 한다. 本 論文에서는 保證期間이 길어지면 그만큼 販賣量도 增加할 것이므로 假定하였다.

이와같은 假定은 매우 現實的인 바 앞에서도 언급한 것처럼 같은 性能·品質의 製品이라면 保證期間이 긴 製品을 消費者가 選択할 것으로 豫想되기 때문이다. 고려된 修理模型은 完全修理模型과 應急修理模型으로서 각 경우에 있어 總期待利益을 最大로 하는 最適保證期間의 設定方法을 구하였고, 특히 故障分布函數가 指數分布와 weibull分布인 경우를 중점적으로 살펴보았다. 또 未來 費用을 割引하는 경우도 아울러 고려하였다.

II. 模 型

本 節에서는 最適保證期間을 設定할 수 있는 模型을 開發한다. 本 論文에서 使用된 記號와 假定은 다음과 같다.

記 號

$f(t)$: 故障時間의 確率密度函數

$F(t)$: 故障分布函數, $\int_0^t f(u)du$

$\widetilde{F}(s)$: $F(t)$의 라플라스變換, $\int_0^\infty e^{-st}dF(t)$

$r(t)$: 故障率函數

$R(t)$: 累積故障率函數, $\int_0^t r(u)du$

S_n : n번째 故障發生時刻

$f_n(t)$: S_n의 確率密度函數

$F_n(t)$: S_n의 分布函數

$N(t)$: t時間까지의 故障數

$M(t)$: t時間까지의 平均故障數, $E(N(t))$

$\widetilde{M}(s)$: $M(t)$의 라플라스 變換

p : 單位製品 販賣利益

c : 平均故障修理費用

T : 保證期間

T^* : 最適保證期間

ρ : 利率

$C(T)$: 保證期間이 T일때 單位製品當 必要한

保證費用

$\Pi(T)$: 總期待利益

假 定

1. 製品의 販賣量은 $(T+K)^a$에 비례한다. $0<a<1$
2. 故障修理時間은 無視할 수 있다.
3. 故障修理費用은 서로 독립이며 發生된 故障의 數와도 無關하다.
4. 未來費用이 割引될 경우는 時間에 대해 連統的으로 이루어 진다.
5. 製品의 故障率은 IFR이다.

假定 1은 製品의 販賣量이 保證期間이 길어짐에 따라 增加한다는 것을 意味한다. 여기서 K는 事後保證이 없는 경우의 製品 販賣量에 對應되는 상수이며, a는 保證期間의 彈力性이다. 이와같은 假定은 保證期間과 販賣量의 關係에 대한 매우 現實的인 假定으로 볼 수 있다(Glickman and Berger(1976)). 또 假定3은 每故障마다 필요한 修理費用은 달라질 수 있음을 意味한다. 그러나 이 費用들은 發生故障數와는 獨立이므로 總期待利益을 算定하는데 있어서는 平均修理費用을 고려하여도 無妨하다.

이와같은 假定들로부터 保證期間이 T일때 總期待利益을 求하여 보면, 먼저 單位製品當 純利益은 $P-C(T)$이고 販賣量은 $(T+K)^a$에 比例하므로

$$\Pi(T)=A(P-C(T))(T+K)^a \cdots\cdots\cdots (1)$$

단 A는 양의 상수

이 된다. 그런데 $C(T)$는 T까지 필요한 保證費用이므로 費用割引을 고려하지 않는 경우에는

$$\begin{aligned} C(T) &= \sum_{n=1}^{\infty} c\cdot nP\{N(T)=n\} \\ &= c\cdot M(T) \\ &= c\sum_{n=1}^{\infty} F_n(T) \qquad \cdots\cdots\cdots (2) \end{aligned}$$

이 된다. (2)式은

$$\begin{aligned} P\{N(T)=n\} &= P\{N(T)\geqq n\} \\ &\quad -P\{N(T)\geqq n+1\} \\ &= P\{S_n\leqq T\} \\ &\quad -P\{S_{n+1}\leqq T\} \end{aligned}$$

의 關係를 利用한 것이다.

만일 時間 t에서 發生한 費用은 이율 ρ로 割引된다면 保證期間 內에 發生하는 모든 故障은 發生數와 關係없이 c이므로

$$C(T)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T c\cdot e^{-\rho t} fn(t)dt \cdots\cdots (3)$$

이 된다. 따라서 最適保證期間 T^*는 이와 같은 $C(T)$에 대하여 $\Pi(T)$를 最大로 하여 주는 값이 된다.

III. 完全修理模型

앞 節에서는 保證期間이 T일때 總期待利益函數를 求하였다. 本 節에서는 이 結果를 利用하여 故障난 製品이 修理될 경우 完全히 새로운 製品과 같아지는 完全修理(Good-as-new)의 경우의 最適保證期間을 求하고자 한다. 完全修理는 故障分布函數가 대부분 指數分布를 따른다고 알려진 電子製品의 경우나 每故障마다 新品으로 交換하나 保證期間은 延長되지 않는 경우에 適合한 模型이다.

完全修理의 경우에는 每 故障時間間隔은 서로 獨立이고 同一한 確率分布를 따르게 되므로, t 時間까지의 故障의 數 $\{N(t), t\geqq 0\}$는 再生過程(renewal process)을 따르게 된다. 따라서 $F_n(t)$는 $F(t)$의 n차 convolution으로 表現되며, T時間까지의 平均故障數는 再生過程理論으로부터

$$M(T)=F(T)+\int_0^T M(T-t)dF(t) \qquad \cdots\cdots\cdots (4)$$

를 滿足함을 알 수 있다. (4)式을 滿足하는 $M(T)$는 라플라스變換을 통하여 求할 수 있는데,

즉

$$\widetilde{M}(s)=\widetilde{F}(s)+\widetilde{M}(s)\cdot\widetilde{F}(s)$$

이므로

$$\widetilde{M}(s)=\frac{\widetilde{F}(s)}{1-\widetilde{F}(s)} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

이다.

만일 故障分布函數가 母數 λ를 갖는 指數分布라고 하면

$$\widetilde{M}(s)=\frac{\frac{\lambda}{s+\lambda}}{1-\frac{\lambda}{s+\lambda}}=\frac{\lambda}{s}$$

이므로

$$M(T)=\lambda T \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

가 된다. 따라서 費用割引이 없는 경우에는

$$\Pi(T)=A(p-c\lambda T)(T+K)^{a} \cdots\cdots\cdots (7)$$

이므로, 最適保證期間 T^*는

$$\frac{d\Pi(T)}{dT}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

로 부터

$$T^*=\begin{cases}\dfrac{ap/c-\lambda K}{\lambda(a+1)} & ,\ \lambda\leqq\dfrac{a}{K}\cdot\dfrac{p}{c} \cdots (9)\\[2ex] 0 & ,\ \lambda>\dfrac{a}{K}\cdot\dfrac{p}{c}\end{cases}$$

임을 알 수 있다.

指數分布를 따르는 故障分布의 경우 割引率을 고려하면

$$C(T)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T c\cdot e^{-\rho t}F_n(t)dt$$

$$=c\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{((\lambda+\rho)T)^m}{m\,!}e^{-(\lambda+\rho)T}\cdot\left(\frac{\lambda}{\lambda+\rho}\right)^n$$

$$=c\cdot\frac{\lambda}{\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((\lambda+\rho)T)^n}{n\,!}e^{-(\lambda+\rho)T}\cdot\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+\rho}\right)^n\right)$$

$$=c\cdot\frac{\lambda}{\rho}(1-e^{-\rho T}) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

이 된다. 왜냐하면 $F_n(t)$는 n개의 서로 獨立인 同一한 指數分布들의 convolution이기 때문이다. 따라서 이 경우에는

$$\Pi(T)=A\{p-c\cdot\frac{\lambda}{p}(1-e^{-\rho T})\}(T+K)^{a} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

이 되며, 最適의 保證期間은 다음과 같이 구해진다.

整理 1. 費用割引이 있는 경우의 最適保證期間 T^*는

i) $\frac{p}{\lambda c}-\frac{1}{\rho}\geqq 0,\ \frac{ap}{\lambda c}-K\geqq 0$인 경우

$T^*=\infty$

ii) $\frac{p}{\lambda c}-\frac{1}{\rho}<0,\ \frac{ap}{\lambda c}-K\geqq 0$인 경우는

T^*는 $(T^*+K-\frac{a}{\rho})e^{-\rho T^*}$

$=\frac{ap}{\lambda c}-\frac{a}{\rho}$ 의 유일 근이며

iii) $\frac{p}{\lambda c}-\frac{1}{\rho}\geqq 0,\ \frac{ap}{\lambda c}-K<0$인 경우는

$T^*=\infty$

iv) $\frac{ap}{\lambda c}-\frac{1}{\rho}<0,\ \frac{ap}{\lambda c}-K<0$인 경우는

$T^*=0$

이다.

證明. $\Pi(T)=A\{p-\frac{c\lambda}{\rho}(1-e^{-\rho T})\}(T+K)^{a}$

이므로 $\Pi'(T)=\frac{A}{c\lambda}(T+K)^{a-1}L(T)$ 이다.

단 $L(T)=a\left(\frac{\rho}{c\lambda}-\frac{1}{\rho}\right)+\left(\frac{a}{\rho}-T-K\right)e^{-\rho T}$.

여기서 $L(T)$를 미분하면

$$L'(T)=\rho e^{-\rho T}\left(T+K-\frac{1+a}{\rho}\right)$$

이므로 $L(T)$는 $T=\frac{1+a}{\rho}-K$ 에서 最大値를 갖는 단봉함수(unimodal function)이다.
그런데 $T\geqq 0$이고

$$L(0)=\frac{ap}{\lambda c}-K$$

$$L(\infty)=a\left(\frac{p}{\lambda c}-\frac{1}{\rho}\right)$$

이므로, $\Pi(T)$는

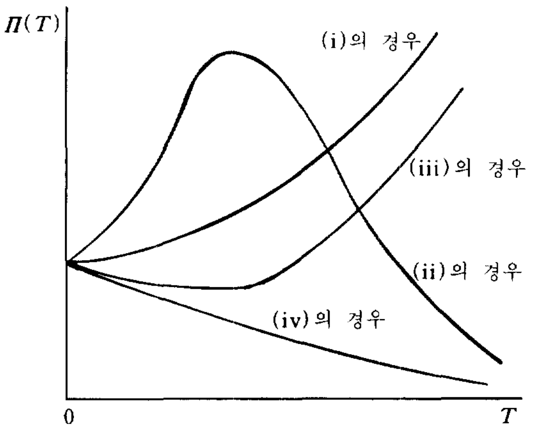

그림 1. $\Pi(T)$의 形態

가 된다. 따라서 각 경우의 最適 T의 값은 그림 1 로부터 알 수 있다.

Ⅳ. 應急修理模型

應急修理(minimal repair)模型은 Barlow와 Hunter가 提案한 것으로서 컴퓨터, 自動車, TV 등 大型시스템의 修理에 適合하다. 應急修理라 함은 製品의 故障이 發生하면, 해당부품 등을 交換・修理하여 製品全體의 故障率은 變化하지 않는다는 修理模型이다. 製品에 發生한 故障을 모두 應急修理하여 除去할 수 있다면 t時間까지 發生한 故障數 $\{N(t),\ t\geqq 0\}$는 發生强度函數(intensity function) $r(t)$를 갖는 非正常포와슨過程(nonhomogeneous Poisson process)를 따르고

$$f_n(t)=\frac{R(t)^{n-1}\,r(t)}{(n-1)!}\cdot e^{-R(t)},\quad t\geqq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

임은 잘 알려져 있다.(Park (1979))
따라서 未來費用이 割引되지 않는 경우에는

$$M(T)=R(T)$$

이므로 (5)式으로부터 最適保證期間 T^*는

$$acR(T)+c\cdot r(T)(T+K)=ap \cdots\cdots (13)$$

을 滿足함을 알 수 있다.

만일 故障分布函數가 $r(t)=\lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1}$을 갖는 weibull分布라면 最適保證期間 T^*는

$$(a+\beta)(\lambda T)^{\beta}+K\ \lambda\beta(\lambda T)^{\beta-1}=ap/c \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

를 滿足함을 알 수 있다. 다음 表1은 $\lambda=1$, $\beta=2$인 경우의 몇개의 $(a,\ K,\ p/c)$의 組合에 대한 T^*값을 구한 것이다.

만일 未來費用이 이율 ρ로 割引되는 경우에는

$$C(T)=c\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T e^{-\rho t}\cdot fn(t)dt$$

$$=c\cdot\beta\int_0^{\lambda T} e^{-\rho u/\lambda},\ u^{\beta-1}du$$

$$=c\cdot(\lambda T)^{\beta}e^{-\rho T}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho T)^K}{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+K)} \cdots\cdots (15)$$

임을 알 수 있다. 특히 β가 정수인 경우에는 (15)式은

$$C(T)=c\cdot\beta\,!\left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^{\beta}\sum_{n=\beta}^{\infty}\frac{(\rho T)^n e^{-\rho T}}{n\,!} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

과 같이 된다.

이 경우에 있어 最適解 T^*를 分析的으로 求하기는 매우 어렵다.

表 1　應急修理의 경우 最適保證期間

k \ a \ p/c	10			10^2			10^3			10^4		
	0.1	0.5	0.9	0.1	0.5	0.9	0.1	0.5	0.9	0.1	0.5	0.9
10	0.0497	0.243	0.424	0.005	0.025	0.0447	0.0005	0.0025	0.0045	0	0.0004	0.0003
10^2	0.476	2.0	3.103	0.050	0.249	0.447	0.005	0.025	0.049	0.0005	0.0027	0.0047
10^3	3.622	10.697	14.503	0.497	2.426	4.239	0.49	0.249	0.449	0.005	0.025	0.045
10^4	17.573	40.899	52.367	4.762	20	31.034	0.477	2.492	4.471	0.0497	0.25	0.449

따라서 最適解 T^*는

$$\Pi'(T)=0$$

즉

$$a\left(p-c\cdot\beta!\left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^{\beta}\sum_{n=\beta}^{\infty}\frac{(\rho T)^n e^{-\rho T}}{n!}\right)+$$

$$(T+K)\,c\cdot(\lambda T)^{\beta}e^{-\rho T}=0 \cdots\cdots\cdots (17)$$

의 근을 數値解析的인 方法으로 分析하여 求할 수 있다.

V. 結　論

本 論文에서는 修理可能한 製品에서 完全修理와 應急修理가 可能한 경우의 期待利益을 最大化할 수 있는 最適保證期間을 求하는 節次에 대하여 硏究하였다. 또 未來費用이 時間에 連續的으로 割引될 경우도 아울러 고려되었다

本 論文에서는 完全修理와 應急修理만을 고려하였으나, 이들이 復合的으로 일어날 수 있는 경우나 保證形態가 無料保證이 아닌 比率保證의 경우에또 本 硏究 結果를 擴張하는 것이 可能하다고 判斷된다.

參 考 文 獻

1. Amato, H.N. and Anderson, E.E. (1976), "*Determination of Warranty Reserves: An Extension,*" Mgmt. Sci., Vol. 22, 1391-1394.
2. Anderson, E.E. (1977), "*Product Price and Warranty Terms: An Optimization Model,*" O.R. Quarterly, Vol. 28, 739-741.
3. Blischke, W.R. and Scheuer, E.M. (1975), "*Calculation of the Cost of Warranty Policies as a Function of Estimated Life Distributions,*" NRLQ, Vol. 22, 681-696.
4. Glickman, T.S. and Berger, P.D. (1976), "*Optimal Price and Protection Period for a Product under Warranty,*" Mgmt Sci., Vol. 22, 1381-1390.
5. Heschel, M.S. (1971), "*How Much Is a Guarantee Worth?,*" Industr. Eng., Vol. 3, 14-15.
6. Karmartar, U.S. (1978), "*Future Costs of Service Contracts for Consumer Durable Goods,*" AIIE Trans., Vol. 10, 380-387.
7. Lowerre, J.M. (1968), "*On Warranties,*" J. of I.E., Vol. 19, 359-360.
8. Nguyen, D.G. and Murthy, D.N.P. (1984a), "*Cost Analysis for Warranty Policies,*" NRLQ, Vol. 31, 525-541.
9. Nguyen, D.G. and Murthy, D.N.P. (1984b), "*A General Model for Estimating Warranty Costs for Repairable Products,*" IIE Trans., 379-386.
10. Park, K.S. (1979), "*Optimal Number of Minimal Repairs before Replacement,*" IEEE Trans. Rel., Vol. R-28, 137-140.
11. Park, K.S. and Yee, S.R. (1985), "*Present Worth of Service Cost for Consumer Product Warranty,*" IEEE Trans. Rel., Vol. R-33, 424-426.
12. Ritchken, P.H. and Tapiero, C.S. (1986), "*Warranty Design under Buyer and Seller Risk Aversion,*" NRLQ, Vol. 33, 657-671.
13. Thomas, M.U. (1983), "*Optimum Warranty Policies for Nonrepairable Items,*" IEEE Trans. Rel., Vol. R-32, 282-288.