Journal of the KSQC
Vol. 15, No. 2, 1987

관측중단된 정규표본으로부터의 모수추정에 관한 연구

Parameter Estimation From Singly Censored Normal Sample

權 寧 日*

ABSTRACT

This paper considers the estimation of the parameters of a normal population from which a sample which has been censored at a known point is obtained. Simple estimators are presented which are given in closed forms. It is shown that maximum likelihood estimators are obtained by using the estimation procedure iteratively. Some computer simulation results are given.

I. 서 론

신뢰도공학, 생물학, 의학 등의 분야에서 제품이나 실험대상들의 수명시험(life testing)을 하는 경우 시간상의 제약이나 경제적인 이유로 해서 시험에 들어간 전 제품이 모두 고장날 때까지 시험을 계속하지않고 도중에 관측을 중단하여 그때까지 얻어진 자료만으로 통계적 분석을 해야하는 경우가 많다. 이때 고장나지 않은 제품이 관측중단될 때까지 가동된 시간을 관측중단시간(Censoring time)이라 한다. 이와 같은 수명시험의 경우 시험에 들어간 전체 제품중 일부만이 정확한 수명이 관측되고 나머지 제품들은 그 수명이 관측중단시간 이상이라는 것만 알게 된다. 관측을 중단하는 방식에 따라 처음 n개의 제품으로 시험을 시작하여 미리 정해진 특정시간동안만을 관측하는 경우를 Type I Censoring이라 하고 특정갯수가 고장날때까지 관측하는 경우를 Type II Censoring이라하며 그 밖에도 몇가지 유형의 Censoring 방식이 있다.

본 연구에서는 수명이 정규분포(또는 대수정규분포)를 따르는 경우 Type I Censored된 표본(Sample)으로부터 그 모수들을 추정하는 문제에 대해 다루고 있다. 관측중단된 정규표본으로부터의 모수추정문제에 관해서는 Cohen(1950, 19

* 청주대학교 산업공학과
이 논문은 1987년도 문교부 학술연구조성비에 의해 연구되었음.

61) 과 Harter 와 Moore (1966) 가 MLE (최우추정량) 를 구할 수 있는 방법들에 대해 연구하였으며 Tiku (1967) 는 정확한 MLE 는 아니나 간편히 구할 수 있는 추정방법을 제시하였고 Persson 과 Rootzen (1977) 은 간단한 수식으로 구해지는 Restricted MLE 를 구하였다.

또한 Nelson 과 Schmee (1979) 는 BLUE 에 의한 신뢰구간을 구하였고 Schmee, Gladstein 과 Nelson (1985) 에 의해 MLE 에 기초한 정확한 구간추정에 대한 연구가 이루어졌다. 이들 연구에서 MLE 를 구하기 위해 Newton-Raphson방법이나 EM Algorithm, 또는 보조 table 등을 이용하고 있으나 그 결과가 수렴하지 않는 경우도 있고 이용하기에도 번거로운 면이 있다. 따라서 본 연구에서는 컴퓨터 프로그램이나 별도의 보조 table 을 이용하지 않고도 비교적 간편히 구할 수 있는 추정량을 개발하고 그 추정 절차를 반복함으로써 정확한 MLE 를 구할 수 있음을 증명하였다.

Ⅱ. 수정된 최우추정량

평균이 μ, 분산이 σ^2 인 정규모집단으로 부터의 크기 n의 샘플중 관측중단시점 c보다 작은 r개의 관측값 X_1, X_2, $\cdots$, X_r만이 관측되고 나머지 $n-r$개는 시간 C에서 관측중단된 경우 로그우도함수는 다음과 같다.

$$ln\pounds(\mu,\ \sigma)=-r\,ln\,\sigma-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{r}(x_i-\mu)^2$$

$$+(n-r)\,ln[1-\Phi(\frac{c-\mu}{\sigma})]\cdots\cdots\cdots(1)$$

여기서 Φ는 표준정규분포의 누적분포함수를 말한다. ϕ를 표준정규분포의 확률밀도 함수라 하고 $\theta=(c-\mu)/\sigma$, $\alpha(\theta)=\phi(\theta)/[1-\Phi(\theta)]$, $y_i=x_i-c$ 라 두면 로그우도함수(1)을 다음과 같이 θ, σ의 함수로 나타낼 수 있다.

$$ln\pounds(\theta,\ \sigma)=-r\,ln\,\sigma-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{r}(y_i+\theta\sigma)^2$$

$$+(n-r)\,ln[1-\Phi(\theta)]\cdots\cdots\cdots(2)$$

식(2)를 최대화하는 θ^*, σ^*는 $\frac{\partial ln\pounds}{\partial\theta}=0$, $\frac{\partial ln\pounds}{\partial\sigma}=0$ 에서부터

$$\sigma^*=-(\sum_{i=1}^{r}y_i/r)/\{\theta^*+\frac{n-r}{r}\alpha(\theta^*)\},\ \cdots(3)$$

$$\sigma^{*2}-\theta^*\sigma\frac{\sum_{i=1}^{r}y_i}{r}-\frac{\sum_{i=1}^{r}y_i^2}{r}\ \cdots\cdots\cdots\ (4)$$

에서 구할 수 있다. 식 (3), (4)에서 $W=\frac{n-r}{r}$, $K=r\cdot\sum_{i=1}^{r}y_i^2/(\sum_{i=1}^{r}y_i)^2$ 라 두고 σ를 소거하면

$$\Psi(\theta^*)\equiv1+\theta^*\{\theta^*+W\alpha(\theta^*)\}$$

$$-K\{\theta^*+W\alpha(\theta^*)\}^2=0\ \cdots\cdots\cdots(5)$$

이 얻어진다. 따라서 식(5)를 만족하는 θ^*에 의해 μ, σ의 MLE μ^*, σ^*는 다음과 같이 구해진다.

$$\sigma^*=-(\sum_{i=1}^{r}y_i/r)/\{\theta^*+W\alpha(\theta^*)\},\ \cdots\cdots(6)$$

$$\mu^*=c-\theta^*\cdot\sigma^*\cdots\cdots\cdots(7)$$

그런데 식(5)에서 $\alpha(\theta)$의 복잡성으로 인해 θ^*가 간단한 수식의 형태로 구해지지 않고 Newton-Raphson 방법 등의 컴퓨터 프로그램을 이용해야만 구해질 수 있다. 여기서 θ의 작은 구간내에서는 $\alpha(\theta)$가 거의 직선식에 가깝다는 사실(Tiku, 1967)을 이용하여 $\alpha(\theta)$ 대신 직선식으로 표현되는 근사식을 이용하면 간단한 수식으로 표현되는 θ 및 μ, σ의 추정량을 구할 수 있다. 먼저 θ의 초기추정량으로 $\hat{\theta}_0=\Phi^{-1}(\frac{r}{n})$을 사용하고 $\hat{\theta}_0$에서의 $\alpha(\theta)$의 접선식을 $\alpha(\theta)$의 근사식으로 사용하면 $\alpha(\theta)$의 근사식 $\tilde{\alpha}(\theta)$는 다음과 같이 구해진다.

$$\tilde{\alpha}(\theta)=a+b\theta,$$

$$b=\alpha(\hat{\theta}_0)\{\alpha(\hat{\theta}_0)-\hat{\theta}_0\},$$

$$a=\alpha(\hat{\theta}_0)-b\hat{\theta}_0. \quad \cdots\cdots (8)$$

이때 식(5)는

$$\delta(\hat{\theta})\equiv\{(Wb+1)-k(Wb+1)^2\}\hat{\theta}^2+\{Wa-2awk(wb+1)\}\hat{\theta}+(1-a^2w^2k)=0 \quad \cdots\cdots (9)$$

와 같이 주어지고 이로부터

$$\hat{\theta}=\{-B+\sqrt{B^2-4A}\}/2,$$

$$\hat{\sigma}=-(\sum_{i=1}^{r}y_i/r)/\{\hat{\theta}+w\alpha(\hat{\theta})\},$$

$$\hat{\mu}=c-\hat{\theta}\hat{\sigma} \quad \cdots\cdots (10)$$

가 얻어진다. 여기서

$$B=\{wa-2awk(wb+1)\}/\{(wb+1)-k(wb+1)^2\},$$

$$A=\{1-a^2w^2k\}/\{(wb+1)-k(wb+1)^2\} \quad \cdots\cdots (11)$$

을 말한다.

참고로 Tiku(1967)는 크기 n의 표본에 대해 $\Phi(\theta_0)=P$라 할때 $\Phi(\theta_1)=P-\sqrt{\frac{Pq}{n}}$, $\Phi(\theta_2)=P+\sqrt{\frac{Pq}{n}}$를 만족하는 θ_1, θ_2에 대해

$$b'=\{\alpha(\theta_2)-\alpha(\theta_1)\}/(\theta_2-\theta_1),$$

$$a'=\alpha(\theta_1)-b\theta_1 \quad \cdots\cdots (12)$$

을 사용하였는데 접선식을 사용할 경우 초기치 $\hat{\theta}_0$가 θ^*에 가까울수록 근사식이 정확해지고 $\hat{\theta}_0=\theta^*$ 일때는 $\alpha(\theta^*)=a+b\theta^*$의 관계가 성립하나 Tiku의 방식은 항상 $\alpha(\theta^*)$와 $a'+b'\theta^*$ 간에 어느 정도의 차이가 존재($\alpha(\theta)$가 Convex므로) 하여 $\hat{\theta}_0=\theta^*$인 경우도 $\alpha(\theta^*)=a'+b'\theta^*$의 관계가 성립하지 않는다. 따라서 $\hat{\theta}_0$가 θ^*값에 접근해 갈때 접선식을 이용하면 추정량들도 MLE로 수렴해가나 Tiku의 방식은 그렇지 못하다. 만약 식(8), (10)을 계속 반복하여 사용하면 $\alpha(\theta)$가 Convex일때 $\hat{\theta}$가 θ^*로 수렴함을 보일 수 있는데 그 내용은 다음과 같다.

〈정리 1〉 $\alpha(\theta)$는 $\theta\leqq3.5$에서 Convex 이다.

증명 : 부록참조

실제로 관측중단된 데이타의 비율이 1% 이상만되어도 MLE로의 수렴을 증명하는 과정에서 $\theta\leqq3.5$에서 $\alpha(\theta)$가 Convex라는 사실만으로 충분하므로 여기서는 $\alpha(\theta)$의 복잡성으로 인해 $\theta\leqq3.5$의 영역에 대해서만 $\alpha(\theta)$가 Convex 임을 증명하였다.

〈정리 2〉 초기치 $\hat{\theta}_0$와 식(8), (10)을 반복사용하여 얻어지는 θ의 추정값들을 $\hat{\theta}_i$, $i=1, 2, \cdots$라 할 때 $\hat{\theta}_i$는 θ^*로 수렴한다.

증명 : 부록참조

〈정리 2〉는 초기치 $\hat{\theta}_0$에 관계없이 식(8), (10)을 반복사용함으로써 θ^*와 μ, σ의 MLE μ^*, σ^*를 구할 수 있음을 뜻한다.

만약 Censoring 비율이 0인 경우라면 $n=r$, $a=0$, $b=1$, $\alpha(\theta)=\theta$, $w=0$가 되어 식(10)에서 수정된 최우추정량은

$$\hat{\theta}=-(\sum_{i=1}^{r}y_i/r)/\sqrt{(\sum y_i-\bar{y})^2/n},$$

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}}, \quad \hat{\mu}=\bar{x}$$가 되어 Censoring이 없는 완전한 샘플에서의 MLE와 일치함을 볼 수 있다.

Ⅲ. 시물레이션과 결과

다음 〈표 1〉은 2절에서 제시된 추정방식에 따라 표준정규분포를 대상으로 하여 컴퓨터에 의해 1000개씩의 샘플을 발생시켜 시뮬레이션한 결과이다. 〈표 1〉에 의하면 수정된 최우추정량(10)의 편기(bias)와 표준편차가 MLE의 그것들과 거의 동일함을 볼 수 있다. 다음 예제는

〈표 1〉 표준정규 분포에서 $n=10$, 20인 샘플들에 대한 1000번씩의 시뮬레이션 결과

(a) 추정량의 기대값 (b) $\sqrt{n}$ ×추정량의 표준편차

μ_{ML}, σ_{ML} : 최우추정량

μ_{MML}, σ_{MML} : 수정된 최우추정량

		$n=10$		$n=20$	
θ	추정량	(a)	(b)	(a)	(b)
2	μ MML	0.018	0.875	0.0009	0.861
	μ ML	0.018	0.875	0.0008	0.861
1	μ MML	0.023	0.833	0.005	0.807
	μ ML	0.023	0.833	0.005	0.807
0	μ MML	-0.011	0.961	-0.013	0.918
	μ ML	-0.010	0.962	-0.013	0.919
-1	μ MML	-0.257	1.950	-0.044	3.348
	μ ML	-0.251	1.971	-0.029	3.501
-2	μ MML	-1.276	1.921	-0.994	3.641
	μ ML	-1.268	1.942	-0.943	3.844
2	σ MML	0.924	0.629	0.959	0.692
	σ ML	0.924	0.630	0.959	0.693
1	σ MML	0.931	0.691	0.950	0.674
	σ ML	0.931	0.691	0.950	0.674
0	σ MML	0.914	0.891	0.953	0.934
	σ ML	0.914	0.891	0.953	0.934
-1	σ MML	0.791	1.610	0.912	2.223
	σ ML	0.795	1.622	0.922	2.294
-2	σ MML	0.594	1.575	0.647	2.299
	σ ML	0.600	1.590	0.678	2.414

식 (8), (10)을 반복사용할 때 얻어지는 추정값들이 MLE로 수렴하는 속도를 보기 위한 것이다.

〈예제 1〉

다음은 표준정규분포로부터 크기가 $n=10$ 인 샘플을 추출하여 관측중단 시점을 $c=1$로 두고 $c=1$보다 작은 관측값만을 기록한 것이다.

$x_1=0.011$, $x_2=-1.326$, $x_3=0.358$, $x_4=-0.665$, $x_5=0.416$, $x_6=-0.707$, $x_7=-1.830$

이때 μ, σ의 MLE는 $\mu_{ML}=0.161$, $\sigma_{ML}=1.299$이다.

여기서 $\hat{\theta}_0=\Phi^{-1}(\frac{r}{n})=\Phi^{-1}(\frac{7}{10})=0.525$이고 식 (8), (10)을 반복적용하여 얻어지는 추정값들을 $\hat{\mu}_i$, $\hat{\sigma}_i$, $i=1, 2, \cdots$라 하면 다음과 같은 결과가 얻어진다.

〈표 2〉 $n=10$, $c=1$일때 $\hat{\mu}_i$, $\hat{\sigma}_i$

i	$\hat{\mu}_i$	$\hat{\sigma}_i$
1	0.493	1.483
2	0.157	1.297
3	0.161	1.299
4	0.161	1.299
5	0.161	1.299

이 예의 경우 $i=3$에서 MLE에 도달함을 볼 수 있다. 다음의 예는 $n=20$, $c=-1$인 경우 관측된 3개의 관측값

$x_1=-1.10,\ x_2=-1.03,\ x_3=-1.94$
로부터 구해진 결과이다.

〈표 3〉 $n=20,\ c=-1$ 일때 $\hat{\mu}_i,\ \hat{\sigma}_i$

i	$\hat{\mu}_i$	$\hat{\sigma}_i$
1	-0.4967	0.6912
2	-0.2193	0.7594
3	-0.1935	0.7655
4	-0.1933	0.7655
5	-0.1933	0.7655

주어진 3개의 관측값으로부터 Newton-Raphson 방식에 의해 MLE를 구하면 $\mu_{ML}=-0.1933$, $\sigma_{ML}=0.7655$가 되어 $i=4$ 에서 $\hat{\mu}_i,\ \hat{\sigma}_i$가 MLE에 도달함을 볼 수 있다. 샘플크기 n과 Censoring 비율을 변화시켜 가면서 시뮬레이션 해본 결과에 따르면 여기서의 예제와 같이 식 (8),(10)에 의해 얻어지는 추정값들이 빠른 속도로 MLE에 수렴해감을 볼 수 있었다.

Ⅳ. 결 론

본 연구에서는 Type I Censored된 정규 표본으로부터 $\alpha(\theta)\cong a+b\theta$의 관계를 이용하여 수정된 최우추정량을 간단한 수식으로 구하였고 그 추정과정을 반복하여 적용할 때 구해지는 추정량이 최우추정량으로 수렴함을 증명하였다. 여기서 제시된 수정된 최우추정량은 컴퓨터프로그램이나 별도의 보조표를 이용하지 않고도 정규확률표만을 이용하여 구할 수 있고 MLE의 경우도 수정된 최우추정량의 수식을 반복적용함으로써 구할 수 있다. 또한 시뮬레이션 결과 수정된 최우추정량이 편기(bias)나 표준편차에 있어서 MLE에 비해 별 차이가 없음을 볼 수 있다.

부 록

〈정리 1〉의 증명 :

$\alpha'(\theta)=\alpha(\theta)\{\alpha(\theta)-\theta\}>0$,

$\alpha''(\theta)=\alpha(\theta)[\{\alpha(\theta)-\theta\}^2+\alpha(\theta)\{\alpha(\theta)-\theta\}-1]$에서

i) $\theta\leqq-1$일때 $\{\alpha(\theta)-\theta\}^2>1$이고 따라서 $\alpha''(\theta)>0$이므로 $\alpha(\theta)$는 Convex 이다.

ii) $\theta>-1$일때 $g(\theta)=\alpha(\theta)-\theta$라 하면 $\bigcup_i I_i=[-1,\ d_1]$이고 서로 배제적인 $I_i=[\theta_i,\ \theta_{i+1}]$들에 있어서 $(\theta_i<\theta_{i+1})$ $\theta\in I_i$에 대해

$$g'(\theta)=\alpha'(\theta)-1$$
$$=\alpha(\theta)\{\alpha(\theta)-\theta\}-1$$
$$\leqq\alpha(\theta_{i+1})\{\alpha(\theta_{i+1})-\theta_i\}-1$$

이고 모든 i에 대해 $\alpha(\theta_{i+1})\{\alpha(\theta_{i+1})-\theta_i)-1\leqq0$이면 $g(\theta)$는 $[-1,\ d_1]$에서 θ의 감소함수이다.

또한 $h(\theta)=\{g(\theta)^2+\alpha(\theta)g(\theta)-1\}$이라 두면 $\bigcup_j I_j=[-1,\ d_2]$, $d_2\leqq d_1$이고 서로 배제적인 $I_j=[\theta_j,\ \theta_{j+1}]$들에 있어서 $\theta\in I_j$에 대해 $h(\theta)\geqq g(\theta_{j+1})^2+\alpha(\theta_j)g(\theta_{j+1})-1$이므로 모든 j에 대해 $g(\theta_{j+1})^2+\alpha(\theta_j)g(\theta_{i+1})-1\geqq0$이면 $[-1,\ d_2]$에서 $\alpha''(\theta)\geqq0$이고 따라서 $\alpha(\theta)$는 $[-1,\ d_2]$에서 Convex이다.

여기서 $\theta_{i+1}-\theta_i=\Delta_i$를 충분히 작게(예 : $\Delta_i=0.01$) 해줌으로써 $\theta\leqq3.5$에서 $\alpha(\theta)$가 Convex 임을 쉽게 보일 수 있다.

〈정리 2〉의 증명 :

$$\Psi(\theta)=(1-k)\theta^2+w\alpha(\theta)(1-2k)\theta+1$$
$$-kw^2\alpha(\theta)^2$$ 에서 θ와 $\alpha(\theta)$를 독립적인 두개의 변수로 두면

$$\Psi(\theta,\ \alpha)=(1-k)\theta^2+w\alpha(1-2k)\theta+1-kw^2\alpha^2 \quad \cdots\cdots (13)$$

로 나타낼 수 있고 식(13)에서 $\alpha=\alpha(\theta)$의 관계를 만족하면 $\Psi(\theta,\ \alpha)=\Psi(\theta)$가 된다.

$$\frac{\partial\Psi(\theta,\alpha)}{\partial\theta}=2(1-k)\theta+w\alpha(1-2k),$$

$$\frac{\partial\Psi(\theta,\alpha)}{\partial\alpha}=-2kw^2\alpha+w(1-2k)\theta \cdots\cdots (14)$$

에서부터 $\alpha\geq(\leq)\frac{2(k-1)}{w(1-2k)}\cdot\theta$이면 Ψ는 θ의 감소함수(증가함수)이고 $\alpha\geq(\leq)\frac{1-2k}{2kw}\theta$이면 Ψ는 α의 감소함수(증가함수)가 되며 이 관계를 그림으로 나타내면 〈그림 1〉과 같다. 따라서 영역Ⅰ에서는 Ψ는 α, θ의 증가함수이고 영역Ⅱ에서는 α의 증가함수, θ의 감소함수이고 영역Ⅲ에서는 α, θ의 감소함수이므로 $\theta<\theta_1$이면 $\Psi(\theta)$는 θ의 증가함수이고

$$\Psi(\theta)<\Psi(\theta_1),$$

$\theta>\theta_2$이면 $\Psi(\theta)$는 θ의 감소함수이고

$$\Psi(\theta)<\Psi(\theta_2) \cdots\cdots (15)$$

이다. 또한 $(\theta,\ \alpha)=(\theta,\ h_1\theta)$상에서

$$\Psi(\theta,\ h_1\theta)=\frac{k-1}{(2k-1)^2}\theta^2+1>1 \text{ 이므로}$$

$$\Psi(\theta_1,\ h_1\theta_1)=\Psi(\theta_1)>1 \cdots\cdots (16)$$

이고 $(\theta,\ \alpha)=(\theta,\ h_2\theta)$상에서도

$$\Psi(\theta,\ h_2\theta)=\frac{1}{4k}\theta^2+1>1 \text{ 이므로}$$

$$\Psi(\theta_2,\ h_2\theta_2)=\Psi(\theta_2)>1 \cdots\cdots (17)$$

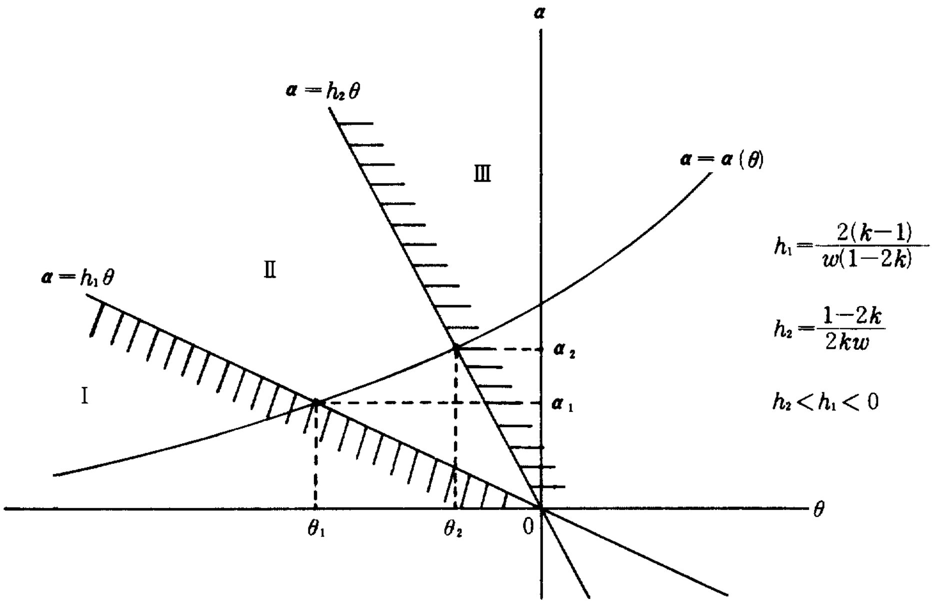
이다. 그리고 $\Psi(\theta)$는 연속함수이고

$$\lim_{\theta\to\infty}\Psi(\theta)<0 \cdots\cdots (18)$$

이므로 $\Psi(\theta^*)=0$이 되는 θ^*는 항상 존재하고 식 (15), (16), (17)에서부터

$$\theta^*>\theta_2 \cdots\cdots (19)$$

이다.



〈그림 1〉 $\Psi(\alpha,\ \theta)$의 증·감관계

i) $\hat{\theta}_0 < \theta^*$일때

식 (16), (17)에 의해 다음 〈그림 2〉의 θ_3, θ_4에 대해

$$\Psi(\theta_3) > 1,\ \ \Psi(\theta_4) > 1 \cdots\cdots (20)$$

이고 $\tilde{\Psi}(\theta) \equiv \Psi(\theta,\ \tilde{\alpha}(\theta))$라 두면 $\tilde{\Psi}(\theta)$는 $\theta > \theta_4$에서는 감소함수, $\theta < \theta_3$에서는 증가함수이고, $\lim_{\theta \to \infty} \Psi(\theta) < 0$ 이므로 $\tilde{\Psi}(\hat{\theta}) = 0$를 만족하는 $\hat{\theta}$는 항상 존재하고

$$\hat{\theta} > \theta_4 \cdots\cdots (21)$$

가 된다. 또한 $\alpha(\theta)$의 Convexity로부터

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\theta^*) &= \Psi(\theta^*,\ \tilde{\alpha}(\theta^*)) \\ &> \Psi(\theta^*,\ \alpha(\theta^*)) \\ &= \Psi(\theta^*) = 0, \end{aligned} \cdots\cdots (22)$$

$$\tilde{\Psi}(\theta_5) < \Psi(\theta^*) = 0 \cdots\cdots (23)$$

이고 $\tilde{\Psi}(\theta)$는 이 영역에서 감소함수므로

$$\theta^* < \hat{\theta} < \theta_5 \cdots\cdots (24)$$

이다.

ii) $\hat{\theta}_0 > \theta^*$일때

〈그림 3〉에서

$$\tilde{\Psi}(\theta^*) > \Psi(\theta^*) = 0, \cdots\cdots (25)$$

$$\tilde{\Psi}(\theta_6) < \Psi(\theta^*) = 0 \cdots\cdots (26)$$

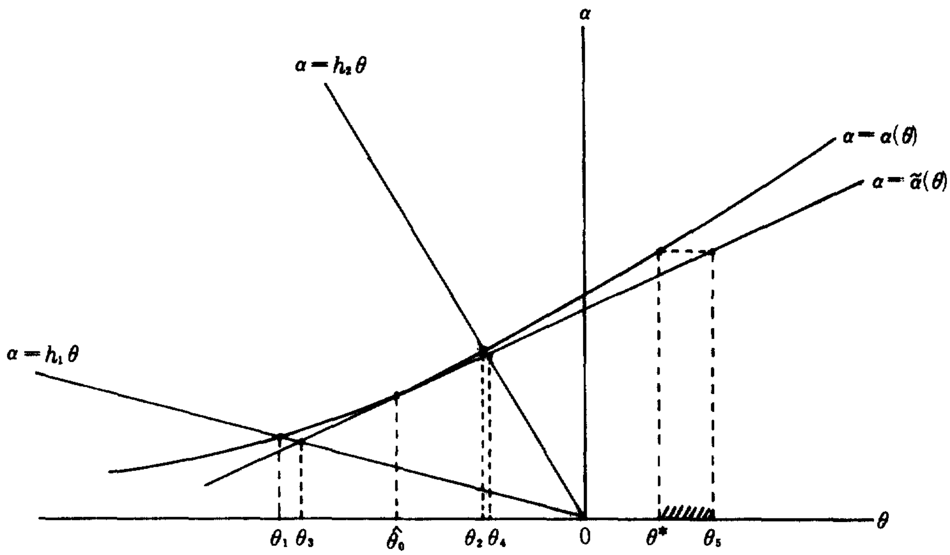
이고 $\tilde{\Psi}(\theta)$는 이 영역에서 θ의 감소함수므로

$$\tilde{\Psi}(\theta^*) > 0 > \tilde{\Psi}(\theta_6) \cdots\cdots (27)$$

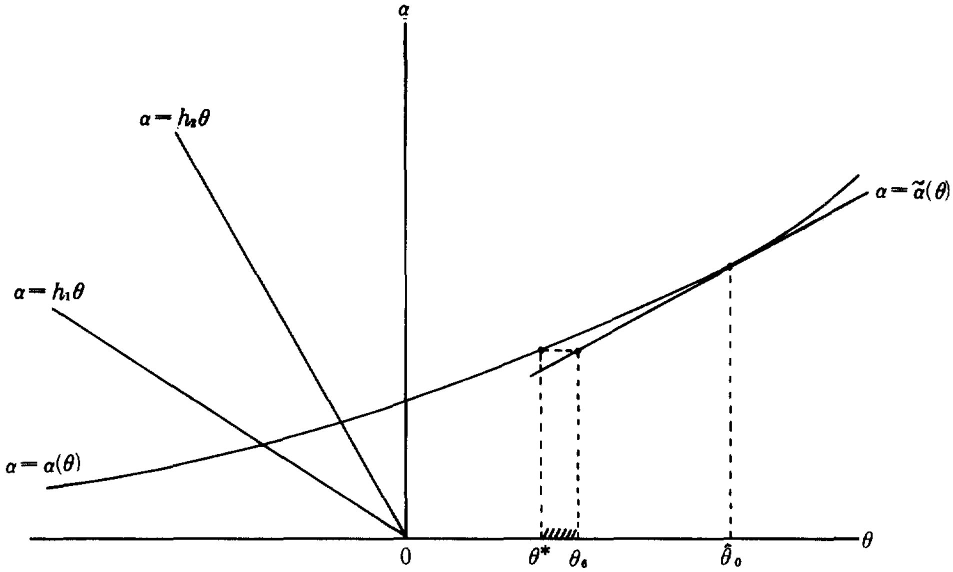
이고 따라서

$$\theta^* < \hat{\theta} < \theta_6 < \hat{\theta}_0 \cdots\cdots (28)$$

이다. i) ii) 에 의해 초기치 $\hat{\theta}_0$를 이용, 식 (8), (10)을 반복하여 적용할 때 얻어지는 $\hat{\theta}_i$, $i = 1, 2, 3, \cdots$들에 대해 $\theta^* < \hat{\theta}_{i+1} < \theta_6 < \hat{\theta}_i$이고 θ_6는 θ^*로 수렴하므로 $\hat{\theta}_i$도 θ^*로 수렴한다.



〈그림 2〉 $\hat{\theta}$의 존재범위 ($\hat{\theta}_0 < \theta^*$일때)



〈그림 3〉 $\hat{\theta}$의 존재범위 ($\hat{\theta}_0 \geq \theta^*$ 일때)

参 考 文 献

1. Cohen, A.C. (1950), *"Estimating the Mean and Variance of Normal Populations from Singly and Doubly Truncated Samples,"* Ann. Math. Statist. 21, 557-69.
2. Cohen, A.C. (1961), *"Tables for Maximum Likelihood Estimates: Singly Truncated and Singly Censored Samples,"* Technometrics, 3, 535-41.
3. Harter, H.L. and Moore, A.H. (1966), *"Iterative Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of Normal Populations from Singly and Doubly Censored Samples,"* Biometrika, 53, 205-13.
4. Nelson, W. and Schmee, J. (1979), *"Inference for (Log) Normal Life Distributions from Small Singly Censored Samples and BLUEs,"* Technometrics, 21, 43-54.
5. Persson, T. and Pootzen, H. (1977), *"Simple and Highly Efficient Estimators for a Type I Censored Normal Sample,"* Biometrika, 64, 123-8.
6. Tiku, M.L. (1967), *"Estimating the Mean and Standard Deviation from a Censored Normal Sample,"* Biometrika, 54, 155-165.
7. Schmee, J., Gladstein, D. and Nelson, W. (1985), *"Confidence Limits for Parameters of a Normal Distribution from Singly Censored Samples, Using Maximum Likelihood,"* Technometrics, 27, 119-128.