Journal of the KSQC
Vol. 15, No. 2, 1987

非正規分布工程에서 메디안特殊管理圖의 模型設計

Design of Median Control Chart for Nonnormally Distributed Processes

辛 容 伯*

ABSTRACT

Statistical control charts are useful tools to monitor and control the manufacturing processes and are widely used in most Korean industries. Many Korean companies, however, do not always obtain desired results from the traditional control charts by Shewhart such as the $\overline{X}$-chart, X-chart, $\widetilde{X}$-chart, etc. This is partly because the quality charterstics of the process are not distributed normally but are skewed due to the intermittent production, small lot size, etc. In the Shewhart $\overline{X}$-chart, which is the most widely used one in Korea, such skewed distributions make the plots to be inclined below or above the central line or outside the control limits although no assignable causes can be found. To overcome such shortcomings in nonnormally distributed processes, a distribution-free type of confidence interval can be used, which should be based on order statistics. This thesis is concerned with the design of control chart based on a sample median which is easy to use in practical situation and therefore properties for nonnormal distributions may be easily analyzed.

Control limits and central lines are given for the more famous nonnormal distributions, such as Gamma, Beta, Lognormal, Weibull, Pareto, and Truncated-normal distributions.

I. 序 論

일반적으로 計量値管理圖라고 하면 W. A. Shewhart의 3σ原則에 입각한 $\overline{X}-R$, X, $\widetilde{X}-R$ 등의 傳統的인 管理圖를 말하는 바 이들은 모두 製品이 연속적으로 生産되는 工程이거나 또는 로트의 크기가 큰 공정에서 그 品質特性値의 分布가 正規分布이거나 그에 類似한 分布를 따른다고 간주될 때 使用되는 工程管理用 SQC의 代表的 技法이다.

위와 같은 관리도를 적용하기 위해서는 먼저

*亞洲大學校 工大 産業工學科 敎授

대상 제품의 正規性을 입증할 수 있어야만 소기의 目的을 달성할 수 있게 된다.

그러나 제품의 특성치가 非正規性을 나타내고 있는 경우에는 위의 관리도들은 몇가지 문제점을 보이게 된다.

먼저 비정규분포 제품을 전통적인 Shewhart 관리도로서 관리하게 되면 실제로는 製造工程에 異常이 없다 하더라도 管理圖상에는 管理限界밖으로 打點이 되어 異常要因이 발생한 것처럼 誤報(false alarm)를 주는 경우가 많이 發生한다. 이는 特히 國內의 많은 製造企業(工場)에서 管理圖技法을 적용함에 있어 겪는 어려움이라고 보고되고 있어 SQC 技法의 效果를 감소시키는 결과를 초래하고 있다.

첫째로 非正規分布의 경우 正規分布보다는 後尾의 確率이 대부분 크게 되기 때문이다.

둘째로 전통적인 관리도중 특히 많이 사용되고 있는 $\overline{X}$ 관리도 등을 비대칭성 분포에 적용하면 標本들이 中心線 상한 또는 하한에 치우쳐서 타점되는 경향이 많다. 이는 비정규분포, 특히 비대칭분포에서는 표본평균 $\overline{X}$가 중심의 경향을 나타내는 가장 좋은 統計量이라고 볼수 없기 때문에 발생된다고 판단된다.

이와 같은 문제점들을 해결하기 위하여 對數管理圖, 最頻數管理圖, Gram-Charlier 및 Pearsonian 管理圖 등 非正規分布用 管理圖들이 開發되었다.

그러나 대수관리도는 품질특성치를 對數變換하였을 때 正規性을 가져야 하므로 그 적용범위가 한정되어 있고 또한 모든 품질특성치를 대수변환하여야 하는 번거로움이 있다.

한편 최빈수관리도는 비정규분포에서는 2개의 표준편차를 계산해야 하고 또 最頻數를 계산하는 과정이 복잡하며 그리고 관리한계의 폭이 넓어 관리도분석상 민감도가 떨어지는 短點이 있다. Gram-Charlier 관리도나 Pearsonian 관리도 등은 理論的이기 때문에 그 적용 및 실용화가 매우 복잡하다는 短點을 지니고 있다.

本 硏究에서는 이러한 점에 착안하여 비정규분포 특성을 갖는 工程을 효과적으로 管理할수 있는 관리도를 개발하고자 한다. 공정의 품질특성치가 비정규분포를 따르는 것은 품질 규격의 상한이나 하한 중 어느 하나만 주어져 있다든가 공정이 불안정할 때, 또 공정의 특정부분에 중점적인 관리 및 검사를 엄격하게 할 경우에 많이 나타나며 특히 有限母集團이라든가 無限母集團이라 하더라도 각 개체의 분포가 비대칭적 경우에 해당되는 바 國內에서는 産業與件이 多品種小量生産, 단속적 생산체제를 유지해야 한다는 점과 中小企業의 제반 기술 여건의 미비 등으로 말미암아 흔히 발견되고 있는 현상이다.

이와 같은 비정규분포 공정을 관리하기 위해서는 정규분포의 경우와 달리 먼저 그 品質特性値의 分布를 정확하게 推定하고 그에 따른 관리도를 설계하여야 한다.

그러나 그 적용대상이 주로 製造現場의 工程이 中心이므로 使用이 간편하고 계산과정도 간단해야 한다. 본 연구에서는 순서통계량중에서 中心性向을 잘 나타내고 사용하기 가장 간편한 標本의 中位數에 기초한 메디안 特殊管理圖의 모형을 開發하여 비정규분포공정을 효과적으로 관리할 수 있도록 하는 것이 그 目的이다.

본 연구는 소량생산, 단속생산 등으로 많이 發見되고 있는 非正規分布工程을 효과적으로 管理하기 위하여 전통적인 3σ 관리도 대신 적용하기 간편한 새로운 메디안 특수관리도를 開發하고자 한다.

Ⅱ. 研究方法

本 研究의 方法은 非對稱分布下의 特殊管理圖 適用에 관련하여 종래의 旣開發된 $\overline{X}$管理圖, $\widetilde{X}-R$ 管理圖, 對數管理圖, Gram-Charlier 管理圖 등의 現實適用에 있어서 그들의 制限된 條件下에서 이용되어야 하는 限界性과 非對稱分布 形態에 따른 多樣한 고려가 없었던 點을 着

眼하여 非對稱分布工程의 管理圖 適用을 통한 製造工程管理를 위하여 품질특성치의 中心的 性向을 나타낼 수 있는 代表的인 記述的 測定値인 算述平均, 中位數, 最頻數들 중에서 사용하기 간편하고 비교적 분포에 무관하게 적응성이 있는 中位數(median)를 기초로 한 管理圖法을 고려한다.

여기서 現實的인 問題로 대두되는 計量値의 品質特性値 管理를 위한 製造工程管理上 샘플링하는 시료의 크기가 적은 경우와 연속생산이 아닌 단속적 생산이거나 그 생산로트로부터 作成된 히스토그램(histogram)의 分布가 분명한 非對稱正規分布일 경우를 重點 着眼하여 이의 經濟的 適應性이 있는 特殊管理圖의 模形을 設計하고자 한 것이다.

特히 非對稱分布工程에서 計量値管理圖 適用上 平均値 選擇은 算述平均値($\bar{X}$)보다 中位數($\widetilde{X}$)가 使用上의 容易性이 있고, 또製造工程 (母集團)의 대표적인 平均値의 性質을 규명하기 쉽고 確率論으로도 中位數($\widetilde{X}$)가 算述平均($\bar{X}$)보다 우월하다는 것이 컴퓨터 시뮬레이션 (Computer Simulation)으로 立證이 되어 메디안 特殊管理圖의 模形을 設定하기로 하였다. 但, 現實的 適用의 使宜를 위하여 試料의 크기는 홀수인 경우만으로 制限하였고, 어떤 生産로트(母集團)에서 뽑은 確率標本의 累積確率分布函數(cumulative probability distribution function:c.d.f)를 求하여 이로부터 確率密度函數(probability density function:p.d.f)를 유도, 이들로부터 標本中位數의 모든 성질을 쉽게 규명할 수 있는 바 本 研究에서는 Pearson 確率限界法을 導入하고, Shewhart 관리도에서 傳統的인 $\bar{X}$管理圖의 管理限界 근거인 正規分布下에 3σ밖으로 나갈 確率값으로 規定하여 管理限界(管理上限 : UCL, 管理下限 : LCL)를 兩側規格値(規格上限 : SU, 規格下限 : SL) 한쪽 規格値(SL 또는 SU만 指定)가 주어진 경우로 區分하여 求하고, 中心線(CL)은 標本中位數($\widetilde{X}$)를 中心線으로 하였다.

여기서 兩側規格値가 주어졌을 경우 確率 P는

$$P(\widetilde{X} \geq \mathrm{UCL}) + P(\widetilde{X} \leq \mathrm{LCL}) = 0.0027$$

이 되도록 設計하였다.

非正規分布들은 一般的으로 非對稱分布 들이므로 上記式을 만족하는 UCL과 LCL 값을 찾기가 매우 어려우므로 經濟的 方法으로

$$P(\widetilde{X} \geq \mathrm{UCL}) = P(\widetilde{X} \leq \mathrm{LCL}) = 0.00135$$

가 되도록 UCL과 LCL을 決定하였다.

한쪽 規格値가 주어진 경우의 UCL과 LCL을

$$P(\widetilde{X} \leq \mathrm{LCL}) = 0.0027$$

$$P(\widetilde{X} \geq \mathrm{UCL}) = 0.0027$$

이 되도록 UCL과 LCL을 決定하였다.

이를 근거로 非正規分布들 중 代表的인 감마分布, 베타分布, 對數正規分布, 와이블分布, 파레토分布, 切斷正規分布 等에 대한 메디안特殊管理圖를 設計하고 이들 각각에 대한 適應性을 檢討·分析하여 $\bar{X}$管理圖와 비교하여 그 우월성을 立證하고 또 그 汎用性을 위하여 實證問題로서 本 研究에서 模型設定한 메디안 特殊管理圖의 事例研究로 그 效用性을 確認하였다.

Ⅲ. 國內 管理圖法 適用現況과 問題點

1. 管理圖法 適用現況

傳統的인 平均値와 範圍에 대한 관리도의 特徵이라면 제조공정을 해석하기 위한 해석용 관리도에서는 그 공정중에서 채취한 一群의 데이터를 집계하여 規格內에서 정규분포를 하여야 한다는 前提條件이 따른다.

이는 모집단의 분포가 정규분포가 아닌 경우라도 시료의 평균치에 대한 분포는 정규분포를 가정할 수 있으나, 유한모집단이며 限定된 條件下에서는 정규분포로 추정할 수 없는 경우에 문제점을 발견할 수 있다. 실제 우리나라 현 광공업계는 上記의 조건들을 충족시켜 주지 못하

고 있는 실정이 많으며 이는 製造工程이 불안정하고, 계속적으로 가동되고 있지 않기 때문에 기인하는 경우가 대부분이다.

그 주요 원인으로서 國內 광공업계의 生産管理上의 隘路事項을 조사·분석한 國內 광공업계의 기업경영 隘路要因 조사에서 기업규모에 大差없이 1973年度 이래로 '85年 現在까지 생산관리부문이 연평균 28.8%로 가장 높았으며 매년 동일 양상을 나타내어 왔고 최근 조사·분석된 자료에서 示唆되였다.

2. 管理圖法 適用上의 問題點

1984年度中 國內 鑛工業界가 기업경영 과정에서 겪었던 어려움은 생산관리부문이 29.4%로 가장 컸던 것으로 나타났으며, 그 주된 어려움은 生産施設 20.3%, 제조기술 19.7%, 원자재 확보 곤란 19.2%, 기술인력 확보곤란 19.2% 등으로 비슷한 수준으로 높은 비중을 示唆하였다. 이는 사용설비의 노후화와 진부화 등으로 能力과 精密度의 不適當, 生産技術의 不足과 水準低下, 기술인력 확보의 곤란과 技能別·能力別로 전문화시키지 못하고 있으며 또한 원자재 확보 곤란으로 사용재료의 未標準化 등에서 상당한 原因들이 內在해 있음을 해석할 수 있다. 이상의 조사·분석의 결과는 생산관리면에서 제조공정의 不安定要因에 대한 經營的인 요소들을 分析했다.

한편 品質管理面에서는 「우리나라의 공업표준화와 品質管理에 대한 성과분석－月刊 品質管理(1968年 1月号, 韓國規格協會 發行)」에서 특히 관리도 적용상의 隘路事項을 조사한 결과 ①「동일제조공정이 계속되지 않는다」가 30% ②「실제 조처가 곤란하다」가 25%, ③「품질관리자가 부족하다」가 23%, ④「경영자의 인식부족」이 7%, ⑤「기타」가 15%로 나타났다.

이상의 제원인에 대한 분포사항도 시간의 흐름과 경제 구조에 영향입은 가변적인 데이터이겠으나, 이는 단적으로 우리나라 광공업계는 오늘 현재도 제조공정이 상당히 不安定한 상태에서 가동되고 있음을 시사하여 준다.

그리고 상기 조사에 관련된 적용관리도의 종류는 다음과 같은 現況이며 특히 國內製造기업체에서는 KS 表示許可制度실시(1963年度)에 힘입어 品質管理를 위한 제조공정관리용으로 관리도법 적용에 관심을 갖기 시작하여 1987年度 現在에 이르기까지 KS 規格으로 7종의 관리도가 制定되어 있으며 또한 관리도가 SQC 技法의 代表的인 技法 중의 한 가지로 꼽히고 있는데 最近 國內 SQC 技法 適用업체 중 관리도법 적용업체가 절대다수인 85.7%로 調査·分析되었다.

또한 國內 제조업체에서 適用하고 있는 관리도를 調査하고 이것들을 年度別로 정리한 結果는 다음 Table 3-1과 같으며 특히 平均値와 範圍의 관리도($\overline{X}-R$, X)가 적용관리도법중 통산 약 56% 이상을 適用하고 있다. 이 관리도(여기선 $\overline{X}-R$ 관리도와 X 관리도)가 效果的으로 적용되려면 제조공정이 正規分布이거나 또는 正規分布로 推定될 때 즉 균일한 상태로 유지될때 비로서 참된 效果를 얻을 수 있는 것이므로 우리나라 광공업계의 현실적인 문제에서는 제조공정이 불안정한 편이 중과수이며 특히 규격상한 또는 규격하한만이 지정되어 있는 규격품질의 제품을 생산하기 위한 제조공정에서는 正規分布를 이루는 제조공정보다 非正規分布를 이루고 있는 공정이 헤아릴 수 없이 많음을 실제 히스토그램을 그려보면 쉽게 알 수 있다.

Ⅳ. 非正規分布工程에서 計量値管理圖 適用의 改善方向과 模型設計

1. 改善方向

非正規分布를 이루고 있는 제조공정을 표준형 관리도로서는 그 적용의 정확성과 신속성을 기할 수 없으므로 올바른 제조공정 관리를 할 수 없게 된다. 이러한 문제점을 해소하기 위하여 正規分布가 아닌 제조공정에서 적용할 非正規分布用 管理圖는 다음과 같은 條件에서 適用하

Table 3-1. The Application Status of Control Chart in Korean Industry.

(單位 : %)

관리도명 / 년도	$\bar{X}-R$	P	X	P_n	C	U	특수	무표시	비 고
1966	47	20	7	9.2	8	4.6	3	1.2	월간品質管理 '66. 12月号
1967	44	19	17	9	7	4	0		〃 '68. 1月号
1969	37	15	10	4	3	1		20	〃 '70. 2月号
1974	35	24	20	9	5	2	0		標本調査 '74. 3(辛容伯)
1976	57.1	10	17.6	4.4	8.7	0.2	2		〃 '76. 11(辛容伯)
1982	38.1	14.6	21.2	2.5	1.8	9.2	4.5	大企業	亞洲大 논문집 제5집
	60.4	14.8	14.8	7.0	0.6	−	−	中小企業	'83. 3(辛容伯)
1984	2.5	31.8	13.6	2.3	9.1	0	2.3	15.9	'84. '85공장새마을품질관리
1985	28.6	30.9	14.3	4.8	4.8	0	2.3	14.3	표준화대회, 분임조활동 수상 업체 전수조사
1986	63.4	17.0	$\bar{X}-R$ 포함	P 포함	10.2	C 포함	2.2	21.0	월간工場管理 '86. 11月号

여야 한다. 즉 시료평균의 분포는 비대칭 모집단에서의 分布보다 正規分布 형태에 매우 가까울지라도 그 모집단은 때때로 정규분포 형태로부터 상당히 벗어나 있을 경우 정규모집단의 가정에 근거한 管理限界는 만족하지를 못한다.

이와 같은 문제점을 해결하기 위해서 과거에는 다음과 같은 세가지의 해결책들이 제안되었다.

첫째, 試料의 크기를 增加시킨다.

둘째, 非對稱的인 管理限界를 설정한다. 즉 관리상한 또는 관리하한 한쪽에 나타나는 點들의 確率을 되도록 같게 設定한다.

셋째, 가능한 正規分布가 되도록 資料를 對數 또는 기타의 函數로 變數變換을 하여준다.

여기서 첫째 방법은 이른바 中心極限 定理에 기초를 둔 것인데 이 方法의 단점은 試料의 크기를 얼마나 크게 해야 $\bar{X}$의 正規性이 보장되며 또 어떤 비정규 분포의 품질특성인가에 따라 달라지게 되어 그와 같은 보장이 매우 어렵고 따라서 試料의 크기를 충분히 크게 해야 하므로 여러 가지면에서 非經濟的인 단점이 있다. 또 둘째 방법은 理論的으로는 간단하나, $\bar{X}$의 경우는 그 分布函數가 몇몇 특수한 경우를 제외하고는 求할 수가 없어서 管理限界設定이 매우 어렵다는 단점을 가지고 있다. 또 셋째 방법은 앞에서도 살펴본 바와 같이 對數正規分布 등 特定分布에만 制限的으로 使用되어야 한다는 제약과 또 모든 자료는 變數變換하여야 한다는 번거러움에 그 단점이 있다. 이에 본 연구에서는 試料의 크기가 작을 때에도 좋은 성질을 나타내며, 그 分布의 特性을 규명하기 쉽고 해당 分布에 無關한 適應性이 $\bar{X}$보다 우수한 標本中位數를 기초로한 메디안 특수관리도를 모형·개발하여 上記의 問題點들을 해결하고자 한다.

2. 메디안 特殊管理圖의 模型設計

어떤 母集團, 즉 製品로트에서 무작위로 뽑은 n개의 製品의 品質特性値를 각각 X_1, …… X_n이라 하고 이들로부터 求해진 順序統計量을 $X_{(1)}$, $X_{(2)}$, $\cdots X_{(n)}$이라 表示하였다. (但, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots X_{(n)}$).

本 研究에서는 理論 전개의 便宜上 표본의 크기 n을 홀수인 경우만 고려하기로 하고 즉 $n = 2k+1$이라고 하며, 단, k는 양의 정수이다.

이 경우 표본의 中位數(sample median: $\widetilde{X}$)는 $k+1$ 번째 順序統計量인 $X_{(k+1)}$이 된다. 따라서 메디안 特殊管理圖의 設計는 順序統計量 $X_{(k+1)}$의 特性에 따라 左右된다. $F(x)$를 어떤 製品品質 特性値 X의 누적분포함수(c.d.f), $f(x)$를 확률밀도함수(p.d.f)라고 하면 이 경우 $X_{(k+1)}$의 누적분포함수는

$$P\{\widetilde{X}\leq x\}=\sum_{i=k+1}^{n} P\{i\text{개의 } X\leq x,\ n-i\text{개의 } X>x\}$$

$$=\sum_{i=k+1}^{n}\binom{n}{i}(F(x))^{i}(1-F(x))^{n-i} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4-1)$$

이 되며 따라서 확률밀도함수는 다음式(4-2)

$$f_{\widetilde{X}}(x)=\frac{(2k+1)!}{k!\,k!}(F(x))^{k}(1-F(x))^{k}f(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4-2)$$

와 같음을 알 수 있다. 따라서 표본중위수 $\widetilde{X}$의 性質은 式(4-1) 및 (4-2)로부터 쉽게 규명할 수 있다.

本 硏究에서는 이 표본중위수를 이용하여 다음과 같은 管理圖를 設計하고자 한다. 표준중위수는 中心的 性向을 추정하는 統計量의 일종이므로 製造工程이 안정상태에서 불안정상태로 된 경우에는 표본중위수가 갑자기 큰 값을 갖거나 또는 작은 값을 갖게 된다. 따라서 이와 같은 현상이 발생되면 管理圖上에서 재빨리 검출되어야 하므로 管理圖에는 管理上限(UCL) 과 管理下限(LCL)이 주어지거나 또는 規格値의 上限(SU)과 下限(SL)의 한쪽 規格만 指定된 경우에는 이들 중 하나의 管理限界가 주어져야 하며 메디안 특수관리도의 設計는 결국 이 管理限界(線)들과 中心線의 값을 어떻게 決定하느냐에 달려 있다.

本 硏究에서 管理限界 UCL 과 LCL 들은 兩側規格値(SL~SU)가 指定된 경우에는

$$P(\widetilde{X}\geq \mathrm{UCL})+P(\widetilde{X}\leq \mathrm{LCL})=0.0027 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4-3)$$

이 되도록 設計하였는데 여기서 0.0027은 전통적인 $\overline{X}$管理圖가 正規分布인 경우 3σ밖으로 나갈 확률값이다. 그러나 非正規分布들은 一般的으로 비대칭분포들이므로 (4-3)式을 만족하는 UCL 과 LCL 값을 찾기는 매우 어려움으로 等側檢推定에서 흔히 적용되는 方法으로

$$P(\widetilde{X}\geq \mathrm{UCL})=P(\widetilde{X}\leq \mathrm{LCL})=0.00135$$

가 되도록 UCL 과 LCL을 決定하였다.

따라서 (4-1)式으로부터 UCL 과 LCL은

$$P(\widetilde{X}\geq \mathrm{UCL})=1-P(\widetilde{X}\leq \mathrm{LCL})$$

$$=1-\sum_{i=k+1}^{n}\binom{n}{i}(\mathrm{F(UCL)})^{i}\cdot(1-F(\mathrm{UCL}))^{n-i}=0.00135 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4-4)$$

$$P(\widetilde{X}\leq \mathrm{LCL})=\sum_{i=k+1}^{n}\binom{n}{i}(F(\mathrm{LCL}))^{i}\cdot(1-F(\mathrm{LCL}))^{n-i}=0.00135 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4-5)$$

이 된다.

式(4-4)와 (4-5)를 만족하는 UCL과 LCL의 값은 二分法(bisection method) 등과 같은 간단한 數値解析的인 方法으로 쉽게 求할 수 있다. 또 管理圖의 中心線은 표준중위수가 母中位數(population median)의 좋은 推定値이므로 本 硏究에서도 표본중위수를 中心線으로 하였다. 品質特性値의 下限이나 上限 하나만 주어져 있는 한쪽 規格値(SL 또는 SU)만 指定된 경우

$$\text{管理下限}: P(\widetilde{X}\leq \mathrm{LCL})=0.0027 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4-6)$$

管理上限 : $P(\widetilde{X} \geq \mathrm{UCL}) = 0.0027$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4-7)$$

로 決定하면 된다.

따라서 어떤 品質特性値의 分布函數를 알 수 있으면 上記 式(4-4, 4-5) 및 (4-6, 4-7)로부터 메디안 특수관리도의 管理限界를 設計할 수 있다.

Ⅴ. 各 特殊分布에서의 메디안特殊管理圖의 設計

本 項에서는 前 Ⅳ의 2 節의 理論을 利用하여 이들 非對稱인 特殊分布들에 대한 메디안 特殊管理圖의 管理限界를 設計하고자 한다. 본 연구에서 고려되지 않은 다른 特殊分布의 경우에는 Ⅳ. 2節의 理論과 既 設計된 컴퓨터 프로그램을 약간 修正하면 쉽게 메디안 특수관리도를 설계할 수 있다. 또 이와 같은 메디안관리도를 사용하기 위해서는 각 分布에서의 母數들의 推定値를 利用하여야 되는 바, 이들에 관한 것은 좋은 성질을 갖는 推定値들이 많이 開發되어 있어 본 연구에서는 다음의 주요 非對稱分布에서 模型開發하려고 하는 메디안 特殊管理圖의 管理限界式을 設計하고자 한다.

1. 감마分布의 경우

品質特性値가 감마分布를 따를 경우 감마 분포의 확률밀도함수는

$$f_X(x) = \frac{(x-\delta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} e^{-(x-\delta)/\beta}, \quad x > \delta$$

이며, 變數變換을 利用하여 다음과 같이 管理限界線을 求할 수 있다. 즉

$$\{\mathrm{LCL} \leq \widetilde{X} \leq \mathrm{UCL}\} \equiv \left\{\frac{\mathrm{LCL}-\delta}{\beta} \leq \frac{\widetilde{X}-\delta}{\beta} \leq \frac{\mathrm{UCL}-\delta}{\beta}\right\}$$

$\frac{\mathrm{CL}-\delta}{\beta} = \frac{X-\delta}{\beta} = \mathrm{CL}_G$, $\frac{X-\delta}{\beta}$는 UCL에 대하여서는 UCL_G, LCL에 대하여서는 LCL_G라고 놓으면 이의 事實로부터

$$\begin{cases} \mathrm{CL} = \hat{\beta}\mathrm{CL}_G + \hat{\delta} \\ \mathrm{UCL} = \hat{\beta}\mathrm{UCL}_G + \hat{\delta} \cdots\cdots\cdots\cdots (5-1) \\ \mathrm{LCL} = \hat{\beta}\mathrm{LCL}_G + \hat{\delta} \end{cases}$$

과 같이 設計할 수 있다. 여기서 $\hat{\beta}$와 $\hat{\delta}$는 각각 β와 δ에 대한 추정치들이며, CL_G, UCL_G, LCL_G는 감마分布에서 메디안 특수관리도의 관리한계 係數이다.

여기서

$F_Y(y)$: 감마분포의 c. d. f

$F_{\widetilde{Y}}(y)$: 감마분포에서 뽑은 데이터의 中位數의 c. d. f

그러므로

$F_{\widetilde{Y}}(y) = \sum_{i=k+1}^{n} \binom{n}{i} (F_Y(y))^i (1-F_Y(y))^{n-i}$ 이므로

式(4-1)에서 式(4-7)에 따라 非對稱 감마分布에서 메디안 特殊管理圖의 管理限界係數들인 CL_G, LCL_G, UCL_G는 각각 中心線을 $F_Y(y) = 0.5$로 母集團의 中位數로 놓아 $F_Y(\mathrm{CL}_G) = 0.5$로 定하였다.

管理下限은 $P\{\mathrm{LCL} \geq \widetilde{X}\} = 0.00135$

$F_{\widetilde{Y}}(\mathrm{LCL}_G) = 0.00135$

管理上限은 $P\{\mathrm{UCL} \leq \widetilde{X}\}$

$= 1 - P\{\widetilde{X} \leq \mathrm{UCL}\} = 0.00135$

$F_{\widetilde{Y}}(\mathrm{UCL}_G) = 1 - 0.00135$

이들을 만족하는 값들이다.

단, $F_Y(y) = \int_0^y \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(x)} e^{-t} dt$

(Table 5-1,2)는 兩側規格指定 및 한쪽 規格指定의 경우에 CL_G, UCL_G, LCL_G의 값들을 計算整理한 係數表이다.

2. 其他 非對稱分布의 경우

감마分布이외의 代表的인 非對稱 正規分布인 베타分布, 對數正規分布, 와이블分布, 파레토分布, 切斷正規分布를 비롯하여 正規 分布까지

Table 5-1. Values of Control Limits for Gamma Distribution (Doubly Specification Assignment)

α	LCL_G		CL_G	$CL_G U$	
	n=3	n=5		n=3	n=5
1.0	0.0199	0.0511	0.6931	3.9267	2.9981
1.5	0.0914	0.1756	1.1829	4.9347	3.9100
2.0	0.2130	0.3548	1.6783	5.8510	4.7467
2.5	0.3734	0.5720	2.1757	6.7122	5.5383
3.0	0.5639	0.8168	2.6740	7.5356	6.2990
3.5	0.7782	1.0827	3.1729	8.3310	7.0370
4.0	1.0116	1.3652	3.6720	9.1047	7.7572
4.5	1.2603	1.6613	4.1714	9.8608	8.4632
5.0	1.5236	1.9687	4.6709	10.6024	9.1573
5.5	1.7977	2.2859	5.1704	11.3317	9.8415
6.0	2.0820	2.6113	5.6701	12.0502	10.5171
6.5	2.3750	2.9442	6.1698	12.7597	11.1853
7.0	2.6758	3.2847	6.6696	13.4609	11.8467
7.5	2.9836	3.6285	7.1694	14.1547	12.5023
8.0	3.2977	3.9787	7.6629	14.8422	13.1527
8.5	3.6176	4.3337	8.1690	15.5236	13.7981
9.0	3.9428	4.6929	8.6689	16.1997	14.4394
9.5	4.2727	5.0561	9.1688	16.8708	15.0766
10.0	4.6070	5.4229	9.6687	17.5374	15.7102
10.5	4.9455	5.7931	10.1686	18.1998	16.3403

Table 5-2. Values of Control Limits for Gamma Distribution (single specification assignment.

α	LCL_G		CL_G	UCL_G	
	n=3	n=5		n=3	n=5
1.0	0.0283	0.0653	0.6931	3.5773	2.7601
1.5	0.1166	0.2084	1.1829	4.5515	3.6436
2.0	0.2573	0.4064	1.6783	5.4398	4.4570
2.5	0.4371	0.6412	2.1757	6.2764	5.2282
3.0	0.6464	0.9025	2.6740	7.0775	5.9707
3.5	0.8786	1.1839	3.1729	7,8526	6.6920
4.0	1.1291	1.4810	3.6720	8.6073	7.3968
4.5	1.3948	1.7909	4.1714	9.3455	8.0882
5.0	1.6733	2.1116	4.6709	10.0703	8.7687
5.5	1.9626	2.4413	5.1704	10.7835	9.4399
6.0	2.2614	2.7789	5.6701	11.4868	10.1031
6.5	2.5685	3.1232	6.1698	12.1815	10.7592
7.0	2.8829	3.4737	6.6696	12.8685	11.4093
7.5	3.2040	3.8296	7.1694	13.5488	12.0539
8.0	3.5309	4.1903	7.6692	14.2230	12.6936
8.5	3.8632	4.5554	8.1690	14.8916	13.3287
9.0	4.2005	4.9246	8.6689	15.5552	13.9599
9.5	4.5422	5.2974	9.1688	16.2143	14.5874
10.0	4.8881	5.6736	9.6687	16.8691	15.2114
10.5	5.2378	6.0529	10.1686	17.5200	15.8323

도 前 1項의 감마分布의 경우와 같이 해당 分布의 확률밀도 함수에 변수변환을 利用하여 管理限界와 中心線을 本 研究에서 設計한 메디안 特殊管理圖의 管理限界(UCL, LCL)와 中心線(CL)의 係數를 求할 수 있다.

Ⅵ. 結　　論

本 研究에서는 品質特性値가 計量値이고 그 分布가 非對稱正規分布인 工程을 管理하기 위하여 試料의 크기가 적은(3 또는 5) 경우에 標本中位數를 기초로 한 메디안 特殊 管理圖의 模型을 開發하였다. 非對稱正規分布의 工程은 特히 生産로트의 크기가 작거나 단속적인 生産을 할 수 밖에 없는 國內 여러 企業의 製品에서 흔히 發見될 수 있는 바 이와 같은 分布에서는 標本의 平均보다 標本中位數가 模型開發에 必要한 假定에 훨씬 영향을 덜 받는다는 것은 잘 알려진 事實이다.

本 研究에서는 이와 같은 點을 利用하여 非對稱正規分布中에서 使用하기 쉽고 널리 알려진 감마分布, 베타分布, 對數正規分布, 와이블 分布, 파레토分布, 左右切斷分布 등에서 管理限界 밖으로 벗어날 確率이 0.0027이 되도록 메디안 특수관리도를 설계한 것이다.

〈Table 6-1〉은 本 研究에서 模型設計한 메디안 特殊管理圖의 中心線 및 管理限界를 나타낸 公式들이다.

Table 6-1. Equation of Control Limits for Non-Normal Distributions

分布의種類	中心線(CL)	管理上限(UCL)	管理下限(LCL)
1. 감마分布	$\hat{\beta}CL_G+\hat{\delta}$	$\hat{\beta}UCL_G+\hat{\delta}$	$\hat{\beta}LCL_G+\hat{\delta}$
2. 베타分布	$\hat{a}+(\hat{b}-\hat{a})CL_B$	$a+(b-a)UCL_B$	$a+(b-a)LCL_B$
3. 正規分布	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}}+UCL_N A_2\bar{R}$	$\bar{\bar{X}}+LCL_N A_2\bar{R}$
4. 對數正規分布	$\exp(\bar{\bar{x}})$	$\exp(\bar{\bar{x}}+UCL_N A_2\bar{R})$	$\exp(\bar{\bar{x}}+LCL_N A_2\bar{R})$
5. 와이블分布	$\hat{\delta}+\left(\frac{CL_W}{\hat{\alpha}}\right)^{1/\hat{\beta}}$	$\hat{\delta}+\left(\frac{UCL_W}{\hat{\alpha}}\right)^{1/\hat{\beta}}$	$\hat{\delta}+\left(\frac{LCL_W}{\hat{\alpha}}\right)^{1/\hat{\beta}}$
6. 파레토分布	$k\exp(CL_P/\hat{\alpha})$	$k\exp(UCL_P/\hat{\alpha})$	$k\exp(LCL_P/\hat{\alpha})$
7. 切斷正規分布			
① 左側	$\hat{\mu}+CL_T\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}+UCL_{LT}\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}+LCL_{LT}\hat{\sigma}$
② 右側	$\hat{\mu}+CL_T\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}+UCL_{RT}\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}+LCL_{RT}\hat{\sigma}$
③ 兩側	$\hat{\mu}$	$\hat{\mu}+UCL_{DT}\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}+LCL_{DT}\hat{\sigma}$

本 研究에서는 위와 같은 型態의 中心線과 管理限界를 갖는 메디안 特殊管理圖의 現實適用을 위하여 각 設計變數(design parameter) 들에 대한 係數表(上記 Table 5-1, 5-2 外 기타 分布의 경우 省略)를 計算하였다.

이와 같이 設計된 메디안 特殊管理圖의 性質을 糾明하기 위하여 먼저 $\bar{X}$管理圖에 대한 適應性을 따른다는 假定下에 設計된 傳統的인 $\bar{X}$ 관리도와 메디안 特殊管理圖에서 工程分布가 正規分布가 아닌 非對稱分布로 變化하였을 경우에 1,000번의 試料를 취해 管理限界線을 벗어난 回數를 分析한 結果, $\bar{X}$管理圖는 分布의 變化에 따라 그 形態가 많이 변하는 반면 메디안 特殊管理圖는 假定分布에 많은 영향을 받지 않는 適應性이 있음을 컴퓨터·시뮬레이션으로 立證하였다. 따라서 工程의 分布가 正規分布라는 假定이 確實하지 않는 경우에는 $\bar{X}$관리도 보다 本 研究에서 模型開發한 메디안 特殊 管理圖를 使用하는 것이 훨씬 바람직하다는 것을 實證하였다.

REFERENCES

1. Arolan, L.A., and Levene, H., (1950), *"The Effectiveness of Quality Control Charts,"* Journal of the American Statistical Association, Vol. 45, No.252, 520-529.
2. Burr, I.W., (1967), *'The Effect of Non-Normality on Constants for $\bar{X}$ and R Charts,"* Industrial Quality Control, Vol. 23, No. 11, 563-569.
3. Bisgaard, S., Hunter W.G. and pallesen, L., (1981), *"Economic Selectior of Quality of Manufactured Product,"* Technometrics, Vol 26, No. 1, 9-18.
4. Chung-How, Y., and Hillier, F.S., (1970), *"Mean and Variance Control Chart Limits Based on a Small Number of Subgroups,"* Journal of quality Technology, Vol.2, No.1, 9-16.
5. Chiu, W.K. and Wetherill, G.B., (1974), *"A Simplified Scheme for the Economic Design of $\bar{X}$-Charts,"* Journal of Quality Technology, Vol.6, No.2, 63-69.
6. Denissoff, B.A., (1980), *"Process Control Management,"* Quality Progress, Vol.13, No.6, 14-16.
7. Ferrell, E.B., (1964), *"A Median, Midrange Chart Using Run-Size Subgroups,"* Industrial Quality Control, Vol.20, No.10, 1-4.
8. Gibra, I.N., (1971), *"Economically Optimal Determination of the Parameters of an $\bar{X}$-Control Chart,"* Management Science, Vol. 17, No. 9, 635-646.
9. Hillier, F.S., (1964), *"$\bar{X}$-Chart Control Limits Based on A Small Number of Subgroups,"* Industrial Quality Control, 24-29.
10. Johnson, N.L., (1966), *"Cumulative Sum Control Charts and the Weibull Distribution,"* Technonmetrics, Vol.8, No.3, 481-481.
11. Lloyed S. Nelson, (1984), *'The Shewhart Control Chart test for Special Causes,"* Journal of Quality Technology, October.
12. Moore, P.G., (1957), *"Non-Normality in Quality Control Charts,"* Applied Statistics, Vol.6.
13. Nelson, P.R., (1979), *"Control Charts for Weibull Processes with Standards given,"* IEEE Transactions and Reliability, Vol.28, 283-288.
14. Schilling E.G. and Nelson, P.R., (1976), *"The Effect of Non-Normality on the Control Limits of Xbar charts,"* Journal of Quality Technology, Vol.18, 183-188.
15. Shahani, A.K., (1971), *"A Control Chart Based on Sample Median,"* Quality Engineer, Vol.35, 7-9.
16. 日本規格協會 (1966), 品質管理便覧 157～159.
17. 大韓商工會議所 (1984. 4～1985. 4), 企業經營隘路要因調査報告
18. 黃義徹 (1980), 最新品質管理, 博英社, 305～373.
19. 辛容伯 (1985), "中小企業을 위한 效果的인 TQC 適用方案에 관한 研究," 安養商工會議所, 安養地域經濟研究센터. 15, 89～94.
20. 辛容伯 · 黃義徹 (1986), "非對稱와이블 分布工程에서 메디안特殊管理圖의 設計," 品質管理學會誌, Vol. 14, No.2, 2～8.