Journal of the KSQC
Vol. 15, No. 2, 1987

自動車 排出가스 試驗에서 3公害要素에 대한 變化要因(DF)分布에 관한 硏究

A Study on the Distribution of the Deterioration Factor for Three Pollutants in Motor Vechicle Emission Test

趙 載 岦*
黃 義 徹**

ABSTRACT

The Deterioration Factor (DF) for a single pollutant within an engine family is computed as the ratio of two points on a linear regression line describing durability vehicle test results as a function of accumulated mileage. It is inteded to represent the factor by which emissions will increase during the "useful life" of a vehicle in the engine family.

Here are discribed procedures for computing the DF and how consideration of the DF is included in the development for the motor vehicle emission certification process. This paper is aimed to develop the distribution of the DF for three pollutant and to estimate the parameter values for the distribution of the DF.

I. 序 論

최근 公害問題는 우리 사회의 최대의 관심사가 되고 있다. 특히 環境汚染의 主要原因 중의 하나인 자동차의 有害排出가스의 放出은 자동차의 수가 急增함에 따라 큰 문제로 대두되고 있다. 국내 각 도시의 수송수단에 있어서도 自動車化의 비율이 매우 빠른 속도로 증가되고 있으며 차량 1대당 1일 주행거리가 증가됨에 따라 自動車 排出가스의 浄化에 의한 大氣汚染防止의 사회적 과제의 해결과 더불어 효율적인 燃料類의 소비억제 조치가 뒤따라야 된다고 생각된다.

* 慶熙大學校 産業工學科
** 漢陽大學校 産業工學科

이를 위해 環境廳은 배출가스 규제를 강화하기 위해 새 모델의 승용차에 대해 그 規制値를 강화하였다. 즉 內需品의 자동차 5종(엑셀, 프레스토, 그렌저, 르망, 프라이드)에 HC-0.25g/km, CO-2.11g/km, NOx-0.62g/km의 許容基準値를 적용하게 되었다. (1987. 7. 1)

이러한 조치들은 우리나라 환경청이 公害防止를 위해 취한 劃期的인 조치로 사려된다.

本 論文에서는 바로 이 배출가스의 保證試驗에 基本資料가 되는 變化要因(Deterioration Factor이하 DF)의 分布에 대해 논하고저 한다.

먼저 單一公害要素에 대한 DF의 분포와 母數(parameter)를 推定한 후 3公害要素에 대한 *DF*의 분포와 모수를 추정해 보도록 한다.

Ⅱ. 排出保證工程과 DF의 計算

배출가스 보증시험에서 基本資料가 되는 것은 자동차 생산라인을 엔진의 형태에 따라 分類하여 비슷한 배출량을 갖는 자동차로 단정한다. 따라서 승용차에 대한 使用壽命은 5년 혹은 50,000마일로 정의하고 있다. 이에 따라 미환경청은 배출규제치를 설정하여 보증시험을 수행한다. 우선 2가지 용도에 따른 자동차가 선택된다.

첫째는 엔진의 형태에 따라 耐久性試驗 자동차가 선택된다. 그리고 50,000마일 시험을 하여 정기적으로 排出測定값을 시험공정에 사용하도록 한다. 그리고 이를 종합하여 보고하도록 하고 있다. 그러면 이 측정 데이터는 각 공해 요소의 標準規制値에 대한 DF를 계산하는데 사용된다.

이 DF는 자동차를 사용함에 따라 증가되는 배출량의 값을 예측하는데 활용된다.

둘째로 엔진의 형태에 따라 몇대의 자동차가 선택된다. 선택된 자동차는 우선 4,000마일 試驗稼動을 한 후 DF를 사용하여 50,000마일에 대한 배출가스량을 예측하여 표준치와 비교하는 방식을 취하고 있다. 이 결과 만약 어떤 公害要素에 대해 표준배출값을 초과하면 불합격된다. 그 다음 이 불합격된 자동차는 단 1회에 한하여 제조자가 再試驗하도록 하고 있다. 만약 再試驗된 자동차가 각 공해요인중 1개 이상의 표준치를 초과하는 경우 保證檢査에서 불합격되게 된다. 따라서 이 불합격된 자동차는 제조자의 생산라인에서 초과 배출된 공해요소를 감소시킬 수 있도록 조치를 취하게 된다. 이러한 조치는 제조자가 수정안을 제출할 수 있도록 허용하며 환경청은 이 수정안에 대해 표준치내에 드는 배출값을 갖는지 여부에 대한 부수적인 검사를 하게 된다. 따라서 모든 배출가스데이터가 최종적으로 보증검사에 합격할 때 제조업자는 생산라인을 보증하는데 필요한 서류를 제출할 수 있다. 이 단계가 환경청이 제조업자들에게 보증공정과 일치하는 자동차를 만들도록 허락하는 단계이다.

따라서 淨化裝置를 부착한 자동차배출가스의 3公害要因(HC, CO, NOx)에 대한 DF의 계산은 선형모델에 기초를 두게 되며 그 計算方法은 다음과 같다.

$W_j(x)$ = 공해요인 $j(j=1,2,3)$에 대해 x 마일 운행후의 배출량

$a_j = W_j(x)$ 직선의 경사

ε_j = 배출량대 운행거리의 시험결과에 대한 표준편차

선형모델은 다음과 같이 가정한다.

$$W_j(x) = W_j(0) + a_j x + \varepsilon_j$$

따라서 DF는 다음과 같이 구한다.

$$\Delta_j = \max\left(\frac{\overline{W}_j(50,000)}{\overline{W}_j(\ 4,000)},\ 1.0\right)$$

여기서 $\overline{w}_j(x) = w_j(x)$의 추정치, $\overline{w}_j(x)$는 내구성 시험에 대한 최소자승회귀로 개발된다. $\overline{w}_j(0)$ = 내구성 시험에 관한 $w_j(0)$의 추정치, $\bar{a}_j$ = 내구성 시험에 관한 a_j의 추정치.

따라서 DF는

$$\Delta_j = \max\left(\frac{\overline{w}_j(0) + 50,000\,\bar{a}_j}{\overline{w}_j(0) + \ 4,000\,\bar{a}_j},\ 1.0\right)$$

j공해요인에 대한 4,000마일 배출시험값으로부터 50,000마일 배출값을 예측하기 위해서는 Δ_j를 곱해야 한다.

이들 시험값은 제조되는 생산라인의 배출비의 값과 반드시 같도록 해야 한다. 그러나 DF의 값은 자동차가 連速稼動되어 발생하는 환경조건에 따라 변화하기 때문에 참공정의 개략치 계산값으로 처리될 수 있다. 때문에 변화가 심한 공정에 대해서는 다음과 같은 오차가 발생하게 된다.

(1) 보증된 엔진의 평균배출값이 표준치 보다 크다고 오판할 과오

(2) 보증할 수 없는 엔진의 평균배출값이 표준치보다 작다고 오판할 과오이다.

그래서 공정보증의 목표는 이들 오차를 일정하게 유지할 수 있고 또한 최소배출값이 유지되도록 하여 공정보증비용을 최소로 할수 있는 합리적인 DF값의 설정방법을 가정하게 된다.

Ⅲ. 單一公害要素에 대한 DF의 分布

단일공해요소에 대한 DF의 분자(분모)는 배출시험을 통해 얻은 회귀선의 한점이다. 시험결과의 값이 배출 데이터값과 같다고 가정하면 DF의 분자(분모)는 10개의 대수정규분포를 하는 확률변수의 線形結合이 된다. 中心極限値의 정리에 의해 이 합은 개략적으로 정규분포를 하게 된다. 따라서 DF는 두개의 정규분포를 하는 確率變數의 比로써 나타낼 수 있다. 〔Marsaglia, 1965〕 따라서 단일공해요인에 대한 DF의 고찰은 다음과 같다.

$D1$ = 참 DF의 분자

$D2$ = 참 DF의 분모

$\Delta 1$ = 측정된 DF의 분자

$\Delta 2$ = 측정된 DF의 분모라 하자.

모수 $\Delta 1$과 $\Delta 2$는 排出回歸直線의 50,000마일과 4,000마일 점이다. 그래서 측정된 DF 즉 Δ는 $\max(\Delta 1/\Delta 2,\ 1)$과 같게 된다. 또한 $D1$과 $D2$는 개략적으로 평균 $\Delta 1$과 $\Delta 2$를 갖는 정규분포 확률변수로 나타낼 수 있다. 따라서 $D1/D2$의 분포는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\begin{aligned}&P[D1/D2<\delta]\\&=P[D1\leq\delta D2,\ D2>0]+P[D1\geq\delta D2,\ D2<0]\\&=P[-D1+\delta D2\geq 0,\ D2>0]\\&+P[D1-\delta D2\geq 0,\ D2<0] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)\end{aligned}$$

이들 확률은 두항이 개략적으로 2변수 정규분포를 하는 관측치에 의해 계산할 수 있다. 그러나 계산은 $P(D2>0)=1$임을 알면 단순화할 수 있다. 이 조건이 성립하지 않으면 $D2$가 정규분포를 한다는 가정은 성립되지 않는다. 이 사실로부터 試驗結果値가 음의 값이 될 수도 있으며 또한 일반적으로 $\Delta 2/\mathrm{Var}(D2)>3$이라는 사실도 성립한다.

따라서 $P(D2>0)=1$이라 하면 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned}&P(-D1+\delta D2\geq 0,\ D2>0)\\&=P(-D1+\delta D2\geq 0)\ \text{이고}\\&P(D1-\delta D2\geq 0,\ D2<0)=0\ \text{이 된다.}\end{aligned}$$

고로 $P[D1/D2\leq\delta]\approx P[-D1+\delta D2\geq 0]$이 된다.

그러나 $-D1+\delta D2$는 평균이 $-\Delta 1+\delta\Delta 2$이고, 분산은

$\mathrm{Var}(-D1+\delta D2)=E(-D1+\delta D2+\Delta 1-\delta\Delta 2)^2$인 개략적인 정규분포를 한다. 또한 이 분산을 대수적으로 변환하면 $\mathrm{Var}(D1)+\delta^2\mathrm{Var}(D2)-2\delta\mathrm{COV}(D1,\ D2)$가 된다.

따라서

$$P(D1/D2\leq\delta)$$

$$\simeq\Phi\frac{\delta\Delta_2-\Delta_1}{\sqrt{\mathrm{Var}(D_1)+\delta^2\mathrm{Var}(D_2)-2\delta\mathrm{COV}(D_1,\ D_2)}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

여기서 Φ는 표준정규분포함수이다.

따라서 DF의 밀도함수는

$$d(\delta;\ \Delta1/\Delta2)$$

$$=\frac{d}{d\delta}\Phi\left(\frac{\delta\Delta2-\Delta1}{\sqrt{\mathrm{Var}(D_1)+\delta^2\,\mathrm{Var}(D_2)-2\delta\,\mathrm{COV}(D_1,\ D_2)}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Var}(D_1)+\delta^2\,\mathrm{Var}(D_2)-2\delta\,\mathrm{COV}(D_1,\ D_2)}}\Delta_2$$

$$-\left[\frac{(\delta\Delta_2-\Delta_1)[\delta\mathrm{Var}(D_2)-\mathrm{COV}(D_1,\ D_2)]}{\mathrm{Var}(D_1)+\delta^2\,\mathrm{Var}(D_2)-2\delta\mathrm{COV}(D_1, D_2)}\right]$$

$$\cdot\phi\left(\frac{\delta\Delta_2-\Delta_1}{\sqrt{\mathrm{Var}(D_1)+\delta^2\,\mathrm{Var}(D_2)-2\delta\,\mathrm{COV}(D_1,\ D_2)}}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

여기서 ϕ는 표준정규분포의 확률밀도 함수이다. 이 밀도함수 d에 대한 형태는 단일 공해요소에서 DF의 가변성을 나타내는데 사용된다. 따라서 단일공해요소의 DF 분포는 대수정규분포를 한다. 위에서 나타낸 이 개략치 계산형태는 $\Delta1$과 $\Delta2$의 단독함수로 나타낼 수 있으며 $d(\delta;\ \Delta1/\Delta2)$는 그들의 비에 의존하게 됨을 알 수 있다.

Ⅳ. 單一公害要素에 대한 DF分布의 母數推定

위에서 밀도함수값을 계산하기 위해서는 필히 $\Delta1$, $\Delta2$, Var($D1$), Var($D2$)와 COV($D1$, $D2$)의 값으로 세분된다. 앞에서 언급한대로 $\Delta1$과 $D2$는 변화된 공정을 나타내는 회귀선의 2점이다. 그리고 다른 모수들의 값은 이 公害要素에 대해 알고 있는 檢査精密度 ε와 DF의 값을 계산하기 위한 데이터를 이용하여 산출할 수 있다. 이 모수들의 계산방법은 다음과 같다.

N=DF 회귀선직선을 설정하는 데 사용된 시험점의 수

x_i=i번째 시험결과치(내구성 시험으로 부터 얻게된 마일수)

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i,$$

$$S_x=\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2,$$

$y(x_i)$=x_i 마일에서의 배출측정치

$\bar{y}(x)$=회귀선으로부터의 $y(x)$의 추정치

이 線形回歸에 대한 基本方程式은 $\bar{y}(x)$가 $y(x_i)$ 점으로부터 어떻게 추정되는가를 설명한다.

$$\bar{y}(x)=\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}y(x_i)x_i-\bar{x}\sum_{i=1}^{N}y(x_i)}{S_x}\right)x+\frac{\sum_{i=1}^{N}y(x_i)}{N}$$

$$-\bar{x}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}y(x_i)x_i-\bar{x}\sum_{i=1}^{N}y(x_i)}{S_x}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}y(x_i)[(x-\bar{x})\left(\frac{x_i-\bar{x}}{S_x}\right)+\frac{1}{N}]\ \cdots\cdots (4)$$

만일 점 $y(x_i)$가 確率変数로 처리될 수 있다면 $\bar{y}(x)$의 分散은 $y(x_i)$의 분산으로 나타날 수 있다.

$$\mathrm{Var}[\bar{y}(x)]=\sum_{i=1}^{N}\mathrm{Var}[y(x_i)]\ \ [(x-\bar{x})(\frac{x_i-\bar{x}}{S_x})+\frac{1}{N}]^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

보통 최소자승회귀분석의 가정은 $y(x_i)$가 서로 독립적이고 동일한 분산을 갖는 정규분포확률변수가 된다. 그러나 여기서는 $y(x_i)$가 대수정규분포를 하고 있다고 가정하고 있기 때문에 共変動은 상수가 된다.

$$\frac{\sqrt{\mathrm{Var}[y(x_i)]}}{E[y(x_i)]}=K,$$

여기서 K는 상수이다. $E[y(x_i)]$값은 DF를 계산하기 위해 사용된 回歸方程式에 의해 구할수 있다.

回歸直線上의 두점 $\Delta1=E[y(50,000)]$과 $\Delta2=E[y(4,000)]$으로 바꾸어 다른 모수값들을 계산할 수 있다.

$E[y(x_i)]=\Delta2+(x_i-4,000)(\Delta1-\Delta2)/46,000$

또한 Var[$y(x_i)$]는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$Var[y(x_i)] = K^2 E[y(x_i)]^2$$
$$= K^2[\Delta 2 + (x_i - 4,000)(\Delta 1 - \Delta 2)/46,000]^2$$

따라서 배출값은 대수정규분포를 하기 때문에 K^2은 다음 관계식으로 결정할 수 있다.

$$\frac{1}{\varepsilon} = ln(1+K^2)$$

여기서 $\frac{1}{\varepsilon}$은 대수적으로 변형된 시험 결과의 분산이다.

고로 $K^2 = \exp(\frac{1}{\varepsilon}) - 1$ [Aitchison and Brown, 1957]

이것은 $\bar{y}(x)$의 분산이 다음과 같게 된다.

$$Var[\bar{y}(x)] = \sum_{i=1}^{N}[\exp(\frac{1}{\varepsilon})-1][\Delta 2 + (x_i - 4,000) \cdot (\Delta 1 - \Delta 2)/46,000]^2 \cdot [(x-\bar{x})(\frac{x_i - \bar{x}}{S_x}) + \frac{1}{N}] \cdots\cdots\cdots (6)$$

현행절차에서는 실제로 회귀직선을 계산하기 위한 데이터점으로 매 5,000마일점과 내구성 시험점 총 50,000마일로 누적하여 정하고 있다.

그래서 $N = 10$

$x_i = 5,000i$ $(i=1,\ldots, 10)$

이 결과 $\bar{x} = 27,500$

$S_x = 2.0625 \times 10^9$

고로 $Var[\bar{y}(x)]$의 방정식에 이 값을 대체하여 계산할 수 있다.

$$Var[\bar{y}(x)] = [\exp(\frac{1}{\varepsilon})-1]\sum_{\lambda=1}^{10}[\Delta 2 + 5,000i - 4,000)(\Delta 1 - \Delta 2)/46,000]^2 \cdot [(x-27,500)(\frac{5,000i - 27,500}{2.0625\times 10^9}) + \frac{1}{10}]^2 \cdots\cdots\cdots (7)$$

여기서 ε, $\Delta 1$, $\Delta 2$의 函數를 순서적으로 $V[\bar{y}(x)]$의 표기에 $x = 50,000$. $x = 4,000$으로 대체하면 $Var(D1) = Var[y(50,000)]$과 $Var(D2) = Var[\bar{y}(4,000)]$으로 결정할 수 있다.

만일 $\Delta 1 = \Delta 2$(DF의 값이 1인 경우)가 되는 특별한 경우 그 표기는 $Var(D1) = .3455\ \Delta 1^2 [\exp(\frac{1}{\varepsilon}) - 1]$, $Var(D2) = .3678\ \Delta 1^2 [\exp(\frac{1}{\varepsilon}) - 1]$로 단순화할 수 있다. 단일공해요소에서 ε의 값은 공분산 매트릭스 ε^{-1}에서 얻게 된다. COV(D1, D2)의 값을 결정하기 위한 방법도 거의 비슷하다. 回歸直線에 대한 2점의 共分散은 쉽게 구할 수 있다.

$$COV[\bar{y}(x), y(\bar{z})] = \sum_{i=1}^{N} Var[y(x_i)][(x-\bar{x})(\frac{x_i - \bar{x}}{S_x}) + \frac{1}{N}][(z-\bar{x})(\frac{x_i - \bar{x}}{S_x}) + \frac{1}{N}].$$

위에서 결정해야 할 값은 $Var[y(xi)]$, x_i, $\bar{x}$, S_x와 N으로 다음과 같이 대체하여 그 값을 구할 수 있다.

$$COV[\bar{y}(x), y(\bar{z})] = [\exp(\frac{1}{\varepsilon})-1]\sum_{i=1}^{10}[\Delta 2 + (5,000i - 4,000)(\Delta 1 - \Delta 2)/46,000] \cdot \left[(x-27,500)\left(\frac{5,000i-27,500}{2.0625\times 10^9}\right) + \frac{1}{10}\right] \left[(z-27,500)\left(\frac{5,000i-27,500}{2.0625\times 10^9}\right) + \frac{1}{10}\right] \cdots\cdots\cdots (8)$$

또한 위의 $COV[\bar{y}(x), y(\bar{z})]$의 표기에서 $x = 50,000$과 $z = 4,000$으로 대체하면 ε, $\Delta 1$, $\Delta 2$의 함수로써

$COV(D1, D2) = COV[\bar{y}(50,000), \bar{y}(4,000)]$ 특별한 경우 $\Delta 1 = \Delta 2$일 때는 다음과 같이 간단히 표기된다.

$$COV(D1, D2) = -.1564\Delta 1^2[\exp(\frac{1}{\varepsilon}) - 1] \cdots\cdots\cdots (9)$$

V. 3公害要素에 대한 理論的 結果의 擴張

여기서는 앞의 単一公害要素의 결과를 3公害要素問題로 확장하도록 한다. 바로 이 확장의 결과는 단일公害要素의 DF 값이 정당화됨을 立證하려는 것이다.

따라서 3公害要素에 대한 표기는 다변수 문제이기 때문에 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$\underline{D}1=\begin{pmatrix} D_{11} \\ D_{12} \\ D_{13} \end{pmatrix}$$

여기서 $\underline{D}1$는 HC, CO, NOx에 대한 참 DF의 分子벡터라 하자.

$$\underline{D}2=\begin{pmatrix} D_{21} \\ D_{22} \\ D_{23} \end{pmatrix}$$

여기서 $D2$는 참 DF의 分母벡터라 하자.

$$\underline{\Delta}1=\begin{pmatrix} \Delta_{11} \\ \Delta_{12} \\ \Delta_{13} \end{pmatrix}$$

여기서 $\underline{\Delta}1$은 측정된 DF의 分子벡터라 하자.

$$\underline{\Delta}2=\begin{pmatrix} \Delta_{21} \\ \Delta_{22} \\ \Delta_{22} \end{pmatrix}$$

여기서 $\underline{\Delta}2$는 측정된 DF의 分母벡터라 하자.

다음은 単一公害要素와 같은 방법으로 開発해 보도록 한다.

우선 다음과 같이 놓자.

$$P[\frac{D_{11}}{D_{21}}\leq\delta_1,\ \frac{D_{12}}{D_{22}}\leq\delta_2,\ \frac{D_{13}}{D_{23}}\leq\delta_3]$$
$$=P[D_{11}\leq\delta_1 D_{21},\ D_{21}>0,\ D_{12}\leq\delta_2 D_{22},\ \text{DF}\ D_{22}>0,\ D_{13}\leq\delta_3 D_{23},\ D_{23}>0]+0,\ \cdots(10)$$

여기서 "0"은 $D_{21}\leq 0$, $D_{22}\leq 0$, $D_{23}\leq 0$인 항을 대표한다.

또한 $P[D_{21}>0]=1$, $P[D_{22}>0]=1$, $P[D_{23}>0]=1$이기 때문에 위식의 표현은 개략으로 다음과 같다.

$$P[\frac{D_{11}}{D_{21}}\leq\delta_1,\ \frac{D_{12}}{D_{22}}\leq\delta_2,\ \frac{D_{13}}{D_{23}}\leq\delta_3]$$
$$\approx P[D_{11}\leq\delta_1 D_{21},\ D_{12}\leq\delta_2 D_{22},\ D_{13}\leq\delta_3 D_{23}]$$
$$=P[-D_{11}+\delta_1 D_{21}\geq 0,\ -D_{12}+\delta_2 D_{22}\geq 0,\ -D_{13}+\delta_3 D_{23}\geq D].\ \cdots\cdots\cdots(11)$$

에서와 같이 D_{ij}는 개략적으로 正規分布를 한다. 고로 $-D_{1j}+\delta_j D_{2j}$도 또한 개략적으로 正規分布한다.

이것은 위의 확률이 평균벡터

$$\begin{pmatrix} -\Delta_{11}+\delta_1\Delta_{21} \\ -\Delta_{12}+\delta_2\Delta_{22} \\ -\Delta_{13}+\delta_3\Delta_{23} \end{pmatrix}$$

와 分散

$$\mathrm{Var}(-D_{1j}+\delta_j D_{2j})$$
$$=\mathrm{Var}(D_{1j})+\delta_j^2\,\mathrm{Var}(D_{2j})-2\delta_j\,\mathrm{Cov}(D_{1j},\ D_{2j})$$
$$(i=1,\ 2,\ 3)$$

인 3변수 正規分布로부터 計算할 수 있다.

이 分布에서 共分散은 다음과 같이 계산된다.

$$\mathrm{Cov}[(-D_{1j}+\delta_j D_{2j})(-D_{1K}+\delta_K D_{2K})]$$
$$=[(-D_{1j}+\delta_j D_{2j}+\Delta_{1j}-\delta_j\Delta_{2j})$$
$$(-D_{1K}+\delta_K D_{2K}+\Delta_{1K}-\delta_K\Delta_{2K})]\cdots\cdots\cdots\ (12)$$

대수적으로 변환하면 이 共分散은 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$\mathrm{Cov}(D_{1j},\ D_{1K})-\delta_K\mathrm{Cov}(D_{1j},\ D_{2K})$$
$$-\delta_j\mathrm{Cov}(D_{2j},\ D_{1K})+\delta_j\delta_K\mathrm{Cov}(D_{2j},\ D_{2K})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\ (13)$$

고로 요구되는 共分散은 두 回帰線上의 점의 組合 사이에 4개의 共分散의 線形結合이 된다. 이것은 代数正規分布를 하는 確率変数로 기본데이터가 상관관계에 있을 때 두개의 다른 回帰直線에 대해 2점의 共分散을 계산하는 것이 필수적이다.

이들 각각의 共分散은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathrm{Cov}(D_{lj},\ D_{mK}) = E[(\sum_i \beta_{il} y_j(x_i) - \Delta_{lj})$$

$$(\sum \beta_{im} y_K(x_i) - \Delta_{mK})] \cdots\cdots\cdots \quad (14)$$

여기서 $\beta_{il} = x_i$ 마일에서 시험결과에 대한 DF 의 分子($l=1$) 나 分母($l=2$) 를 계산하기 위해 회귀선에서 사용되는 가중치

$$= (Z_l - \bar{x})\left(\frac{X_i - \overline{X}}{S_X}\right) + \frac{1}{N}$$

(여기서 $Z1 = 50,000$, $Z2 = 4,000$)

$y_j(x_i)$마일에서 j 公害要素의 試験結果値

이 표기는 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$\mathrm{Cov}(D_{lj},\ D_{mK}) = \sum_i \sum_n \beta_{il}\beta_{nm}\{\mathrm{Cov}[y_j(x_i),\ y_K(x_n)] + E[y_j(x_i)]E[y_k(x_n)]\} - \Delta_{lj}\Delta_{mK} \cdots\cdots (15)$$

다음의 유의해야 한다.

$$\mathrm{Cov}[y_j(x_i),\ y_k(x_n)] = \begin{cases} \mathrm{Cov}[y_j(x_i),\ y_k(x_i)] & \text{만약 } i = n \\ 0 & \text{만약 } i \neq n \end{cases}$$

고로 위의 標記는 다음과 같이 줄일 수 있다.

$$\mathrm{Cov}(D_{lj},\ D_{mk}) = \sum_i \beta_{il}\beta_{im}\,\mathrm{Cov}[y_j(x_i),\ y_k(x_i)] \cdots\cdots\cdots \quad (16)$$

그러면 이제 $\mathrm{Cov}[y_j(x_i),\ y_k(x_i)]$의 형태를 결정하도록 하자. 이것은 두개의 代数正規分布를 하는 확률변수에 대한 共分散은 다음과 같은 형태를 갖게 됨을 알 수 있다.

$$\mathrm{Cov}[y_j(x_i),\ y_k(x_i)] = E[y_j(x_i)]\ E[y_k(x_i)]\ [\exp(\underline{\varepsilon}^{-1})_{jk} - 1]$$

여기서 $(\underline{\varepsilon}^{-1})_{jk}$는 대수적으로 변환된 共分散 매트릭스 $\underline{\varepsilon}^{-1}$의 $j-k$번째 元素이다.

그러면 $E[y_j(x_i)]$는 回歸線의 특수한 점이된다.

즉

$$E[y_j(x_i)] = \Delta_{2j} + (5,000i - 4,000)\ (\Delta_{1j} - \Delta_{2j}) / 46,000,$$

고로

$$\mathrm{Cov}[y_j(x_i),\ y_k(x_i)] = [\Delta_{2j} + (5,000i - 4,000)(\Delta_{1j} - \Delta_{2j})/46,000] \cdot [\Delta_{2k} + (5,000i - 4,000)\ (\Delta_{1k} - \Delta_{2k})/46,000]\ [\exp(\underline{\varepsilon}^{-1})_{jk} - 1] \cdots\cdots\cdots \quad (17)$$

마지막으로

$$\mathrm{Cov}(D_{lj},\ D_{mk}) = \sum_i [(Z_l - \bar{x})(\frac{X_i - \overline{X}}{S_x}) + \frac{1}{N}]$$

$$\cdot [(Z_m - \bar{x})\ (\frac{X_i - \overline{X}}{S_x}) + \frac{1}{N}]$$

$$\cdot [\Delta_{2j} + (5,000i - 4,000)\ (\Delta_{1j} - \Delta_{2j})/46,000]$$

$$\cdot [\Delta_{2k} + (5,000i - 4,000)(\Delta_{1k} - \Delta_{2k})/46,000]$$

$$[\exp(\underline{\varepsilon}^{-1})_{jk} - 1]$$

$$= [\exp(\underline{\varepsilon}^{-1})_{jk} - 1] \sum_{i=1}^{10} [\Delta_{2j} + (5,000i - 4,000)(\Delta_{lj} - \Delta_{2j})/46,000]$$

$$\cdot [\Delta_{2k} + (5,000i - 4,000)(\Delta_{1k} - \Delta_{2k})/46,000]$$

$$\cdot [(Z_l - 27,500)(\frac{5,000i - 27,500}{2,0625 \times 10^9}) + \frac{1}{10}]$$

$$\cdot [(Z_m - 27,500)(\frac{5,000i - 27,500}{2.0625 \times 10^9}) + \frac{1}{10}] \cdots\cdots\cdots \quad (18)$$

만일 $j = k$이면 이 표기는 単一公害要素에서 주어진 같은 回歸直線上의 두점에 대한 共分散으로 単純化할 수 있다는 것을 입증할 수 있다.

Ⅵ. 結　　論

自動車排出가스의 DF分布는 耐久性 試験 自動車의 累積稼動試験 결과에 대한 함수로 나타나는 回歸直線上의 2 점의 比로 계산됨을 입증할 수 있으며 이들 単一公害要素에 대한 단일변수를 기초로한 DF의 推定値와 3公害要素에 대한 단일변수를 기초로한 DF의 推定値는 이론상 동일한 推定値를 갖게 됨을 확인할 수 있었다.

따라서 3公害要素에 대한 DF의 분포는 엔진의 사용기간 동안 排出量이 증가하는 경향을 예측할 수 있는 유일한 技法임을 주장하며 그 활용을 기대한다.

参 考 文 献

1. Aitchison, J. and Brown, J.A.C., (1957), The Lognormal Distribution, Cambridge at the University Press.
2. Anderson, T.W., (1958), An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, John Wiley and Sons, Inc.
3. Cohen, A.C. and Whitten, B.J., (1985), *"Modified Moment Estimation for the Three-Parameter Inverse Gaussian Distribution,"* Journal of Quality Technology, Vol. 17, No. 3, 147-154.
4. Cooley, W.W. and Lohnes, P.R., (1971), Multivariate Data Analysis, Wiley.
5. Lorenzen, T.J., (1980), *"Determining Statistical Characteristics of a Vehicle Emissions Audit Procedure,"* Technometrics, Vol. 22, No. 4, 483-493.
6. Marsaglia, G., (1965), *"Ratios of Normal Variables and Ratios of Sums of uniform Variables,"* Journal of the American Statistical Association, Vol. 60, 193-204.
7. Moore, M.L., (1973), *"Assurance and Control of Vehicle Emission Testing,"* SAE Paper No. 730534, Society of Automotive Engineers.
8. US Government, (1975), *"Rules and Regulations, Part 86 Control of Air Pollution from New Motor Vehicles and New Motor Vehicle Engines: Certification and Test Procedures,"* Federal Register, Vol. 40, No. 126.