Comm. Korean Math. Soc. 2 (1987), No. 1, pp. 1~7

리이만 다양체상의 조화함수에 관하여
(On the Harmonic functions on Riemannian Manifolds)

자 동 표

0. 머 릿 말

조화 함수란 이의 라플라시안이 0이 되는 함수를 뜻한다. 만일 주어진 리이만 다양체가 경계가 없는 긴밀 다양체이면 이 위에 정의되는 조화(harmonic)함수는 상수뿐이다. 따라서 폐다양체상의 조화함수이론은 별로 의미가 없다. (그러나 고유값이나 고유 함수에 대한 연구는 아주 중요하고 현재도 많은 기하학자들에 의하여 연구되고 있다). 그러나, 우리는 이미 학부과정의 수학에서도 알다시피 평면의 단위원에서의 조화함수이론도 그 의미가 매우 깊다는 것을 안다. 〔소위 Poisson적분 공식, 즉 단위원상에 적당한 함수(연속일 필요도 없음)가 주어 졌을때 이를 경계값으로 하는 원안에서 정의된 조화함수가 존재한다. 물론 주어진 함수가 연속이 아니면 경계값이라는 것의 의미를 더 충실히 하여야 한다〕. 일반적으로 조화함수이론은 비긴밀 완비 리이만다양체에서 의미가 있다. 그러면 먼저 어떤 다양체가 상수가 아닌 조화함수를 가질 것인가 하는 질문을 하게 된다. 이에 대한 첫번째 부정적인 대답은 다음의 Yau의 정리이다.

정리 1. (Yau [6]) M이 완비 리이만 다양체이고 이의 Ricci 곡률이 모든 점에서 0보다 크거나 같으면 이 위에 정의된 유계(bounded) 혹은 음이 아닌 조화함수는 상수 뿐이다.

Yau는 다음의 또 다른 부정적인 결과도 얻었다.

정리 2. (Yau [6]) M이 완비 리이만 다양체이고 f가 $L^p(M)$ (단 $1<p<\infty$)에 속하는 조화함수이면 f는 상수함수이다(이 정리에서는 M의 곡률에 대한 조건이 없음에 주의하라).

이상의 Yau의 두 정리 이후 많은 기하학자들이 이 문제를 생각하여 왔다. 또한 조화함수 자체만 아니라 이와 깊은 관계가 있는 열 핵(heat kernel)에 대한 성질 규명도 병행되어 왔다. 그러나 본 소고에서는 조화함수 자체에 대한 설명만으로 한정시키고자 한다.

위의 Yau의 결과에서 보다시피 조화함수 이론이 의미가 있으려면 주어진 리이만 다양체의 Ricci 곡률이 0보다 작은 부분이 있어야 한다. 최근에 Anderson과 Schoen은 음의 곡률을 갖는 완비 다양체 상의 조화함수 이론을 완전히 규명하였으며, Li와 Tam에 의하여 유한 긴밀 영역을 제외한 데에서 음이 아닌 곡률을 갖는 완비 다양체에서의 조화함수를 완전히 찾아냈다. 우선 Anderson과 Schoen의 결과를 설명하겠다.

1. Anderson과 Schoen의 결과

Anderson과 Schoen는 이들의 논문 "Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature" (Annals of Mathematics, 121 (1985), 429-461)에 조화함수의 완전한 이론인 Poisson공식을 얻었다. 즉 이들은 Martin 경계와 $S(\infty)$가 일치함을 보였다. 이를 좀더 자세히 설명하기 위하여 우리가 잘 아는 단위원상의 Poisson 적분공식을 생각하라. 즉 $K(x, Q)$를 Poisson핵이라 할 때

$$U(x)=\int_{S^1} K(x, Q)\, d\mu(Q)$$

로서 적당한 경계값을 갖는 조화함수를 표현할 수 있다. 기하학적 입장에서 보면 단위원판 U를 항상 곡률이 -1인 리이만 다양체로서 이해할 수 있고 S^1은 이의 경계가 되고 U의 긴밀화를 만들어 준다. 그런데 Poisson 핵을 다음과 같이 이해할 수도 있다. $Q\in S^1$이라 하고, $\gamma(t)$를 Q에 수렴하는 U에 있는 측지선이라 하고 $G(x, y)$를 U의 Green 함수라 할 때

$$K(x, Q)=\lim_{t\to\infty}\frac{G(x, \gamma(t))}{G(0, \gamma(t))}$$

가 된다. 이 공식에서 U의 조화해석학적 경계인 Martin 경계를 정의할 수 있다. 일반적인 Riemannian다양체 M에 대하여 한 점 $0\in M$를 고정시키고 $x, y\in M$에 대하여

$$h_y(x)=h(y, x)=\frac{G(y, x)}{G(y, 0)}$$

라 하자. 여기서 $G(x, y)$는 M의 Green함수이다. y_i를 M에 극한점이 없는 열이라 하자. 이에 대응되는 함수 h_{y_i}는 Harnack 부등식에 의하여 긴밀 집합에 균일적으로 유계되어 있다. 따라서 Harnack정리에 의하여 이런 함수열 중에 수렴하는 부분 열이 있다. 만일 $\{h_{y_i}\}$가 수렴할 때 $\{y_i\}$를 기본적이라 부른다. 두 개의 기본적 열에 대응되는 극한 조화함수가

일치하면 이 두 기본열을 동등하다고 하고 이런 기본열의 동등 클라스 전체의 집합으로 M의 Martin경계 μ이 정의된다. 만일 $[Y]\in\mu$이고 $\{y_i\}$를 $[Y]$에 대응되는 기본 열일때

$$h_Y(x)=\lim_{i\to\infty} h_{y_i}(x)$$

로서 정의한다. 따라서 Martin 경계의 한 원소마다 M에 정의된 양의 조화함수 $h_Y(x)$가 얻어진다. $\widetilde{M}=M\cup\mu$이라 하고 이 위에 $Y, Y'\in\widetilde{M}$에 대하여

$$\rho(Y, Y')=\sup_{x\in B_0(j)}|h_Y(x)-h_{Y'}(x)|$$

로서 정의하여 $\widetilde{M}$에 topology를 준다. 그러면 $\widetilde{M}$은 완비 긴밀 공간이 되고 $\widetilde{M}$의 경계가 μ이 되면 M상에서는 ρ의 topology와 원래의 Riemann 다양체로서의 topology가 일치함을 쉽게 알 수 있다. 이때 Anderson과 Schoen의 정리를 다음과 같이 말할 수 있다.

정리 3. (Anderson과 Schoen[2]) M을 곡률 K_M이 $-b^2\leqslant K_M\leqslant -a^2<0$을 만족하는 완비 단순연결된 다양체라하자. 그러면 M의 Martin경계 μ에서 M의 무한대 구 $S(\infty)$로 가는 동형 대응이 존재한다. 더구나 μ에 C^α-구조를 줄 수 있고 우리의 동형 대응과 이의 역이 C^α사상이 된다.

이 정리는 특히 Poisson핵 $K(x,Q)$가 $Q\in S(\infty)$의 함수로서 C^α가 된다는 것을 말해 주고 $S(\infty)$에 적당한 Borel 측도가 주어졌을 때 이를 경계로 하는 조화함수는 단위원판의 경우와 같이 표현할 수 있다. 즉 Poisson 적분공식을 얻는다. 특히 양인 조화 함수가 무한히 많으며 이들이 어떻게 주어지는지 말해 준다.

Martin 경계와 기하학적 경계 $S(\infty)$와의 일치성은 조화함수의 접근적 성질에 대한 규명을 가능하게 한다. 특히 우리는 U가 M상의 양의 조화함수일 때 U의 비접적 극한이 $S(\infty)$의 거의 모든 점에서 존재함을 말해 준다.

이 정리의 증명은 본 소고에서는 생략하고 대신 훨씬 쉬운 경우인 무한대에서의 Dirichlet 문제에 대한 해가 존재한다는 것을 밝히는 것으로 Anderson과 Schoen 이론의 설명을 끝치고자 한다.

정리 4. (Anderson, Sullivan [1, 5]) φ를 $S(\infty)$에 정의된 연속인 함수라 하자. 그러면 $U|_{S(\infty)}=\varphi$이고 $U\in C^\infty(M)\cap C^0(\overline{M})$인 유일한 조화함수가 존재한다.

증명 : 우선 Lipschitz함수가 $C^\infty(S(\infty))$에서 조밀하고 조화함수열이

$S(\infty)$에서 수렴하면 내부에서도 수렴하므로 φ가 Lipschitz라 가정하여도 일반성을 잃지 않는다.

φ를 0에서부터의 레이를 따라 $\overline{M}$ 전체로 확장한다. 그리고 $x: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$를 $[0,1]$의 특성함수의 C^2 근사로서 supp $x\subset[-2,2]$되게 하고

$$\mathcal{S}(\varphi)(x)=\frac{\int_M x(\rho^2(x,y))\cdot\varphi(y)dy}{\int_M x(\rho^2(x,y))dy}$$

로서 φ의 평균을 정의한다. 여기서 $\rho(x,y)$는 x와 y 사이의 거리이다. $\mathcal{S}(\varphi)$는 M상의 C^2 함수이고 $\overline{M}$까지 연속적으로 확장할 수 있고 φ를 경계값으로 한다. 이의 Hessian을 계산하면

$$\|D^2\mathcal{S}(\varphi)(x_0)\|\leqslant C_1 \sup_{y\in B_{x_0}(2)}|\varphi(y)-\varphi(x_0)|$$

을 얻을 수 있다. 이 극대값을 계산하기 위하여 0에서 보는 구 $S_{x_0}(2)$의 시각의 최대를 $w(d)$ (d는 0과 x_0 사이의 길이)라 하면 Rauch 비교 정리에 의하여 $H^n(-a^2)$에서는 대응되는 각보다 작다. 따라서

$$w(d)\leqslant C_2e^{-ad}$$

이다. 그런데 $|\varphi(y)-\varphi(x_0)|<C_3[\angle(y,x_0)]$이므로

$$\|D^2\mathcal{S}(\varphi)(x_0)\|\leqslant C_4e^{-ad}$$

가 된다. 같은 계산에 의하여

$$\|D\mathcal{S}(\varphi)(x_0)\|\leqslant C_4e^{-ad}$$

이다. 그런데

$$\Delta(e^{-\delta\rho})=e^{-\delta\rho}[\delta^2|d\rho|^2-\delta\Delta\rho]$$

이므로 역시 Hessian의 비교정리

$$(a\cdot\cot h(ar))\cdot H\leqslant D^2\rho_0\leqslant(b\cdot\cot h(br))H$$
$$(\text{여기서 } H=g-d\rho_0\otimes d\rho_0)$$

에서부터 δ가 충분히 작으면

$$\Delta(e^{-\delta\rho})\leqslant-\frac{8}{2}\rho^{-\delta\rho}<0$$

이 된다. 따라서, C를 충분히 크게 잡으면

$$\varphi_+ \equiv \mathscr{I}(\varphi) + Ce^{-\delta\rho}$$

는 경계 $S(\infty)$에서 값이 φ가 되는 M상의 超(super) 조화 함수가 되고

$$\varphi_- \equiv \mathscr{I}(\varphi) - Ce^{-\delta\rho}$$

는 경계값이 φ가 되는 부(sub) 조화 함수가 된다. 따라서 통상적인 Perron방법에 의하여 $S(\infty)$에서 φ가 되는 조화함수가 존재함을 안다.

2. Li와 Tam의 결과

Li와 Tam은 그들의 논문 "Positive harmonic functions on complete manifolds with non-negative curvature outside a compact set" (Annals of Mathematics, 125(1987), 171-207)에서 논문의 제목에 나타난 다양체상의 모든 양의 조화함수를 찾아냈다. 이들의 결과를 설명하기 위하여 우선 Cheeger-Gromoll [3]의 구조 정리에 의하여 이런 다양체에는 유한개의 끝(end)이 있다는 것에 주의하라. 우리는 이런 끝과 어떤 점 p를 중심으로 하는 반경이 t인 측지공과의 공통 부분의 체적 $V(t)$가

$$\int_1^\infty \frac{t}{V(t)} dt < \infty$$

을 만족하면 이 끝을 큰 끝(large end)라 하고 그렇지 못하면 작은 끝(small and)라 한다. Li와 Tam은 각 큰 끝마다 $x \to \infty$일 때 $f(x) \to 1$이고 다른 끝에서는 0으로 가는 유계조화 함수가 유일하게 존재한다는 것을 보이였고, 또한 각 작은 끝 마다 그 끝에서 $x \to \infty$이면 $g(x) \to \infty$, 다른 작은 끝에서는 $g(x)$가 유계이고 모든 큰 끝에서는 0으로 가는 그리고 어떤 정해진 점 p에서의 값이 1인 양의 조화함수가 유일하게 존재함도 보이였다. 이 때 M상의 모든 양의 조화함수는 이런 두 가지 f와 g들의 양의 1차 결합으로 주어 진다.

Li와 Tam의 정리에 나오는 조화함수가 존재한다는 것을 증명하는 데 있어서는 앞의 Anderson과 Sullivan의 결과에서와 같이 무한대로 갈 때 주어진 조건을 만족하는 超(super)조화함수 혹은 부(sub)조화함수의 존재가 가장 중요한 역할을 한다. (Anderson과 Sullivan의 결과에서는 $\varphi \pm Ce^{-\delta\rho}$가 이런 역할을 하였음) 이런 함수를 장벽(barrier) 함수라 하고 이런 함수의 존재에서부터 Perron 방법에 의하여 우리는 원하는 조화함수의 존재를 말할 수 있다. 이런 장벽함수를 Li와 Tam은 소위 Busemann 함수를 조작하여 얻었다. (곡률이 음인 경우에는 거리함수가 곡률이 양인 경우에는 Busemann함수가 통상 사용된다. 왜냐하면, 각 경우 이 들

이 초조화함수 혹은 부조화함수가 된다. 물론 원하는 무한대에서의 경계 조건을 만족하기 위하여 기술적인 조작이 더 필요하다.)

이제 Busemann함수에 대한 설명을 하겠다. $\gamma:[0,\infty)\to M$은 $\gamma(0)=p$에서부터 출발하는 레이(ray)라 하자. (비긴밀 완비 리이만 다양체에는 항상 ray가 존재한다. ray란 주어진 곡선의 임의의 두 점 사이가 항상 최소 길이가 되는 측지선을 말한다.) 이런 레이 γ에 대하여 $h_t(x)=t-d(x,\gamma(t))$을 정의하면 $h_t(x)$는 t에 대하여 비증가 함수이고 $h_t(x)=d(p,\gamma(t))-d(x,\gamma(t))\leqslant d(p,x)$에서 부터 $h_\gamma(x)=\lim_{t\to\infty} h_t(x)$가 존재함을 알 수 있다. 이를 레이 γ에 대한 Buesemann함수라 하고 Cheeger-Gromoll에서 곡률이 음이 아닌 다양체의 구조를 밝히는 데 아주 중요하게 사용되었다. 이 때 $\beta(x)=\sup\{h_\gamma(x):\gamma$는 p에서 출발하는 레이$\}$라 하면 β는 Lipschitz이고 $|\Delta\beta|=1$ a.e.임을 쉽게 알 수 있다. Li와 Tam의 정리에 나오는 조건을 만족하는 리이만 다양체에서 $\beta(x)$와 어떤 고정된 점 p에서의 거리 함수 $\gamma(x)$는 점근적으로는 같다는 것을 밝힐 수 있다. 즉 $\lim_{x\to\infty}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}=1$이 성립한다. 또한 곡률이 음이 아니면 $\Delta\beta\geqslant 0$임을 알 수 있다. (Cheeger-Gromoll [3]) 우리가 $C(a)=\{x\in M|\beta(x)\leqslant a\}$로서 정의하면 β의 성질을 이용하여 a가 충분히 클 때 큰 끝 E에 대하여 $\partial C(a)\cap E$에서는 1, E에서 $x\to\infty$이면 0으로 가는 $E-C(a)$에 정의된 조화 함수가 존재하고 유일함을 밝힐 수 있다. 또한 이 함수 f는 적당한 상수 α에 대하여

$$f(x)\leqslant\alpha\int_{\gamma(x)}^{\infty}\frac{t}{V(t)}dt$$

를 만족한다.

작은 끝에서의 장벽함수를 얻기 위하여 F를 한 끝이라고 할 때 $A(t)=\mathrm{vol}(\partial B_p(t)\cap E)$, $A_\beta(t)=\mathrm{vol}(\partial C(t)\cap E)$, $V_\beta(t)=\mathrm{vol}(C(t)\cap E)$라 하자. 그리고 $C(a,R)=\{x\in M|a\leqslant\beta(x)\leqslant R\}$이라 하자. 이 때 g_R을 $C(a,R)$에서는 $\Delta g_R\equiv 0$, $\partial C(a)\cap E$에서는 0, $\partial C(R)\cap E$에서는 $\int_a^R\frac{1}{A_\beta(t)}dt$를 갖는 조화 함수라 하자. 그러면 적당한 R_i에서 $R_i\to\infty$일 때 g_{R_i}가 $E\backslash C(a)$의 임의의 긴밀 집합에서 수렴한다는 것을 보일 수 있다. 따라서 Harnack 정리에 의하여(그리고 또한 작은 끝이라는 조건 때문에) 이의 극한 g가 존재하고 이것이 $E\backslash C(a)$에서는 $\Delta g\equiv 0$, $\partial C(a)\cap E$에서는 0, E에서 $x\to\infty$일 때는 무한대로 감을 알 수 있다. 이런 g를 적당히 조작하여 전체에 정의되고 무한대에서 주어진 경계 조건을 만족하는 조화함수를 얻을 수 있다. 물론 이런 각 단계가 쉬운 일은 아니다.

참 고 문 헌

1. Anderson, M.T., *The Dirichlot Problem at infinity for manifolds with negative curvature*, J. Diff. Geo **18** (1983), 701-721.
2. Anderson, M.T. and R. Schoen, *Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature*, Ann. of Math **121** (1985), 429-461.
3. Cheeger, J. and D Grommll, *On the structure of complete manifolds of non-negative curvature*, Ann. of Math, **96** (1972), 413-443.
4. Li, P and L.F. Tam, *Positive harmonic functions on complete manifolds with non-negative curvature outside a compact set*, Ann. of Math, **125** (1987), 171-207.
5. Sullivan, D, *The Dirichlet Problem at infinity for a negatively curved manifold*, J. Diff, Geom, **18** (1983), 723-732.
6. Yau, S.T., *Harmonic functions on complete Riemannian manifold*, Comm. Pure Appl. Math **28** (1975), 201-228.

서울대학교 자연과학대학