

圓孔에 接近하는 龜裂이 있는 板의 境界要素解析

Boundary Element Analysis of Plate with Crack Approaching Circular Holes

梁	昌	鉉*
Yang,	Chang	Hyun
金	日	坤**
Kim,	Il	Kon

Abstract

When a crack in the plate with a circular hole approaches to the hole, the large stress concentration phenomenon appears at the boundary of the circular hole and the crack tip.

As a numerical analysis method for the stress concentration in a structure, the Finite Element Method has been used.

In this paper, however, the Boundary Element Method is employed, which may reduce the numbers of input data and the calculating time when compared with the Finite Element Method.

A finite flat plate having a crack between the two circular holes is chosen as a model in this study.

The results by the Boundary Element Method are compared with those of the Boundary collocation Method by Newman, which are already well established.

And the structural behavior near the circular hole and at the crack tip is also investigated.

要 旨

構造物에 發生한 龜裂이 圓孔에 接近할 때 圓孔과 龜裂先端에서는 큰 應力集中 現象이 생긴다.

이러한 構造物의 應力集中에 대한 數值解析方法으로 지금까지 주로 有限要素法이 使用되어 왔으나 본 研究에서는 有限要素法에 비해 入力資料와 計算時間을 現저히 줄일 수 있는 境界要素法(boundary element method)을 試圖하였다.

두개의 圓孔 사이에 龜裂이 있는 平板을 모델로 채택하여 境界要素法으로 구한 解를 Newman에 의한 境界選點法(boundary collocation method)의 解와 比較하였고 圓孔과 龜裂先端에서 力學的 舉動을 究明하였다.

* 正會員 · 仁荷大學校 工科學 教授, 土木工學科

** 正會員 · 韓國建設技術研究院 構造研究室

1. 序 論

構造物이 계속해서 反復荷重을 받을때 龜裂이 發生하고 龜裂이 다른 곳으로 전파됨에 따라 龜裂先端에서는 應力集中現象이 생긴다.

대부분 構造物의 破壞는 이러한 龜裂이 原因이 되므로 龜裂先端에서의 力學的 變動을 究明할 必要가 있다⁽⁶⁾. 특히 이러한 龜裂이 構造物에서 設備施設을 遷過시키기 위해 보의 腹部에 뚫은 구멍이나 部材를 連結시키기 위해 뚫은 리벳구멍에 接近할 때 龜裂先端에서는 더 큰 應力集中 現象이 일어나 龜裂 전파속도가 加速될 수 있다⁽⁶⁾.

이러한 構造物의 應力集中에 대한 數值解析法으로는 주로 有限要素法이 使用되어 왔으나 最近에 와서 解析對象의 問題들이 점차 複雜多樣해짐에 따라 有限要素法과 같은 소위 領域型解法을 實際로 問題에 適用할 때 入力資料數가 많고 計算時間, 計算費用面에서 많은 制約이 따른다.

有限要素法과 같은 領域型解法이 갖는 이러한 缺點들을 補完할 수 있는 보다 效果的인 解析法이 必要하게 되었다. 境界要素法은 支配微分方程式과 주어진 境界條件을 境界上의 積分方程式으로 變換하여 有限要素法에서 領域을 分割하듯이 境界를 分割하여 解를 구하는 數值解析法으로 領域型解法과 比較해서 入力資料數나 計算時間을 현저히 줄일 수 있는 長點을 지니고 있다.

本 研究에서는 境界要素法 適用時 線形境界要素(linear boundary element)를 使用하였으며 理論適用時 다음과 같은 假定을 한다.

- 1) 變形은 胡크의 法則을 따르고 매우 작다고 假定을 한다.
- 2) 材料의 두께는 일정하고 다른 치수에 비해 매우 작아서 板에 수직한 應力을 무시한다. 즉 平面應力問題로 취급한다.
- 3) 材料는 均質하며 等方性이다.

2. 理論的 背景

2.1. 龜裂先端 주변의 應力解析

2次元 平面應力問題에서 平衡方程式의 解는

다음과 같다^(1,2).

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \partial^2 \phi / \partial y^2 \\ \sigma_y &= \partial^2 \phi / \partial x^2 \\ \tau_{xy} &= -\partial^2 \phi / \partial x \partial y \end{aligned} \quad (2.1)$$

여기서 函數 ϕ 를 Airy의 應力函數라 하며 線形 彈性體에 관한 平面應力問題는 適合方程式(Compatibility equation)을 만족시킬 수 있도록 應力 函數를 決定해야 한다. 龜裂問題解析에서는 Westergaard가 提案한 複素數形의 應力函數를 使用한다^(4,5). Westergaard의 應力函數는 다음과 같다.

$$\phi = \text{Re} \bar{Z} + y \text{Im} \bar{Z} \quad (2.2)$$

여기서 Z ; 龜裂에 관한 應力函數

$$\bar{Z}; d\bar{Z}/dz, Z=dZ/dz, Z'=dZ/dz$$

Re =실수부분을 나타내는 기호

Im =허수부분을 나타내는 기호

式(2.2)는 適合方程式을 만족시키며 式(2.1)에 代入하여 垂直應力 σ_x , σ_y 와 剪斷應力 τ_{xy} 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_x = \partial^2 \phi / \partial y^2 &= \partial / \partial y \left\{ \frac{\partial (\text{Re} \bar{Z} + y \text{Im} \bar{Z})}{\partial y} \right\} \\ &= \text{Re} Z - y \text{Im} Z' \end{aligned}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \text{Re} Z + y \text{Im} Z'$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -y \text{Re} Z' \quad (2.3)$$

그림 1과 같이 龜裂이 發生한 無限板에 二軸 應力이 作用할 때 應力函數 Z 와 應力擴大係數(stress intensity factor) K 는 다음과 같다^(4,5).

$$Z = \frac{\sigma \cdot z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (2.4)$$

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2.5)$$

여기서 $z = x + iy$

座標의 原點을 龜裂先端에 취하면 式(2.4)는

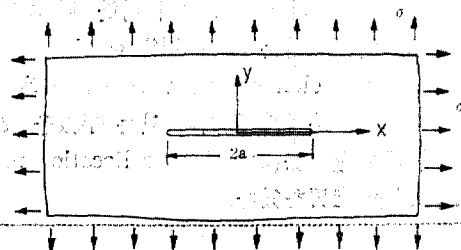


그림 1. Mode I crack under bi-axial stress.

다음과 같이 쓸 수 있다^(4,5).

$$Z = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{\sigma(z+a)}{\sqrt{z} \sqrt{z+2a}} = \frac{f(z)}{\sqrt{z}} \quad (2.6)$$

$$\text{여기서 } f(z) = \frac{\sigma(z+a)}{\sqrt{z+2a}} \quad (2.7)$$

式 (2.7)에 $z=0$ 과 式 (2.6)에 $z=r \cdot e^{i\theta}$ 를 각각 代入하면 Z 와 Z' 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Z = \frac{K}{\sqrt{2\pi r e^{i\theta}}} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$Z' = \frac{dZ}{dz} = \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{2} \right) z^{-\frac{3}{2}} = \frac{-K}{2\sqrt{2\pi}} z^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{-K}{2r\sqrt{2\pi r}} \left(\cos \frac{3}{2}\theta - i \sin \frac{3}{2}\theta \right) \quad (2.8)$$

式 (2.8)을 式 (2.3)에 代入하면 龜裂先端附近에서 垂直應力 σ_x , σ_y 와 剪斷應力 τ_{xy} 를 구할 수 있다^(4,5).

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

2. 圓孔 주변의 應力解析

圓形境界를 갖는 問題解析시 일반적으로 그림 2와 같은 極座標를 使用하며 平面應力 問題의 경우 $\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0$ 이다. r 및 θ 방향의 힘의 平衡方程式에 의해 應力은 다음과 같이 表示된다^(1,2).

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \quad (2.10)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \cdot \partial \theta}$$

여기서 ψ 는 應力函數이며 半徑 a_0 인 圓孔이 있는 無限平板의 x 軸에 引張力이 使用할 때 適合方程式을 만족시키는 應力函數 ψ 는 다음과 같다.

$$\psi = f_1(r) + f_2(r) \cos 2\theta \quad (2.11)$$

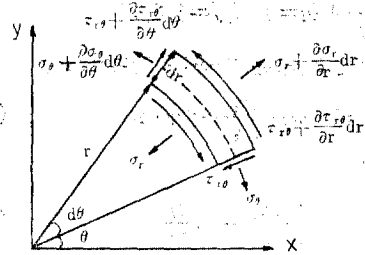


그림 2. Polar coordinate system.

適合方程式과 境界條件에 의해 $f_1(r)$, $f_2(r)$ 과 積分常數를 구하고 式 (2.10)에 代入하여 直角座標로 變換하면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \cdot \cos 2\theta \\ &\quad + \tau_{r\theta} \cdot \sin 2\theta \\ \sigma_y &= \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) - \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \cdot \cos 2\theta \\ &\quad - \tau_{r\theta} \cdot \sin 2\theta \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \sin 2\theta - \tau_{r\theta} \cdot \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 12)$$

여기서 σ_x , σ_y ; 垂直應力, τ_{xy} ; 剪斷應力, 式 (2.12)는 無限平板에 適用되는 式이지만 平板의 幅이 圓孔지름의 4배 이상일 때 式의 誤差는 6%를 초과하지 않는다⁽¹⁾. 즉 平板의 幅이 圓孔지름의 4배 이상일 때는 無限平板으로 보고 解析할 수 있다.

3. 境界要素法에 의한 應力解析

境界要素法은 支配微分方程式을 境界上の 積分方程式으로 變換한 다음 離散化(discretization)하여 數值的으로 解를 求하는 方法이다. 問題의 接近方法에 따라 假想일의 原理(principle of virtual work)나 Green 公式을 定式化의 基礎로 하는 直接法과, 포텐셜理論을 基礎로 하는 間接法이 있다.

本 研究에서는 工學的인 問題의 應用에 많이 사용되는 假想일의 原理를 利用한 直接法을 다루었다.

3.1 境界積分方程式 유도

線形等方性 彈性體의 平衡方程式은 應力成分을 σ_{ij} , 體積分을 b_i 라고 할 때 다음과 같이 쓸 수 있다^(6,8).

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (3.1)$$

應力變形度關係는 다음과 같다⁽¹⁰⁾.

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} \quad (3.2)$$

여기서,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.3)$$

$$\lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

δ_{ij} = Kroneker delta

$u_k = x_1, x_2, x_3$ 方向의 變位 u_1, u_2, u_3

式 (3.1)의 支配方程式과 그림 3-1의 境界條件으로 주어지는 3次元 彈性問題를 加重殘差式 (weighted residual formula)으로 表示 하면 다음과 같다^(6,8).

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_j} + b_k \right) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma \quad (3.4)$$

여기서 b_k ; 體積力 (body force)

u_k^*, p_k^* ; 加重函數에 對應하는 變位와 表面力 \bar{p}_k, \bar{u}_k ; 境界面의 表面力의 變位

式 (3.4)의 左邊 첫번째 項을 2回 部分積分하 고 式 (3.2), (3.3)의 關係를 고려하여 다음과 같이 쓸 수 있다^(6,8).

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{jk}^*}{\partial x_j} u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p_k^* d\Gamma \quad (3.5)$$

式 (3.5)는 領域과 境界를 包含한 積分方程式으로 境界面의 積分方程式으로 變換시키기 위해 먼저 領域內의 임의의 點 i 에서 다음과 같은 平衡方程式을 만족하는 基本解를 도입한다^(6,8).

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j} + d_i^* = 0 \quad (3.6)$$

여기서 d_i^* ; Dirac delta 函數로 임의의 點 i 에서 x_i 의 한 方向으로 作用하는 單位荷重.

式 (3.5)의 좌변 첫번째 項이 式 (3.6)의 基本

解에 의해 만족되고 임의의 點 i 에서 3方向으로 單位荷重이 作用한다면 式 (3.5)는 다음과 같은 積分方程式이 된다^(6,8).

$$u_i^* + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p_k^* d\Gamma = \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega + \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma \quad (3.7)$$

여기서 p_k^* 와 u_k^* 는 x_i 方向으로 作用하는 單位荷重으로 인해 點에서 생기는 表面力과 變位에 해당되는 基本解이다^(6,8). 式 (3.7)을 간단히 다음과 같이 쓸 수 있다^(6,8).

$$u_i^* + \int_{\Gamma} u_k p_k^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega \quad (3.8)$$

여기서 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

式 (3.8)을 境界積分方程式으로 變換시키기 위해서 領域內의 點 i 를 境界面上으로 接近시켜서 모든 未知數가 境界面上의 값들로 되게 한다. 이때 基本解 p_k^* 에서 特異性 (singularity)이 있기 때문에 數值積分이 不可能하게 되므로 Cauchy 主值積分 (cauchy principal value integral)을 利用하여 式 (3.8)을 다음과 같이 쓸 수 있다⁽⁶⁾.

$$c^i u_i^* + \int_{\Gamma} u_k p_k^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega \quad (3.9)$$

여기서 c^i ; 境界面의 기하학적 형상에 의해 決定되는 常數

式 (3.9)를 매트릭스 형태로 表示하면 다음과 같다.

$$c^i u_i + \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} p u^* d\Gamma + \int_{\Omega} u^* b d\Omega \quad (3.10)$$

式 (3.10)에서 $u^* p^* b$ 는 境界條件에 의해 알 수 있으며 數值的으로 求해야 하는 것은 u, p 이다.

여기서 u, p ; 未知의 變位 Vector, 表面力 vector.

그림 3은 本 研究에서 境界要素法適用시 使

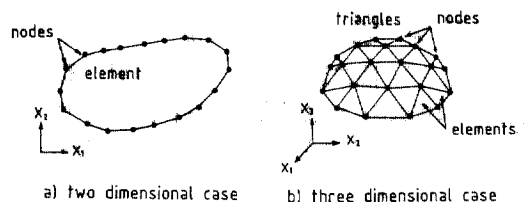


그림 3. Linear boundary element.

用한 線形境界要素를 圖示한 것으로 全境界를 그림과 같이 n 個의 要素로 分割하면 式 (3.10) 은 다음과 같이 쓸 수 있다^(6,8).

$$\begin{aligned}
 c_i u_i + \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Gamma_j} \underline{p}^* \phi^T d\Gamma \right) u_j \\
 = \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Gamma_j} u^* \phi^T d\Gamma \right) p_j \\
 + \sum_{s=1}^m \left(\int_{\Omega_s} u^* b d\Omega \right) \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

여기서 $\phi^T u_j$; u ; $\phi^T p_j$; p

ϕ^T ; 보간함수(interpolation function)

境界要素方程式을 構成하는 과정에서 보간함수와 그들의 導函數가 포함된 式을 要素全體에 걸쳐서 積分할 때 積分을 쉽게 하기 위해서 局部座標系(local coordinate system)로서 無次元화된 座標系를 使用한다.

局部座標系는 Jacobian의 轉換行列을 利用하여 全體座標系(global coordinate system)로 變化시킨다. 이때 全體座標系로 直角座標系(cartesian coordinate system) x, y, z 를 局部座標系는 曲線座標系(curvilinear coordinate system) ξ, η, ζ 를 使用하여 式 (3.11)을 다음과 같은 數值積分式으로 고칠 수 있다^(6,8).

$$\begin{aligned}
 c_i u_i + \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^l |G| w_k (\underline{p}^* \phi^T)_k \right\} n_j \\
 = \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^l |G| w_k (u^* \phi^T)_k \right\} p_j \\
 + \sum_{s=1}^m \left\{ \sum_{p=1}^n |J| w_p (u^* b)_p \right\} \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

여기서 w ; Gauss 積分點에 대한 加重係數 式 (3.12)는 境界上에 있는 임의의 點 i 와 다른 모든 點과의 關係를 나타내는 式으로 모든 點에 대해서 式 (3.12)를 適用하여 매트릭스로 表示하면 式 (3.13)이 된다^(6,8).

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{21} & \dots & h_{1r} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2i} & \dots & h_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{i1} & h_{r2} & \dots & h_{ii} & \dots & h_{ir} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{r1} & h_{r2} & \dots & h_{ri} & \dots & h_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix} \\
 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1i} & \dots & g_{1r} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2i} & \dots & g_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{i1} & g_{i2} & \dots & g_{ii} & \dots & g_{ir} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{r1} & g_{r2} & \dots & g_{ri} & \dots & g_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

여기서 $h_{ii} = \hat{h}_{ii} + c_i$

\hat{h}_{ij}, g_{ij} ; 境界上의 임의의 點 i 와 다른 모든 點과의 關係를 나타내는 相關係數(interaction coefficients)

式 (3.13)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\underline{HU} = \underline{GP} + \underline{B} \quad (3.14)$$

式 (3.14)에 境界條件을 고려하여 未知變數와 既知變數를 各各 左, 右변에 배열시키면 $\underline{AX} = \underline{F}$ 가 되고, 未知函數 \underline{X} 를 (3.15) 다음과 같이 구할 수 있다^(6,8).

$$\underline{X} = \underline{A}^{-1} \underline{F} \quad (3.16)$$

式 (3.16)에서 \underline{X} 는 境界上에서 u 와 p 의 未知數로 構成된 列 벡터로 式 (3.16)에 의해 境界上에 있는 모든 點의 未知數를 求한다.

3.2 領域內의 應力과 變位計算

式 (3.16)에 의해 境界上의 未知數가 求해지면 式 (3.8)과 式 (3.2)에 의해 領域內의 임의의 點 i 에 대한 變位와 應力을 求할 수 있다^(6,8).

式 (3.8)에 의해 領域內 임의의 點 i 에서 X_i 方向으로 생기는 變位는 다음과 같이 求할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 u_i = \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma \\
 + \int_{\Omega} b_k u_{ik}^* d\Omega \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

式 (3.17)을 式 (3.2)에 의해 代入하여 領域內 點에서 應力을 求한다.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} = \int_{\Gamma} D_{kij} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} u_k d\Gamma \\
 + \int_{\Omega} D_{kij} b_k d\Omega \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

여기서

$$D_{kij} = \frac{1}{r^2} \{ (1-2\nu) \{ \delta_{kijr, j} + \delta_{kjr, i} - \delta_{ijr, k} \}$$

$$+ \beta r, i, j, k \} \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)}$$

$$S_{kij} = \frac{2\mu}{r^2} \left\{ \beta \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu) \delta_{ijr, k}$$

$$+ \nu (\delta_{ikr, j} + \delta_{jkr, i}) - \gamma r, i, j, k \}$$

$$+ \beta \nu (n_{ir, jr, k} + n_{jr, ir, k})$$

$$+ (1-2\nu) (\beta n_{kr, ir, j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk})$$

$$- (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \} \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)}$$

$$r, i = \partial r / \partial x_i$$

1) 二次元의 경우

$$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 4$$

2) 三次元の 경우
 $\alpha=2, \beta=3, \gamma=5$

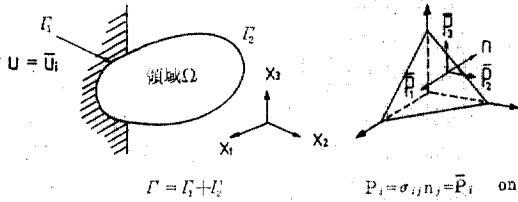


그림 4. Notation for displacement, traction force.

4. 모델解析 및 結果分析

4.1 龜裂幅(crack width)의 決定

本 研究에서 채택한 모델을 境界要素法으로 解析하기 위해 龜裂幅을 決定해야 한다. 龜裂幅을 決定하기 위해 그림 5와 같은 모델의 中央에 길이 0.2B인 龜裂이 發生했다고 假定하고 龜裂幅을 0.1 mm 부터 1 mm 까지 變化시켜 各各의 경우에 대하여 境界要素法으로 解析하고 應力集中係數를 圖示하였다.

이때 應力集中係數가 가장 클때의 龜裂幅은 0.5 mm 로 本 研究에서 모든 모델解析시 龜裂幅을 0.5 mm 로 適用한다.

4.2 모델解析

本 研究에서 채택한 解析對象의 모델은 그림 6에 표시된 바와 같이 龜裂垂直方向으로 $\sigma=10$ kg/cm² 를 받고 있는 無限板에 대등한 것이다.

단일 圓孔을 갖는 平板의 幅이 圓孔지름의 4배 이상일때는 無限板으로 보고 解析할 수 있다. 本 研究에서 채택한 모델은 圓孔이 2個이므로 平板의 幅을 지름의 8배로 하여 그림 8에 있는 Newman 의 解와 比較하였다.

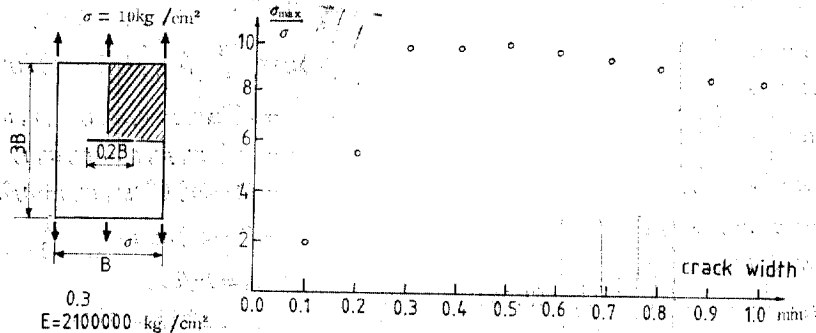


그림 5. Given model and stress concentration factor for a crack width.

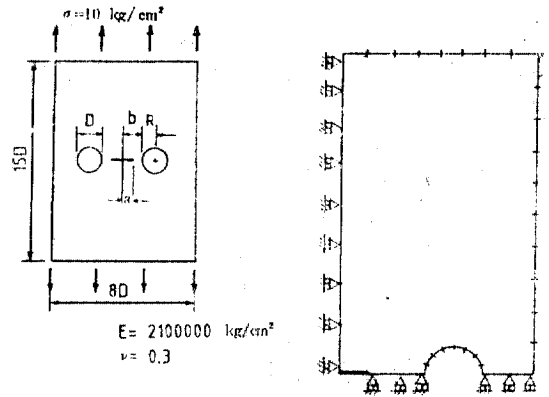


그림 6. Given model and boundary element meshes for a quarter plate model.

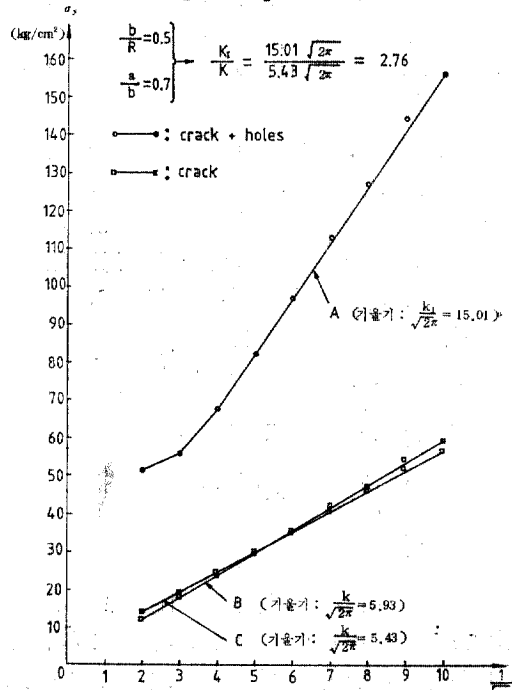


그림 7. Normal stress σ_y along the distance from crack-tip.

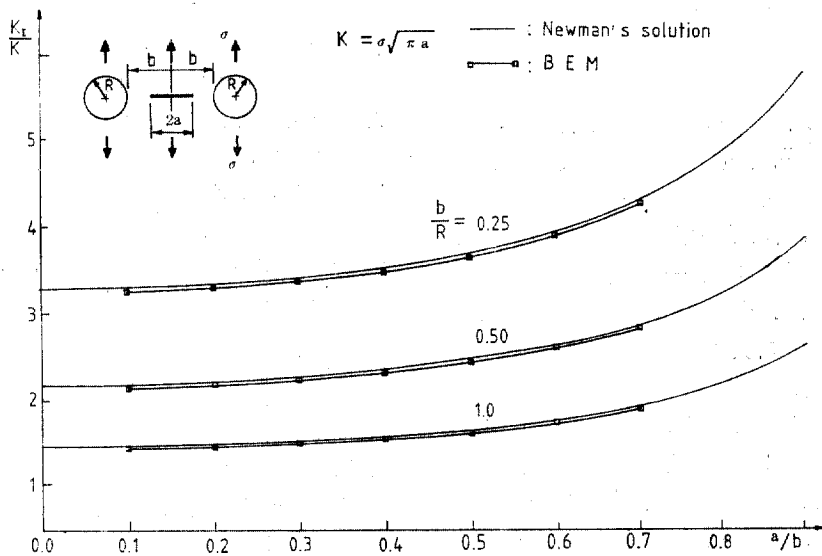


그림 8. K_1 for a crack between two circular holes in a plate subject to a uniform uniaxial tensile stress.

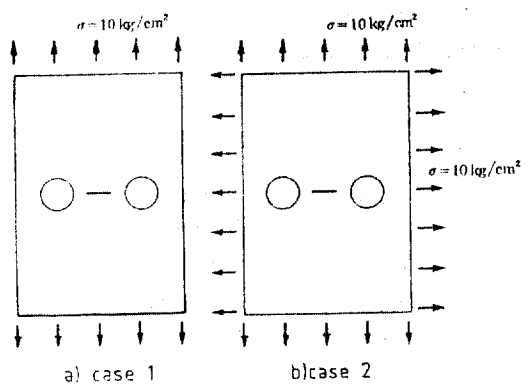


그림 9. Loadings.

Newman은 그림 8와 같은 無限板을 境界選點法(boundary collocation method)으로 解析하였다⁽¹⁰⁾.

그림 7과 그림 8에서 K 와 K_1 은 각각 圓孔이 없을 때와 圓孔이 있을 때의 應力擴大係數를 나타낸다.

그림 7은 그림 8에서 $\frac{b}{R}$ 가 0.5이고 $\frac{a}{b}$ 가 0.7일때 $\frac{K_1}{K}$ 을 구하는 方法을 圖示한 것으로 縱軸은 龜裂先端에서 距離 $\frac{1}{\sqrt{r}}$ 인 點의 垂

直應力 σ_y 를 나타낸다.

直線 A는 $\frac{b}{R}$ 가 0.5 이고 $\frac{a}{b}$ 가 0.7일때 境界要素法으로 解析한 것으로 K_1 에 해당된다.

直線 B와 C는 圓孔이 없을 때의 K 값으로 B는 式 (2.5)와 (2.9)에 의해 求한 것이며 直線 C는 境界要素法으로 求한 것이다. 그림 7에서 나타난 바와 같이 두 直線이 거의 일치하여 두 直線중에서 어떤 것을 使用하든지 큰 차이는 없겠으나 本 研究에서는 境界要素法으로 解析한 값을 使用하여 Newman의 解와 比較하였다.

이때 $\frac{K_1}{K}$ 은 두 直線 A와 C의 기울기에 의해 決定되며 本 研究에서는 Newman의 解와 比較하기 위해 直線의 기울기를 最小自乘法로 求하였다. 그림 8는 $\frac{b}{R}$ 가 0.25, 0.5, 1일때 境界要素法으로 求한 解를 Newman에 의한 境界選點法의 解와 比較한 것이다. 그리고 그림 8에서 $\frac{b}{R}$ 가 3일때 그림 9와 같은 두가지 荷重條件에 대하여 $\frac{a}{b}$ 를 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9로 變化시켜 가면서 x 軸上에 垂直應力 σ_y 를 求해 본 結果 荷重條件이 1이고 $\frac{a}{b}$ 가 0.1~0.5까지는 圓孔境界의 應力이 대체로 $\sigma_y = 3\sigma$ 정도로 式 (2.12)의 計算結果와 일치하였다. 이는 $\frac{a}{b}$

가 0.5 이하에서는 龜裂로 인한 영향이 거의 없다는 것을 의미하고 있다.

5. 結 論

두 개의 圓孔사이에서 龜裂이 發生하였을 때 圓孔 주변과 龜裂先端의 應力을 境界要素法으로 解析한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

1) 龜裂先端에서의 最大應力은 龜裂幅이 0.3 mm~1 mm 일 경우 거의 一定하였으며 0.2 mm 以下에서 급격히 減少하였다. 따라서 龜裂幅이 0.3 mm 以上으로 커졌을 때 龜裂先端의 應力集中이 問題시된다.

2) 平板에 인공적으로 龜裂을 만들어서 應力解析을 할 경우 0.3 mm 以下の 龜裂幅은 만들기가 매우 어려운 반면에 境界要素法에서는 아주 미세한 龜裂幅에 관해서도 解析이 가능하므로 그러한 制限을 받지 않는다.

3) 龜裂의 길이가 增加함에 따라 龜裂先端에서 應力集中의 크기도 增加하고 應力集中의 幅도 커진다.

4) 龜裂과 圓孔사이의 距離가 圓孔의 지름 D 보다 클때 龜裂로 인한 圓孔境界의 應力の 增加는 거의 없으며 龜裂이 圓孔에 接近하여 $\frac{a}{b}$ 가 0.9 보다 클때 圓孔境界에서 거의 4 배 以上の 應力集中이 생긴다.

5) 應力이 x, y 軸 方向으로 동시에 作用할 때 圓孔과 龜裂先端에서 應力集中의 크기는 應力이 y 軸 方向으로 作用할 때 보다 오히려 減少하였다.

參 考 文 獻

1. Timoshenko and Goodier., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Co., 1970.
2. Wang, C.T., *Applied Elasticity*, McGraw-Hill Book Co., 1950.
3. Knott, J.F., *Fundamentals of Fracture Mechanics*, John Wiley & Sons Ltd. 1973.
4. Tetelman, A.S., and Mcevily, A.T., *Fracture of Structural Material*, John Wiley & Sons Ltd., 1967.
5. David Broek., *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, Sijthoff & Noordhoff, The Netherlands, 1978.
6. Brebbia, C.A., *The Boundary Element Method for Engineering*, Pentech Press, London Plymouth, 1980.
7. Brebbia, C.A., and Nakaguma., "Boundary Element in Stress Analysis," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Feb, 1979, pp.55~69.
8. Brebbia, C.A., and Walker., *Boundary Element Techniques in Engineering*, Butterworth & Co., London, 1980.
9. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., and Wrobel, L.C. *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984.
10. Rooke, D.P., and Cartwright, D.J., *Compendium of Stress Intensity factor*, London Her Majesty's Stationery office, pp.181.

(接受: 1987. 2. 9)