

처짐과 應力制約을 받는 平面 뼈대의 最適設計

Optimum Design of Plane Frames Subject to Displacement and Stress Constraints

鄭 永 植*
Chung, Young Shik
李 在 煥**
Lee, Jae Whane

Abstract

This work presents an optimality criteria method which gives accurate solution to the structural optimization problem of plane frames subject to displacement and stress constraints. The method is made efficient, as well as rigorous, by including only the lateral displacement of the top floor in the set of behavioral constraints. The bending stresses of members are treated as side constraints based on the concept of fully-stressed-design, but the optimality of the final design is tested by treating them as behavioral constraints and examining if the design satisfies this new optimality criteria. Worked examples show the superiority of the rigorous optimality criteria in spite of its being simple and efficient.

要 旨

本 研究는 처짐과 應力制約을 받는 平面 뼈대의 正確한 最適設計를 얻을 수 있는 Optimality Criteria 方法을 提示하고 있다. 여기서 平面 뼈대의 맨 윗층의 橫變位만을 舉動的 制約에 包含 시킴으로써 數學的으로 嚴格하면서도 効率的인 方法이 되도록 하였다. 部材의 휨應力은 fully-stressed-design 의 概念에 根據하여 副次的 制約으로만 取扱 되었으나 最終設計의 最適性을 判別하기 위하여 最終 段階에서 이들을 모두 舉動的 制約으로 取扱한 새로운 Optimality Criteria 를 誘導하고 이의 滿足 與否를 알아 보도록 하였다. 이 方法은 單純하고 効率的이면서도 嚴格한 Optimality Criteria 를 採用 함으로써 보다 나은 設計를 求할 수 있음을 例題를 通하여 보였다.

1. 序 論

構造物을 經濟的으로 設計하려는 試圖는 構造力學概念이 導入된 이래 工學者들의 끊임없는 관심의 대상이 되어 왔다. 그러나 完全한 最適設計는 設計過程이 복잡하고 解析에 많은 時間

이 所要되므로 20 세기 중반까지도 不可能하다고 생각해 왔다.

1950 年代 중반 이후 컴퓨터産業과 시스템工學의 發展과 더불어 매트릭스 構造解析法, 有限要素法, OR(operations research) 등의 發展으로 보다 진정한 最適設計가 可能케 되었다.

構造物의 最適設計를 위한 optimality criteria 方法은 1970 年代에 이르러 Prager^{(1), (2)}, Venk-

* 正會員 · 蔚山大學校 工科學科 教授, 土木工學科

** 正會員 · 蔚山大學校 大學院(碩士課程)

ayya⁽³⁾, Gellatly⁽⁴⁾, Berke^{(5), (6)}, Kiusalaas⁽⁷⁾, Rizzi⁽⁸⁾, Dobbs⁽⁹⁾, Taig & Kerr⁽¹⁰⁾ 등 많은 연구자들에 의하여發展되어 왔으며, Prager는 特殊한 構造物의 解析的 optimality criteria 方法을 提示하였으며, 이 解析的인 方法은 自然 그 應用이 單純한 構造物에 局限될 수 밖에 없으므로 實際問題에는 크게 活用되지 못하고 있는 한편, 數值的인 方法으로서, Venkayya, Gellatly, Berke 등이 單純한 反復計算式을, Kiusalaas, Rizzi, Dobbs, Taig & Kerr 등이 數學的 嚴格性을 지닌 反復的 再設計알고리즘을 각각 提示하고 있다.

optimality criteria 方法이 처짐의 制約을 嚴格히 받는 問題에 適合한데 비하여 土木構造物에는 힘모멘트를 받는 部材를 많이 取扱하고 剛度(stiffness)보다 強度(strength)의 制約이 더욱 嚴格한 境遇가 普遍的이기 때문에 이러한 optimality criteria 方法을 土木構造物로서 平面 뼈대構造物의 設計에 適用시키고자 한다.

本 研究에서 考慮된 問題는 一連의 設計變數(D_i)의 線形函數로서 表現된 平面 뼈대構造物의 重量을 最小化하는 것이며, 設計는 top node 의 처짐의 非線形制約과 應力比에 의한 각 部材의 應力 및 最小높이의 副次的 制約(side constraint)을 滿足하여야 한다.

本 論文을 通하여 構造物의 最適設計 問題를

$$\text{minimize } W = \sum_{i=1}^m h_i D_i \quad (1)$$

$$\text{subject to } U_1 - \bar{U}_1 \leq 0 \quad (2)$$

$$\sigma_j - \bar{\sigma}_j \leq 0 \quad (3)$$

$$D_i - D_i \leq 0 \quad (4)$$

여기서

W : 目的函數

h_i : $\rho_i \cdot L_i \cdot B_i$

U_1 : top node 의 처짐要所

σ_j : j 번째 部材의 最大 應力

D_i : i 번째 設計變數

$\bar{U}_1, \bar{\sigma}_j, \underline{D}_i$: 미리 指定된 값

ρ_i : 部材 i 의 密度

L_i : 部材 i 의 길이

B_i : 部材 i 의 幅

와 같이 表現하고 式 (2), (3)에서 U_1, σ_j 는 처

짐과 應力에 對應하는 크기를 나타내며, 設計變數의 數는 m 으로 나타내고, 처짐要所의 數는 top node 의 처짐 하나로 表現하며 斷面의 形象은 矩形이다.

2. Optimality Criteria 의 誘導

optimality criteria 方法은 目的函數(建設費 또는 材料의 重量)를 直接最小化하는 것이 아니라 設計가 어떤 條件을 滿足토록 함으로써 그 設計가 最適設計가 되게하는 間接的方法(indirect method)이므로, 어떤 部類의 構造物의 最適設計를 위한 optimality criteria 方法을 提示함에는 그 問題에 適切하고도 固有한 optimality criteria 의 誘導가 必要하다. 그래서 本 研究의 처짐制約은 1次近似값을 使用하여 設定되었고, 應力制約은 fully-stressed-design 의 概念에 根據를 둔 0次近似값을 使用하여 設定되었다.

처짐要所 (U_i)는 처짐要所에 關聯된 節點에 單位假想荷重을 加하여 行하여진 일의 形態로 表現되는데 아래와 같다.

$$U_i = \sum_{i=1}^m \int_0^{L_i} \frac{12M_i^{(x)} \cdot M_i^{*(x)}}{E_i B_i \cdot D_i^3} dx + \sum_{i=1}^m \frac{F_i \cdot F_i^* \cdot L_i}{E_i \cdot B_i \cdot D_i} \quad (5)$$

여기서

$M_i^{(x)}$: 實際荷重에 의한 部材 i 의 힘모멘트

$M_i^{*(x)}$: 처짐要所에 關聯된 節點에 作用한 單位假想荷重에 의한 部材 i 의 힘모멘트

F_i : 實際荷重에 의한 部材 i 의 軸力

F_i^* : 처짐要所에 關聯된 節點에 作用한 單位假想荷重에 의한 軸力

E_i : 部材 i 의 彈性係數

D_i : 部材 i 의 높이

B_i : 部材 i 의 幅

만일,

$$C_{i1} = \int_0^{L_i} \frac{12M_i^{(x)} \cdot M_i^{*(x)}}{E_i \cdot B_i} dx \quad (6)$$

$$C'_{i1} = \frac{F_i \cdot F_i^* \cdot L_i}{E_i \cdot B_i} \quad (7)$$

라 하고, 그 값이 設計變數에 關係없이 一定하다면,

$$U_1 = \sum_{i=1}^m \frac{C_{i1}}{D_i^2} + \sum_{i=1}^m \frac{C'_{i1}}{D_i} \quad (8)$$

가 되고, U_1 의 導函數는 式(9)의 形態를 가진다.

$$\frac{\partial U_1}{\partial D_i} = -\frac{3C_{i1}}{D_i^3} - \frac{C'_{i1}}{D_i^2} \quad (9)$$

式(9)에서 C_{i1}, C'_{i1} 는 1回 再設計를 하는 동안 變하지 않는 것으로 看做한다.

本 研究에서 使用된 optimality criteria는 다음과 같은 Kuhn-Tucker 條件으로 부터 誘導되었다.

$$\frac{\partial W}{\partial D_i} + \lambda_1 \frac{\partial U_1}{\partial D_i} - \gamma_i = 0 \quad (10)$$

$$\lambda_1(U_1 - \bar{U}_1) = 0$$

$$\gamma_i(D'_i - D_i) = 0$$

$$\lambda_1, \gamma_i \geq 0 \quad (11)$$

여기서,

λ_1, γ_i : Lagrange 乘數

D'_i : 最小設計값(D_i)와 應力比에 의해 구한 設計값(D'_i) 중 큰 값

設計變數와 制約은 그들의 役割에 의해 分類되어진다. 設計變數는 3個의 그룹으로 나누어지는데, group 1은 指定된 最小設計값(D_i)과 應力比에 의해 求한 設計값(D'_i)보다 큰 값을 가지는 設計變數를 包含하고 있고, 이 그룹에 속하는 變數는 'active' 變數이고, Lagrange 乘數(γ_i)는 0이다. 그리고 group 2는 最小設計값에 到達한 設計變數들의 集合이며, group 3는 指定된 最小設計값(D_i)보다 크며, 應力比에 의해 구한 設計(D'_i)를 가지는 設計變數들의 集合이며, 이 두그룹에 속하는 變數는 'passive' 變數이고, Lagrange 乘數(γ_i)는 0 또는 0보다 크다. 그리고 制約과 關聯된 Lagrange 乘數, λ_1 은 0 또는 0보다 크다. 要約하면 아래와 같다.

$G_1 = \{i : D_i > D'_i\}$ Set of group 1 design variables

$G_2 = \{i : D_i = \underline{D}_i\}$ Set of group 2 design variables

$G_3 = \{i : D_i = D'_i\}$ Set of group 3 design variables

本 研究의 對象構造物인 平面叫대構造物에 대

한 optimality criteria는 Kuhn-Tucker 條件式(10), (11)과 式(1), (9)로 부터 誘導되어 아래와 같이 表現 된다.

$$\lambda_1 \left(\frac{3C_{i1}}{D_i^3 h_i} + \frac{C'_{i1}}{D_i^2 h_i} \right) + \frac{\gamma_i}{h_i} = 1 \quad (12)$$

$$\lambda_1(U_1 - \bar{U}_1) = 0$$

$$\gamma_i(D'_i - D_i) = 0$$

$$\lambda_1, \gamma_i \geq 0 \quad (13)$$

式(12)에서 設計變數(D_i)가 group 1에 속할 때 γ_i 가 0이고, 設計變數(D_i)가 group 2 또는 group 3에 속할 때 γ_i 가 0 또는 0보다 크므로 式(14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\lambda_1 \left(\frac{3C_{i1}}{D_i^3 h_i} + \frac{C'_{i1}}{D_i^2 h_i} \right) = 1 \text{ for } i \in G_1 \quad (14 \cdot a)$$

$$\lambda_1 \left(\frac{3C_{i1}}{D_i^3 h_i} + \frac{C'_{i1}}{D_i^2 h_i} \right) \leq 1 \text{ for } i \in G_2 \cup G_3 \quad (14 \cdot b)$$

式(14·a)는 어느 部材이건 假想變形에 너지 密度가 一定한 값, $1/\lambda_1$ 을 가짐을 뜻한다.

3. 再設計 알고리즘

前章에서 誘導된 optimality criteria를 滿足하는 設計를 求하기 위한 再設計 알고리즘의 開發의 段階로서 optimality criteria 方法들 中 Taig & Kerr⁽¹⁰⁾의 方法을 修正 補完한 Allwood & Chung^(11, 12, 13, 14)의 再設計 알고리즘을 使用하였다.

3.1 Lagrange 乘數의 初期值 設定

式(14·a)와 처짐制約方程式을 λ_1 에 대하여 풀기 위하여 Newton-Raphson 方法을 使用했다. 그래서 再設計 段階의 첫번째 作業이 Lagrange 乘數(λ_1)의 初期值를 設定하는 것이다. 이 初期值의 設定은 가능한 限 正確하여야 하며, 그렇지 않으면 Newton-Raphson 過程이 發散할 것이다. 式(8), (12)에서 C'_{i1} 에 關係되는 項을 無視하면, 다음과 같은 方程式을 얻을 수 있다.

$$\lambda_1 \frac{3C_{i1}}{D_i^3 \cdot h_i} = 1 \quad (15)$$

$$U_1 = \sum_i \frac{C_{i1}}{D_i^2} = \bar{U}_1 \quad (16)$$

式(16)을 修正하면,

$$\sum_{i=1}^m \frac{C_{i1}}{D_i^2} = U_1 - \sum_{i=1}^m \frac{C'_{i1}}{D_i^2} \quad (17)$$

여기서,

$$\sum_i C_{ii} > 0 \text{ 인 項들의 合}$$

$$\sum_i C_{ii} \leq 0 \text{ 인 項들의 合}$$

式 (15)를 式 (17)의 左邊에 代置시키면 처짐 制約에 關聯된 Lagrange 乘數(λ_i)의 初期直물 式 (18)과 같이 얻을 수 있다.

$$\lambda_i = \frac{1}{3} \left[\frac{\sum_i h_i^2/4 \cdot C_{ii}^2/4}{\bar{U}_i - \sum_i C_{ii}/D_i^2} \right]^{4/3} \quad (18)$$

3.2 새로운 設計變數의 決定

設定된 Lagrange 乘數(λ_i)로 부터 設計變數 (D_i)를 決定하기 위해 式 (14·a)는 다음과 같 이 再形成된다.

$$D_i^4 - V_i D_i^2 - W_i = 0 \quad (19)$$

여기서,

$$V_i = \lambda_i C_{ii} / h_i$$

$$W_i = 3\lambda_i C_{ii} / h_i$$

式 (19)의 根의 存在와 唯一性을 Descartes 의 符號法則에 따라 검토한다. W_i 가 陽數이면 V_i 의 符號에 關係없이 唯一한 陽의 實根이 存在하는 것을 알 수 있고, W_i 와 V_i 가 모두 陰數이면 陽의 實根을 가지지 못한다. 그리고 W_i 가 陰數이고 V_i 가 陽數이면 陽의 實根이 2個 存在하거나 또는 陽의 實根이 存在하지 않는다. 陽의 實根이 存在하지 않는 境遇는 부득이 最小設計값으로 하였으며, 2個의 陽의 實根이 存在할 때는 그림 1과 같은 3가지 境遇를 생각할 수 있다.

이 境遇 모두 큰 값을 택했다. 즉, 그림 1·a 처럼 두 根 모두가 最小設計값보다 작은 境遇 結局 最小設計값이 되므로 어느 根을 擇해도 相關없다. 그리고 그림 1·b와 같이 最小設計값이

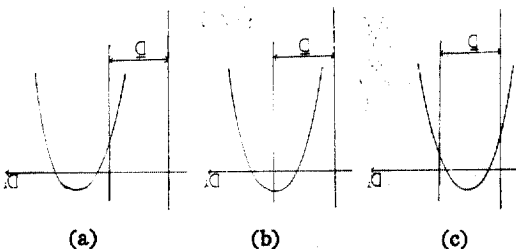


그림 1. 設計變數의 決定

두 根의 사이에 있는 境遇 작은 根을 擇하면 結局 最小設計값이 되면서 $\gamma_i < 0$ 되므로 큰 根을 擇할 수 밖에 없다. 그리고 그림 1·c 처럼 두 根 모두 最小設計값보다 클 境遇 작은 값을 擇하면 Newton-Raphson iteration 이 收斂하지 않았는데 그 理由는 아직 밝혀지지 않았다.

3.3 Newton-Raphson 方法에 의한 Lagrange 乘數의 向上

前 段階에서 設計變數 (D_i)는 Lagrange 乘數와 制約方程式 사이에 媒介變數의 役割을 하는 것에 不過하다는 것을 보여준다. 그러므로 式 (19)에서 求한 設計값이 制約方程式을 滿足하지 못하면 制約方程式을 滿足시키기 위하여 制約方程式을 λ_i 의 函數로서 取扱하여 Lagrange 乘數(λ_i)를 改善하였다. 이 作業은 Newton-Raphson 方法에 의해 行해졌으며, 다음과 같은 關係式을 使用하였다.

$$\lambda_i^{(1)} = \lambda_i^{(0)} - \left[\frac{dU_i}{d\lambda_i} \right]^{-1} [U_i - \bar{U}_i] \quad (20)$$

여기서,

$$\frac{dU_i}{d\lambda_i} = \left\{ \sum_{i \in G_1} - \frac{3C_{ii} + D_i^2 C_{ii}}{D_i^4} \cdot \frac{(3C_{ii} + D_i^2 C_{ii})/h_i}{4D_i^3 - 2V_i D_i} \right\} \text{이며,}$$

連鎖法則으로 부터 求할 수 있다.

Lagrange 乘數(λ_i)가 수차 改善되어, 制約方程式을 滿足하는 λ_i 이 算出되면 Newton-Raphson iteration 을 일단 完了한다.

3.4 Group 2, 3 變數의 處理

Lagrange 乘數와 制約方程式 사이에 媒介變數 役割을 한 設計變數(D_i)가 最小設計값 또는 應力比에 의해 求한 設計값보다 작은 값을 가질 境遇에 Newton-Raphson iteration 中에는 그대로 두나 일단 Newton-Raphson 過程이 끝나고 나서도 이러한 設計變數들이 存在하면 이들에게 일단 最小設計값 또는 應力比에 의한 設計값을 주고 設計空間(design space)에서 除外시킨 다음 Newton-Raphson iteration 을 되풀이 하는 方式을 취하였다. 이때 Lagrange 乘數(λ_i)는 가장 最近의 것을 使用 하였으며 이에 따르는 計算量의 增加도 그리 크지 않았다. 그림 2는 再設計 알고리즘의 flow-chart 이다.

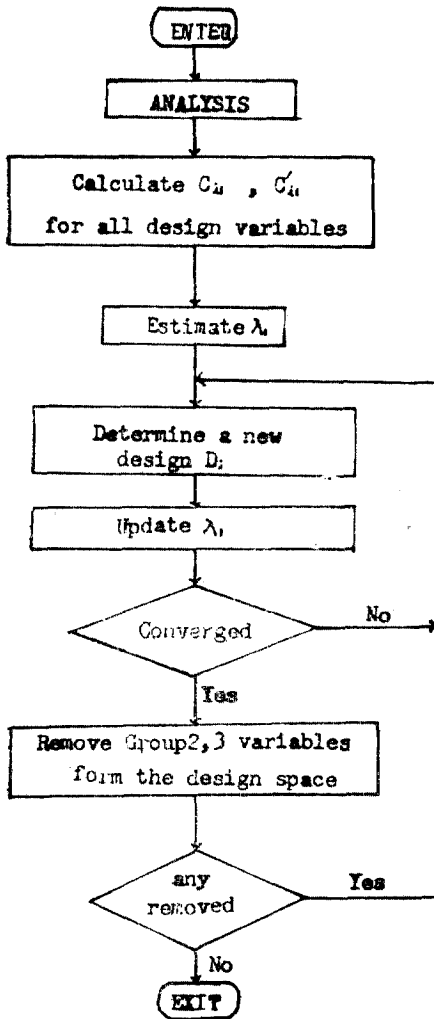


그림 2. 再設計 알고리즘의 flow-chart

4. Optimality Test

어떤 설계가 group 3 變數를 포함하고 있으면 이 설계가 식 (14)를 滿足 했다고 해서 最適設計라 할 수가 없다. 왜냐하면 지금까지의 論議에서 應力制約은 stress ratio 에 의하여 處理하였고 group 3 變數는 이 stress ratio 에 의하여 決定되었기 때문이다. 따라서 本 研究에서는 最終 設計가 group 3 變數를 가질때 이의 optimality 를 檢證하기 위하여 active 한 應力 制約

의 1次 近似值를 使用하여 式 (14)에 包含시키고 이 새로운 optimality criteria 를 滿足 하는 가에 따라 optimality 與否를 判別 하기로 하였다. 應力 制約의 1次 近似值는 참고문헌 (13, 14)에서 使用한 假想荷重으로 부터 求할 수 있으며 이 假想荷重과 b 를 無限小로 잡았을때 이에 의한 固定端 moment 가 그림 3에 나타나 있다.

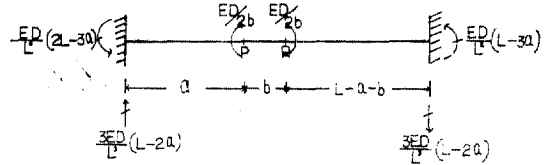


그림 3. 假想荷重과 固定端 moment

그림 3에서 點 P 가 j 번째 部材에서 휨모멘트의 크기가 最大가 되는 點이라 하고, $M_i^{(j)}(x)$, $F_i^{(j)}$ 를 點 P 에 假想荷重 $(ED/2b)$ 를 作用 하였을 때 假想 휨모멘트와 假想 軸力이라 하면, 그때 點 P 에서 最大 휨應力은 다음과 같다.

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^m \int_0^{L_i} \frac{12 \cdot M_i^{(x)} \cdot M_i^{(j)}(x)}{E_i \cdot B_i \cdot D_i^3} dx + \sum_{i=1}^m \frac{F_i \cdot F_i^{(j)} \cdot L_i}{E_i \cdot B_i \cdot D_i} \quad (21)$$

만일,

$$d_{ij} = \int_0^{L_i} \frac{12 M_i^{(x)} \cdot M_i^{(j)}(x)}{E_i \cdot B_i} dx$$

$$d'_{ij} = \frac{F_i \cdot F_i^{(j)} \cdot L_i}{E_i \cdot B_i}$$

라 두면

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^m \frac{d_{ij}}{D_i^3} + \sum_{i=1}^m \frac{d'_{ij}}{D_i} \quad (22)$$

가 되고, σ_j 의 導函數는 式 (23)의 形態를 가진다.

$$\frac{\partial \sigma_j}{\partial D_i} = -3 \frac{d_{ij}}{D_i^4} - \frac{d'_{ij}}{D_i^2} + \delta_{ij} \frac{\sigma_j}{D_j} \quad (23)$$

여기서,

$$\delta_{ij} = 1 \text{ if } i=j$$

$$\delta_{ij} = 0 \text{ if } i \neq j$$

이와같이 처짐과 應力制約 모두에 대하여 1次 近似值를 採用한 optimality criteria 는 다음과 같다.

$$\frac{1}{D_i^2 h_i} \left[\lambda_i \left(\frac{3C_{i1}}{D_i^2} + C'_{i1} \right) + \sum_{j \in S} \lambda_{1+j} \left(\frac{3d_{ij}}{D_i^2} + d'_{ij} \right) \right] - \frac{1}{h_i} \sum_{j \in S} \delta_{ij} \frac{6\lambda_{1+j} M_j}{B_j D_j^3} + \frac{\gamma_i}{h_i} = 1 \quad (24)$$

$$\lambda_i (U_1 - \bar{U}_1) = 0$$

$$\lambda_{1+j} (\sigma_j - \bar{\sigma}_j) = 0$$

$$\gamma_i (D_i - \bar{D}_i) = 0 \quad (25)$$

$$\lambda_i, \lambda_{1+j}, \gamma_i \geq 0$$

여기서,

$S = \{j : \sigma_j = \bar{\sigma}_j\}$ set of active stress constraints

式 (24)를 matrix 形態로 나타내면 式 (26)과 같으며,

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{3C_{i1}}{D_i^2} + \frac{C'_{i1}}{D_i^2} \right)_{i \in G_1} & \left(\frac{3d_{ij}}{D_i^2} + \frac{d'_{ij}}{D_i^2} - \delta_{ij} \frac{6M_j}{B_j D_j^3} \right)_{i \in G_1} \\ \left(\frac{3C_{i1}}{D_i^2} + \frac{C'_{i1}}{D_i^2} \right)_{i \in G_2} & \left(\frac{3d_{ij}}{D_i^2} + \frac{d'_{ij}}{D_i^2} - \delta_{ij} \frac{6M_j}{B_j D_j^3} \right)_{i \in G_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_i \\ \lambda_{1+j} \\ \gamma_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (h_i)_{i \in G_1} \\ \dots \\ (h_i)_{i \in G_2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

만일

$$N_1 = \left[\left(\frac{3C_{i1}}{D_i^2} + \frac{C'_{i1}}{D_i^2} \right)_{i \in G_1} \quad \dots \quad \left(\frac{3d_{ij}}{D_i^2} + \frac{d'_{ij}}{D_i^2} - \delta_{ij} \frac{6M_j}{B_j D_j^3} \right)_{i \in G_1} \right]$$

$$N_2 = \left[\left(\frac{3C_{i1}}{D_i^2} + \frac{C'_{i1}}{D_i^2} \right)_{i \in G_2} \quad \dots \quad \left(\frac{3d_{ij}}{D_i^2} + \frac{d'_{ij}}{D_i^2} - \delta_{ij} \frac{6M_j}{B_j D_j^3} \right)_{i \in G_2} \right]$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_{1+j} \end{bmatrix}_{j \in S}$$

$$\gamma = [\gamma_i]_{i \in G_2}$$

$$B_1 = [h_i]_{i \in G_1}$$

$$B_2 = [h_i]_{i \in G_2}$$

라 두면, 式 (26)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

式 (27)을 풀어 쓰면,

$$N_1 \lambda = B_1 \quad (28)$$

$$\gamma = B_2 - N_2 \lambda \quad (29)$$

가 되고, 여기서 N_1 은 一般的으로 正方形行列이 아니며, 따라서 式 (28)을 滿足하는 解 λ 가 存在하지 않을 수도 있으며, 存在한다 하더라도 直接 求할 수가 없다. 따라서 여기서는 式 (28)의 잔유벡터(residual vector) $N_1 \lambda - B_1$ 의 길이의 自乘을 式 (30)과 같이 定義하고 이것이 最小가 되기 위한 必要條件은 式 (31)과 같이 된다.

$$L(\lambda) = (N_1 \lambda - B_1)^T (N_1 \lambda - B_1) \\ = \lambda^T N_1^T N_1 \lambda - 2\lambda^T N_1^T B_1 + B_1^T B_1 \quad (30)$$

$$\frac{\partial L(\lambda^T)}{\partial \lambda^T} = N_1^T N_1 \lambda - N_1^T B_1 = 0 \quad (31)$$

N_1 의 列벡터가 1次 獨立이라면 正方形行列 $N_1^T N_1$ 은 nonsingular이다. 그래서,

$$\lambda = (N_1^T N_1)^{-1} N_1^T B_1 \quad (32)$$

이 되고, 式 (32)에서 λ 는 $L(\lambda)$ 를 最小化 하지 單 式 (28)을 반드시 滿足하는 것은 아니다. 그래서 式 (32)를 式 (28)에 代入하면,

$$P \equiv [I - N_1 (N_1^T N_1)^{-1} N_1^T] B_1 = 0 \quad (33)$$

이 되고, 式 (33)이 成立하면 式 (32)에서 求한 λ 는 式 (28)의 解이고, 나아가 式 (29)로부터 γ 를 求할 수 있다. 이때 式 (33)이 成立하고, λ 와 γ 의 要素中에 陰數를 가지는 것이 없으면 現在의 設計가 最適設計임을 알 수가 있다.

5. 適用例

optimality criteria 方法에 의한 平面 뼈대構造物의 最適化의 特性 및 傾向등을 分析하기 위하여 前章에서 開發된 本論文의 最適化 알고리즘을 利用하여 2層 1徑間, 3層 2徑間の 構造物에 適用시켜 본다.

5.1 2層 1徑間の 構造物

material data

$$E = 210000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\rho = 0.02 \text{ kg/cm}^3$$

$$\sigma_a = 100 \text{ kg/cm}^2$$

2層 1徑間の 平面 뼈대構造物에서 荷重狀態는 그림 4에서 보는 바와 같고, 制約條件은 節點 1에서 처짐量이 1 cm를 超過해서는 안된다는 舉動制約條件(behavior constraint)과 應力比

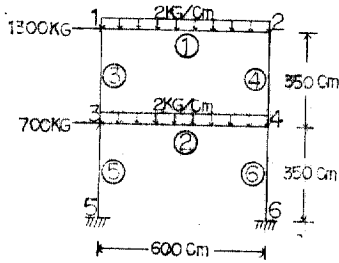


그림 4. 2층 1徑間 뼈대構造

表 1. 列題 1의 結果值

	Design 1	Design 2
部材	部材높이(cm)	部材높이(cm)
1	15.940*	16.812*
2	43.108	44.019
3	1.000	1.000
4	46.224	47.269
5	41.693	43.066
6	2.863	1.000
總重(kg)	33775.8	34426.4

*: 應力 制約을 받는 部材

에 의한 應力制約(許用 應力 100kg/cm^2)과 斷面의 最小높이(1.0 cm) 制約의 副次的 制約(side constraint)을 두었다. 모든 部材의 斷面의 幅을 25 cm, 初期높이를 30 cm 로 잡은 初期設計로부터 求해낸 最終設計의 結果가 表 1에 실려있다. 表 1에서 Design 1은 本論文의 最適化 알고리즘을 利用하여 얻어낸 結果로서, 部材 1이 應力制約을 받고, 部材 3이 最小높이 制約을 받으며, 거의 모든 荷重을 部材 2, 4, 5가 받고 있는 것을 알 수 있다. design 2는 C_{11} 에 關係되는 項, 즉 軸應力에 關係되는 項을 考慮하지 않았을때 얻어진 設計값들인데, 表 1에서 보는 바와 같이 部材 3, 6이 最小높이 制約을 받는다. 여기서 注目할 點은 部材 6이 部材의 길이 變化를 考慮하지 않은 design 2에서는 最小치수를 가지면서 group 2로 分類되는데 반하여 design 1에서는 group 1으로 分類되었다. 이는 部材 6의 길이 變化에 대한 抵抗이 節點 1의 橫方向 처짐을 줄이는데 寄與하고 있음을

뜻하고 이와 같이 길이 變化를 考慮한 design 1이 表 1에서 보듯이 보다 나은 結果를 준다. design 1에서 節點 1의 처짐制約과 部材 1의 應力制約에 關聯되는 Lagrange 乘數(λ)는 10780와 23.8의 값을 각각 가지고, 最小높이 制約에 關聯되는 Lagrange 乘數(γ)는 196.9이다.

5.2 3層 2徑間的 構造物

material data는 2層 1徑間的 構造物과 같으며, 荷重狀態는 그림 5와 같다. 처짐制約은 節點 1에서 처짐量 2 cm를 두었고, 許用應력과 斷面의 最小높이는 모든 部材에 대하여 100kg/cm^2 과 斷面의 幅과 같은 30 cm를 두었다.

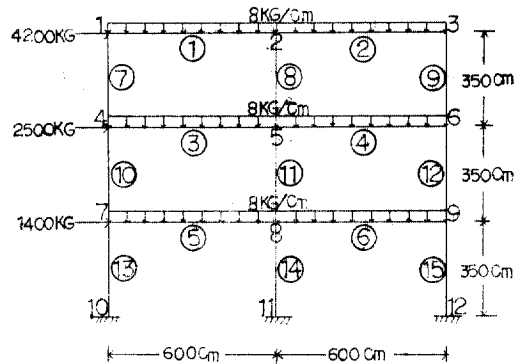


그림 5. 3層 2徑間 뼈대構造

表 2. 列題 2의 結果值

部材	部材높이(cm)	部材	部材높이(cm)
1	30.741*	9	30.000
2	30.000	10	30.000
3	44.118	11	44.076
4	32.138*	12	30.000
5	33.563*	13	30.000
6	30.000	14	87.652
7	30.000	15	30.000
8	34.355		
總重量(kg)	14488.0		

*: 應力 制約을 받는 部材

表 2에서 보는 바와 같이 斷面의 最小높이 制約을 받는 部材는 部材 2, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15이며 應力制約을 받는 部材는 部材 1, 4, 5이다. 처짐制約에 關聯되는 Lagrange 乘數(λ)는 17160이고, 應力制約에 關聯되는 Lagrange 乘數(λ)는

16. 85, 13. 84, 23. 16 의 값을 각각 가지며, 最小
 値이 制約에 關聯되는 Lagrange 乘數(γ)는 263. 2,
 248. 8, 122. 6, 45. 88, 86. 13, 87. 30, 190. 5, 185. 9 의
 값을 각각 가진다.

위의 結果로 부터 制約과 關聯되는 Lagrange
 乘數(λ 또는 γ)가 陰數가 아니며, 式 (24)의
 optimality criteria를 滿足하므로 表 2의 設
 計값들이 最適임을 알 수 있다.

6. 結 論

本 研究에서 提示하는 最適設計 方法은 opti-
 mality criteria 의 定立이나 이를 滿足하는 設計
 를 찾아내는 過程에 있어서는 數學的인 嚴密性
 이 強調되어 있으면서 平面 뼈대의 top node 의
 처짐 制約 하나 만을 optimality criteria 式에
 包含 시킴으로써 效率性의 면에서도 遜色이 없
 는 方法이라 할 수 있다. 各部材의 韌應力 制約
 은 反復的인 再設計 過程에서는 fully-stressed-
 design 의 概念에 立脚하여 副次的인 制約(side
 constraint)으로만 取扱 하였으나 最終設計를 얻
 은 다음에는 式 (24)에서 보듯이 이들을 모두
 舉動的 制約(behavioral constraint)에 包含시켜
 optimality 를 檢證함으로써 fully-stressed-de-
 sign 이 optimal design 이 아닐 수도 있다는 危
 險을 探知 할 수 있도록 하였다.

萬一 最終設計가 optimality test 에서 最適設
 計가 아님이 判定되면 式 (24), (25)를 滿足하는
 設計를 求하는 別途의 algorithm 에 의하여 最
 適設計를 求하는 過程을 알아야 할 것이며 이러
 한 multiple constraint 를 取扱하는 再設計 al-
 gorithm 의 開發은 今後의 課題로 남아 있다.
 지금까지의 經驗으로는 모든 例題에서 式 (12),
 (13)를 滿足하는 設計가 式 (24), (25)도 滿足하
 여 Optimality 가 保障 되었으며, 다만 보의 경
 우 參考文獻 (13)에서 應力制約을 副次的 制約
 으로 取扱하여 얻은 設計가 optimality 는 保障
 되었으나 應力制約을 처음부터 舉動的 制約으로
 取扱하여 얻은 設計와 다른 local optimum 이
 된 境遇가 發見되었다.

本 研究에서 提示하는 方法은 全般的으로, 數
 學的으로 嚴密한 解를 얻는데 力點을 두고 있으
 며 이의 利點은 適用例 (1)에서 잘 나타나 있다.

참 고 문 헌

1. Prager, W., "Optimality Criteria in Structural Design", AGARD-R-589-71, December, 1971.
2. Prager, W., "Conditions for Structural Optimality", *Computers & Structures*, Vol. 2, 1972, pp. 833~840.
3. Venkayya, V.B., "Design of Optimum Structures", *Computers & Structures*, Vol. 1, 1971, pp. 265~309.
4. Gellatly, R.A., and Berke, L., "Optimal Structural Design", AFFDL-TR-70-165, 1970.
5. Berke, L., "An Efficient Approach to the Minimum Weight Design of Deflection Limited Structures", AFFDL-TM-70-4-FDTR, July, 1970.
6. Berke, L., and Khot, N.S., "Use of Optimality Criteria Methods for Large Scale Systems", AGARD Lecture Series, No. 70, 1975.
7. Kiusalaas, J., "Minimum Weight Design of Structures Via Optimality Criteria", NASA TN D-7115, December, 1972.
8. Rizzi, p., "Optimization of Multi-Constrained Structures based on Optimality Criteria", *Proceedings of AIAA/ASME/SAE 17th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, King of Prussia, Pa., May 1976, pp. 448~462.
9. Dobbs, M.W., and Nelson, R.B., "Application of Optimality Criteria to Automated Structural Design", *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 10, 1976, pp. 1436~1443.
10. Taig, I.C., and Kerr, R.I., "Optimisation of Aircraft Structures with Multiple Stiffness Requirements", *AGARD Conference Proceedings* No. 123, 1973, pp. 16.1~16.14.
11. Chung, Y.S., "A Trial of Optimality Criteria Methods on Structural Optimization of Buildings", M.Sc. Thesis, Department of Civil Engineering, Loughborough University of Technology, England, 1977.
12. Allwood R.J., Chung Y.S., "Minimum-weight Design of Trusses by An Optimality Criteria Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, pp. 697~713,

1984.

13. Chung Y.S., "*Optimal Design of Civil Engineering Structures Using Optimality Criteria Methods*", Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, Loughborough University of Technology, England, 1982.
14. Allwood R.J, Chung Y.S., "An Optimality Criteria Method Applied to the Design of Continuous Beams of Varying Depth with Stress, Deflection and Size Constraints", *Computers & Structures*, Vol.20, pp.947~954, 1985.
(接受: 1986. 11. 10)