대류분산 모형에 관한 유한차분근사의 특성

Characteristics of the Finite Difference Approximations for the Convective Dispersion Model

이 길 성*
Lee, Kil Seong
강 주 환**
Kang, Ju Whan

Abstract

Five finite difference schemes (explicit, Bresler, implicit, upstream, and Chaudhari scheme) for the convective dispersion model are analyzed numerically to investigate their characteristics and applicabilities. Camparative study results show that the conditionally stable Chaudhari scheme has the smallest numerical dispersion and that the unconditionally stable Bresler scheme has the overshooting in regions of oscillation. Explicit scheme is the most accurate for a dispersion-dominated flow whereas Chaudhari scheme is for a convection-dominated flow. The computation time (CPU) is the shortest for the explicit or Chaudhari scheme with the same order of magnitude and is always the longest for the Bresler scheme.

요 지

대류 분산 모형의 유한 차분 방법으로 양해법, Bresler 방법, 음해법, upstream 차분법과 Chaudhari 방법등을 선택하여 각 차분법들의 특성을 규명하고 수치실험을 통하여 이들의 효율적인 사용 방안을 제시하였다. 비교 분석 결과 Chaudhari 방법은 수치 분산 현상에 가장 둔감한 반면 조건부 안정이고, Bresler 방법은 overshooting에 민감한 반면 무조건 안정이라는 특성이 있다. 분산이 지배적인 흐름에서는 양해법이 가장 정확하고, 대류가 지배적인 흐름에서는 Chaudhari 방법이 가장 정확하다. 계산 시간(CPU)은 양해법 또는 Chaudhari 방법이 비슷하게 가장 작고 Bresler 방법이 항상 가장 크다.

1. 서 론

수공학에 관련된 제반 문제 중에는 질량 전달식, 난류 확산식, 홍수 추적식 등과 같이 대류 분산 모형으로 표현될 수 있는 경우가 종종 있다[3]. 이러한 모형과 관련된 문제의 해석적인 해가 없는 경우 수리 모형 실험이나 수치 해석적인 방법 또는 현장 조사를 통하여 이를 분석하는 것이 일반적이다.

대류 분산 모형의 유한 차분법에 관련된 국내

* 정회원 · 서울대학교 공과대학 부교수 토목과
** 정회원 · 서울대학교 대학원 토목과 박사 과정

연구 논문으로는 하천에서 오염물의 종방향 확산에 대한 Crank-Nicolson 수치 근사와 이에 따른 SOR 방법[1,2]과 부유사의 확산에 대한 일반화된 Crank-Nicolson 수치 근사와 Gauss-Seidel 방법[4]등이 있다. 또한 국외 논문으로는 QUAL Ⅱ에 관한 음해법[15], 하천에서의 계산 수리 방법에 관한 Stone 과 Brian 의 방법[18] 등의 1 차원 연구와 하구에서의 온도 분포에 관한 ADI 방법과 Lax-Wendroff 방법[13], Eulerian-Lagrangian 해법[11] 등의 2 차원 연구가 있다. 이와 같은 국내외 연구 동향에서 볼 때 대류 분산 모형에 대한 유한 차분법은 1 차원의 경우 Crank-Nicolson 방법과 Stone 과 Brian 의 방법에 한정되고 있으며 upstream 차분법과 Chaudhari 방법에 의한 연구는 희소하며 특히 이들 차분법들 간의 비교 분석에 관한 연구는 거의 없는 실정이다.

이러한 연구 배경에서 본 연구는 1 차원 대류 분산 모형에 대하여 양해법, Bresler 방법, 음해법, upstream 차분법과 Chaudhari 방법의 수치 해석 및 수치 실험 결과를 해석적인 해와 비교하여 각 유한 차분법들의 특성과 장단점을 규명하고 나아가 이들의 효율적인 사용 방안을 제시하는데 그 목적을 두고 있다.

2. 대류 분산 모형의 유한 차분법

2.1 대류 분산 모형의 해석적인 해

본 연구에서는 선형의 포물형 편미분 방정식인 식(1)과 같은 대류 분산 모형을 분석 대상으로 선정하였다.

$$\partial C/\partial t = D\cdot\partial^2 C/\partial x^2 - V\cdot\partial C/\partial x \qquad (1)$$

여기서 C는 종속 변수이고 t와 x는 각각 시간과 공간에 대한 독립 변수이며 분산항의 D는 분산 계수이고 대류항의 V는 이송 속도이다. 식(1)과 같은 대류 분산 모형의 일반적인 해석해는 구할 수가 없으나 특수한 초기 및 경계 조건에 대해서는 그 해를 구할 수 있다[1,12]. 이러한 경우 중 본 연구에서는 표 1의 두 경우에 대해서만 고찰하였는데 첫번째 경우는[16] 경계 특이점(boundary singularity)이 존재하고 있어 이에 따른 오차가 예견되어진다.

특히 사용된 컴퓨터는 MV/8000 기종인데 경우 1의 해석적 해에 포함되어 있는 지수 함수를 계산해 내는데 한 계점이 있다. 즉 $\exp(V\cdot x/D)$의 값이 $V\cdot x/D>175$ 이면 계산되지 않는다. 그래서 $V\cdot x/D$의 값이 150 보다 큰 경우는 표 1에 보인 것과 같이 Carslaw 와 Jaeger[9]가 제시한 식을 이용하였다. 이 식에서 마지막 항이 0.0001 보다 작게 되도록 $n=8$로 취하였고 경우 2는 $n=20$으로 하였다. 또 경우 1의 $x=\infty$에서의 경계 조건은 $x=XL$일 때 $C(x,t)=0$이라는 의미의 XL이 도입된 경계 조건으로 바꾸어 생각하였다. 여기서 XL은 파의 선단에 영향을 미치지 않도록 60 으로 정하였다.

2.2 유한 차분법과 수치 분산

상기 식(1)의 대류항과 분산항을 $(n+1)$시간 단계와 (n)시간 단계에 각각 (ϕ), $(1-\phi)$의 가중치를 부여하고 공간 격자점 j에 대하여 중앙

표 1. 초기·경계 조건에 따른 대류 분산 모형의 해석적 해

경우	초 기 · 경 계 조 건		해 석 적 해	
1	$C(x,\ 0)=0,$	$x\geq 0$	$V/D<150$	$C(x,t)=[\mathrm{erfc}\{(x-Vt)/4Dt\}$ $+\exp(Vx/D)\cdot\mathrm{erfc}\{(x+Vt)/4Dt\}]/2$
	$C(0,\ t)=1$		$V/D>150$	$C(x,t)=\mathrm{erfc}\{(x-Vt)/4Dt\}/2+\exp(-W^2)\cdot$ $[1/T-1/(2T^3)+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\{1\cdot3\cdots$ $\cdot(2n-3)/2^{n-1}T^{2n-1}\}]/2\pi$ 여기서 $W=(Vt-x)/4Dt,\ T=(Vt+x)/4Dt$
	$C(\infty,\ t)=0,$	$t>0$		
2	$C(x,\ 0)=\exp(Vx/2D)\cdot x(1-x),$	$0\leq x\leq 1$	$C(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}4\cdot\{1-(-1)^n\}\cdot\exp(Vx/2D)\cdot\exp[-\{(n\pi)^2+V^2/4D\}t]\sin(n\pi x)/(n\pi)^3$	
	$C(0,\ t)=0$			
	$C(1,\ t)=0,$	$t>0$		

자분하면 다음과 같은 일반 차분식 (2)를 얻을 수 있다.

$$C_j^{n+1}-C_j^n=\beta[\phi(C_{j+1}^{n+1}-2C_j^{n+1}+C_{j-1}^{n+1})+(1-\phi)(C_{j+1}^n-2C_j^n+C_{j-1}^n)]-(\alpha/2)[\phi(C_{n+1}^{j+1}-C_{j-1}^{n+1})+(1-\phi)(C_{j+1}^n-C_{j-1}^n)] \quad (2)$$

여기서 $\alpha=V\cdot\Delta t/\Delta x$(Courant number), $\beta=D\cdot\Delta t/\Delta x^2$ 이고 $\alpha/\beta=\Delta x\cdot V/D$(Peclet number)이다. 이 때 시간 가중치 ϕ 값에 따라 다음과 같은 유한 차분법들이 결정된다. 즉, $\phi=0.0$ 이면 양해법이 되고 $\phi=0.5$ 이면 Stone 과 Brian 방법의 특별한 경우로서 Bresler 방법[6]이 되며 $\phi=1.0$ 이면 음해법이 된다. 특히 Bresler 방법은 대류항이 없는 분산 모형의 경우 Crank-Nicolson 방법과 일치하게 된다.

Upstream 또는 upwind 차분법[6]의 성격을 파악하기 위하여 다음과 같이 대류항 만을 가진 스칼라 파동식을 생각하자.

$$DC/Dt\equiv\partial C/\partial t+V\cdot\partial C/\partial x=0,\quad V>0$$

시간 미분항을 전방 차분하고 공간 미분항을 후방 차분하면 즉 한 방향 Euler 해법을 적용하면

$$(C_j^{n+1}-C_j^n)/\Delta t+V\cdot(C_j^n-C_{j-1}^n)/\Delta x=0$$

와 같은 1 차의 정도를 가진 upstream 차분식을 얻을 수 있다. 첫번째 항과 마지막 항을 Taylor 급수로 전개하면

$$C_j^{n+1}=C_j^n+\Delta tC_t+\Delta t^2/2\cdot C_{tt}+0(\Delta t^3),$$
$$C_{j-1}^n=C_j^n-\Delta xC_x+\Delta x^2/2\cdot C_{xx}+0(\Delta x^3)$$

여기서 C_t 대신에 스칼라 파동식을 대입하면 $C_{tt}=\partial/\partial t(-V\partial C/\partial x)=-V\partial/\partial x(C_t)=V^2\cdot\partial^2C/\partial x^2$ 이므로 고차의 항을 무시한 상기 식들을 upstream 차분식에 대입하면

$$\partial C/\partial t+V\partial C/\partial x=D_e\partial^2C/\partial x^2$$

여기서 수치 분산 계수 $D_e\equiv(V\cdot\Delta x/2)(1-V\cdot\Delta t/\Delta x)=V\cdot\Delta x(1-\alpha)/2$ 이다. 즉 upstream 차분법을 이용하면 $D_e\cdot\partial^2C/\partial x^2$ 이라는 오차항이 발생하게 되지만 $\alpha=1$ 인 경우에는 정확한 해를 구할 수 있다. 이와 같은 차분법을 식(1)의 대류 분산 모형에 적용하면 다음과 같은 upstream 차분식 (3)을 얻는다.

$$C_j^{n+1}=\beta C_{j+1}^n+(1-2\beta-\alpha)C_j^n+(\beta+\alpha)C_{j-1}^n \quad (3)$$

또한 Chaudhari 방법[10]의 성격을 파악하기 위하여 함수 $C(x,t)$를 Taylor 전개하면

$$C(x,t+\Delta t)=C+\Delta tC_t+\Delta t^2/2\cdot C_{tt}+0(\Delta t^3)$$

여기서 $V\gg D$ 일 때 $C_t=DC_{xx}-VC_x\cong-VC_x$ 이므로

$$C_{tt}=(C_t)_t=(-VC_x)_t=(-VC_t)_x=(V^2\cdot C_x)_x=V^2\cdot C_{xx}$$

따라서

$$C(x,t+\Delta t)=C+\Delta t(DC_{xx}-VC_x)+\Delta t^2/2\cdot V^2\cdot C_{xx}+0(\Delta t^3)=C+(\Delta tD+\Delta t^2\cdot V^2/2)C_{xx}-\Delta tVC_x+0(\Delta t^3)$$

공간 미분항에 대해 중앙 차분하고 격자 함수 C_j^n 으로 대치하면

$$C_j^{n+1}=C_j^n+(\Delta tD+\Delta t^2V^2/2)(C_{j+1}^n-2C_j^n+C_{j-1}^n)/\Delta x^2-\Delta tV(C_{j+1}^n-C_{j-1}^n)/2\Delta x+0(\Delta t^3)+0(\Delta t\Delta x^2)$$

수치 분산 계수 $D^*\equiv V^2\cdot\Delta t/2$ 로 정의하고 고차의 항들을 무시하면 다음과 같이 2 차의 정도를 가진 Chaudhari 차분식을 얻을 수 있다.

$$(C_j^{n+1}-C_j^n)/\Delta t=(D+D^*)(C_{j+1}^n-2C_j^n+C_{j-1}^n)/\Delta x^2-V(C_{j+1}^n-C_{j-1}^n)/2\Delta x$$

여기서 $\beta^*=(D+D^*)\Delta t/\Delta x^2=\beta+\alpha^2/2$ 로 정의하면

$$C_j^{n+1}=(\beta^*-\alpha/2)C_{j+1}^n+(1-2\beta^*)C_j^n+(\beta^*+\alpha/2)C_{j-1}^n \quad (4)$$

따라서 Chaudhari 방법은 양해법에 $\partial C/\partial t$ 의 Taylor 전개 과정 중 2 차 도함수까지 고려한 것으로 양해법의 분산 계수 D 가 $D+V^2\cdot\Delta t/2$ 로 치환된 것과 같다. 특히 분산항이 없는 대류 모형($C_t=-V\cdot C_x$)의 경우 Chaudhari 방법은 Lax-Wendroff 방법과 일치하게 된다.

3. 유한 차분법의 안정성 분석

Fourier 에 의한 안정성 분석[5]을 위하여 차분식의 정확한 해를

$$C_j^n=\exp(an\Delta t)\cdot\exp(i\cdot j\theta),\quad \theta\equiv k\Delta x,$$
$$i\equiv\sqrt{-1}\ (a,k\text{는 상수})$$

의 형태로 가정하면 $C_j^{n+1}=\exp(a\Delta t)\cdot C_j^n$ 의 관계가 성립한다. 이로부터 확대율(amplification factor) G 가 $|G|\equiv\exp(a\Delta t)|\leq1,\ \forall|\theta|\leq\pi$ 를 만족하면 안정하다는 von Neumann 조건을 도

출해낼 수 있다. 특히 식(1)에서 $D=0$인 대류 모형의 경우와 $V=0$인 분산 모형의 경우에 대해서 양해법을 이용하여 유한 차분화하였을 때의 안정 조건은 각각 $\alpha\leq 1$, $\beta\leq 0.5$임은 널리 알려져 있다.[6] $D\neq 0$, $V\neq 0$인 대류 분산 모형의 안정 조건을 유도하면 다음과 같다.

3.1 일반 차분식의 안정성

식(2)에서 $(n+1)$시간 단계의 항을 좌변에 (n)시간 단계의 항을 우변에 정리하면

$$-\psi(\beta-\alpha/2)C_{j+1}^{n+1}+(1+2\psi\beta)C_j^{n+1}-\psi(\beta+\alpha/2)C_{j-1}^{n+1}=(1-\psi)(\beta-\alpha/2)C_{j+1}^n+\{1-2(1-\psi)\beta\}C_j^n+(1-\psi)(\beta+\alpha/2)C_{j-1}^n$$

와 같이 되는데 $\exp(an\Delta t)\exp(ij\theta)$를 C_j^n 대신 대입하면

$$\{-\psi(\beta-\alpha/2)\exp(i\theta)+1+2\psi\beta-\psi(\beta+\alpha/2)\exp(-i\theta)\}\cdot\exp(a\Delta t)=(1-\psi)(\beta-\alpha/2)\exp(i\theta)+1-2(1-\psi)(\beta+\alpha/2)\exp(-i\theta)$$

따라서, $\exp(a\Delta t)=\{1-2(1-\psi)\beta+2(1-\psi)\beta\cos\theta-i(1-\psi)\alpha\sin\theta\}/(1+2\psi\beta-2\psi\beta\cos\theta+i\alpha\psi\sin\theta)$이므로 $|G|^2=[\{1-2(1-\psi)\beta(1-\cos\theta)\}]^2+\alpha^2(1-\psi)^2(1-\cos^2\theta)]/[\{1+2\psi\beta(1-\cos\theta)\}^2+\psi^2\alpha^2(1-\cos^2\theta)]\leq 1$ 이를 정리하면 다음과 같은 일반적인 안정 조건식 (5)를 얻는다.

$$(\alpha^2-4\beta^2)(2\psi-1)(1-\cos\theta)\leq 2\alpha^2(2\psi-1)+4\beta,\ \forall|\theta|\leq\pi \tag{5}$$

$\psi=0.0$인 양해법의 유한 차분식은

$$C_j^{n+1}=(\beta-\alpha/2)C_{j+1}^n+(1-2\beta)C_j^n+(\beta+\alpha/2)C_{j-1}^n \tag{6}$$

식 (5)로부터 안정 조건은

$(\alpha^2-4\beta^2)(1-\cos\theta)\geq 2\alpha^2-4\beta$ 이며

이를 만족하는 α와 β의 범위는 다음 식(7)과 같다.

$$\alpha^2/2\leq\beta\leq 1/2 \tag{7}$$

$\psi=0.5$인 Bresler 방법의 유한 차분식은

$$-(\beta/2-\alpha/4)C_{j+1}^{n+1}+(1+\beta)C_j^{n+1}-(\beta/2+\alpha/4)C_{j-1}^{n+1}=(\beta/2-\alpha/4)C_{j+1}^n+(1-\beta)C_j^n+(\beta/2+\alpha/4)C_{j-1}^n \tag{8}$$

식(5)의 안정 조건은 모든 θ에 대하여 항상 만족되므로 무조건 안정(unconditionally stable)이다.

$\psi=1.0$인 음해법의 유한 차분식은

$$-(\beta-\alpha/2)C_{j+1}^{n+1}+(1+2\beta)C_j^{n+1}-(\beta+\alpha/2)C_{j-1}^{n+1}=C_j^n \tag{9}$$

식(5)로부터 안정 조건

$(\alpha^2-4\beta^2)(1-\cos\theta)\leq 2\alpha^2+4\beta$ 는

모든 θ에 대해서 항상 성립하므로 무조건 안정이나 정확성(accuracy)의 보장을 위해서는 $\alpha\leq 1$이어야 한다.[19]

3.2 Upstream 차분법과 Chavdhari 방법

upstream 차분식 (3)에서 $C_j^n=\exp(an\Delta t)\exp(i\theta j)$를 대입하고 양변을 $\exp(ant)\exp(i\theta j)$로 나누면

$$\exp(a\Delta t)=1-(2\beta+\alpha)(1-\cos\theta)-i\alpha\sin\theta$$

그러므로

$$|G|^2=1-2(2\beta+\alpha)(1-\cos\theta)+(2\beta+\alpha)^2(1-\cos\theta)^2+\alpha^2\sin^2\theta\leq 1$$

이 식을 정리하면

$$2\beta^2+2(\alpha-1)\beta+\alpha^2-\alpha\leq 2(\beta+\alpha)\cos\theta$$

어떤 θ에 대해서도 윗 식을 만족시키는 α와 β의 범위는 식(10)과 같다.

$$\beta\leq(1-\alpha)/2 \tag{10}$$

또한 Chaudhari 방법은 식(4)에서 보는 바와 같이 양해법의 β가 β^*으로 치환된 형태를 취하고 있어 양해법의 안정 조건식 (7)에서 β를 $\beta+\alpha^2/2$로 치환하면 식(11)과 같은 Chaudhari

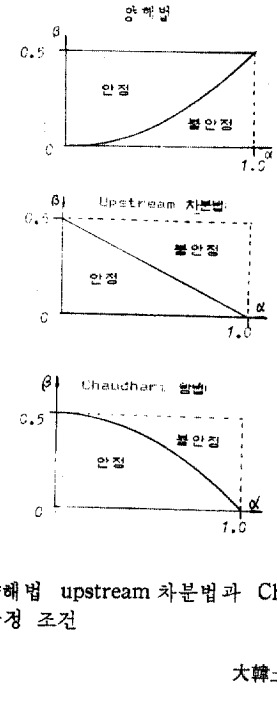

그림 1. 양해법 upstream 차분법과 Chaudhari 방법의 안정 조건

방법의 안정 조건을 구할 수 있다.

$$\beta \leq (1-\alpha^2)/2 \qquad (11)$$

양해법, upstream 차분법과 Chaudhari 방법의 안정 조건식 (7), (10), (11)을 $\alpha-\beta$ 평면 위에 각각 도시하면 그림 1과 같다.

이상과 같이 Fourier 해석을 이용하여 안정 조건을 유도하는 방법 외에 식(12)와 같은 유한 차분식이 양의 형태(positive type)이면 안정성을 만족한다는 정리[6]를 이용하는 방법도 있다.

$$C_j^{n+1} = \sum_s (As)_j^n C_{j+s}^n$$

($s=0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots$; As 는 계수) (12)

양해법의 경우를 예로 들면 식(6)의 모든 계수가 음이 아니게 하는 조건인 $\alpha/2 \leq \beta \leq 1/2$ 을 만족하면 안정성이 보장되는데 이 조건은 안정 조건식 (7)의 충분 조건에 지나지 않는다. 그러나 $\alpha \leq 1$, $\beta \leq 1/2$ 일 때 이 방법을 이용하면 양해법과 upstream 차분법, 그리고 Chaudhari 방법의 안정 조건을 Courant 수(Cr)와 대류와 분산의 상대적인 크기를 나타내는 Peclet 수(Pe)로 나타낼 수 있다. 즉 각 차분법의 안정 조건은 다음과 같다.

양해법 : $Pe \leq 2$ (13)

upstream 차분법 : $Pe \geq 2Cr/(1-Cr)$

또는 $Cr \leq 1/(1+2/Pe)$ (14)

Chaudhari 방법 :

$$2Cr/(1-Cr^2) \leq Pe \leq 2/(1-Cr) \qquad (15)$$

4. 대류 분산 모형의 수치 실험

4.1 RMS 오차와 계산 시간(CPU)

각 차분법의 안정성과 정확성에 관한 특성을

표 2. 공간 RMS 오차의 시간 평균치(경우 1)

α	β	양 해 법	Bresler	음 해 법	upstream	Chaudhari
0.1	0.1	0.00306	0.00608	0.01084	0.03696	0.00509
	0.3	0.00274	0.00158	0.00473	0.01814	0.00390
	0.5	0.00424	0.00085	0.00390	불안정	불안정
	0.7	불안정	0.00057	0.00313	불안정	불안정
	0.9	불안정	0.00043	0.00289	불안정	불안정
0.3	0.1	0.03037	0.01345	0.03052	0.05276	0.00950
	0.3	0.01143	0.00325	0.01472	0.02910	0.00894
	0.5	0.01028	0.00196	0.00948	불안정	불안정
	0.7	불안정	0.00107	0.00756	불안정	불안정
	0.9	불안정	0.00077	0.00642	불안정	불안정
0.5	0.1	불안정	0.02092	0.05387	0.05689	0.01407
	0.3	0.03059	0.00571	0.02419	불안정	0.01376
	0.5	0.02294	0.00257	0.01811	불안정	불안정
	0.7	불안정	0.00162	0.01425	불안정	불안정
	0.9	불안정	0.00115	0.01183	불안정	불안정
0.7	0.1	불안정	0.02727	0.07191	0.05324	0.02284
	0.3	0.07368	0.01233	0.03482	불안정	불안정
	0.5	0.04242	0.00836	0.02751	불안정	불안정
	0.7	불안정	0.00235	0.02240	불안정	불안정
	0.9	불안정	0.00165	0.01867	불안정	불안정
0.9	0.1	불안정	0.03467	0.08948	불안정	불안정
	0.3	불안정	0.02059	0.05092	불안정	불안정
	0.5	0.08593	0.01633	0.03634	불안정	불안정
	0.7	불안정	0.01295	0.03272	불안정	불안정
	0.9	불안정	0.00233	0.02653	불안정	불안정
평	균	0.02888	0.00802	0.02510	0.04118	0.01116

밝히기 위해(Bresler 방법과 음해법의 경우) Thomas 알고리즘에 의한 계산치와 경우 1의 해석적 해에 대한 RMS(Root Mean Square) 오차값[17]을 매개 변수 D, V와 $\Delta x, \Delta t$를 변화시켜 가며 구하였다. 본 연구에서는 복잡성을 피하기 위해 시간에 따른 각 차분법의 우월성에 대한 고찰은 생략하였고 공간 RMS 오차의 충분히 긴 시간($=100\Delta t$) 동안의 평균치를 구해 이를 정확성에 관한 비교의 지표로 삼았다. α와 β의 변화에 따른 각 차분법에 대한 공간 RMS 오차의 시간 평균치는 표 2($\Delta x=0.4$, $\Delta t=5.0$)에 보인 바와 같다. 여기서 안정성을 갖는 범위는 앞에서 유도한 안정 조건에 위배됨이 없음을 알 수 있으며, 모든 차분법의 정확성은 대부분의 경우 β가 크고 α가 작을 때 높고 그 반대로 갈수록 낮아지는 경향을 볼 수 있다. 따라서 쌍곡형 편미분 방정식인 대류 모형의 차분법이 포물형 편미분 방정식인 분산 모형의 차분법보다 정확도에서 일반적으로 다소 떨어진다는 사실을 알 수 있다.

또한 비용에 관한 비교의 지표로서 표 2의 경우에 대한 각 차분법의 계산 시간(CPU)을 표 3에 나타내었다. 이를 보면 계산 시간(CPU)은 양해법 또는 Chaudhari 방법이 비슷하게 가장 작고, Bresler 방법이 이들의 거의 2배로 항상 가장 크다.

4.2 유한 차분법의 수치 특성

양해법(explicit methods)간의 수치 특성을 비교 분석하는데 있어서 식 (3), (4), (6)으로부터 Chaudhari 방법은 $\alpha=1$ 일 때 upstream 차분법

표 3. 각 차분법의 계산 시간(CPU)(단위 : msec)

α	β	양 해 법	Bresler	음 해 법	upstream	Chaudhari
0.1	0.1	1889	3788	3588	1926	1905
	0.3	2039	3912	3688	2081	2004
	0.5	2101	3931	3680	불안정	불안정
	0.7	불안정	3964	3714	불안정	불안정
	0.9	불안정	3974	3732	불안정	불안정
0.3	0.1	2368	4248	4057	2398	2363
	0.3	2032	3901	3901	2030	2027
	0.5	2099	3933	3675	불안정	불안정
	0.7	불안정	3968	3731	불안정	불안정
	0.9	불안정	3989	3696	불안정	불안정
0.5	0.1	불안정	4275	4140	2475	2455
	0.3	2307	4175	3949	불안정	2323
	0.5	2022	3947	3704	불안정	불안정
	0.7	불안정	4034	3693	불안정	불안정
	0.9	불안정	4008	3716	불안정	불안정
0.7	0.1	불안정	4381	4052	2500	2480
	0.3	2403	4293	4042	불안정	불안정
	0.5	2250	4123	3886	불안정	불안정
	0.7	불안정	4047	3673	불안정	불안정
	0.9	불안정	3993	3743	불안정	불안정
0.9	0.1	불안정	4346	4121	불안정	불안정
	0.3	불안정	4300	3999	불안정	불안정
	0.5	2292	4205	3952	불안정	불안정
	0.7	불안정	4059	3834	불안정	불안정
	0.9	불안정	4011	3706	불안정	불안정
평	균	2164	4072	3827	2235	2229

과 일치하고 α가 0에 가까울 때는 $\alpha^2 \equiv 0$이 되어 양해법과 거의 일치하게된다. 특히 Chaudhari 방법은 전술한 유도과정과 표 2에서 알 수 있듯이 $V \gg D$일 때 즉 $Pe=\alpha/\beta$가 큰 경우 양해법(explicit scheme)에 비해 정도가 높다. 또한 $D^* \equiv V^2 \cdot \Delta t/2$의 효과가 수치 분산 현상[14]을 완화시켜 주므로 다른 모든 차분법 보다도 급격한 변화를 동반한 수치 실험에서 큰 장점을 가지고 있다. upstream 차분법은 표 2에서와 같이 거의 모든 경우에서 가장 오차가 심해 대류 분산 모형에의 실용 가치는 적지만 Chaudhari 방법의 특성을 규명하는 데 도움이 되고 있다. 즉 $V \gg D$일 때 식 (1)은 쌍곡형 편미분 방정식인 대류모형에 가깝게 되어 오차항의 분산 계수 $De \equiv V \cdot \Delta x/2 - V^2 \cdot \Delta t/2$ 중 $-V^2 \cdot \Delta t/2$가 Chaudhari 방법을 사용하면 상쇄됨을 알 수 있다.

그림 2는 $V \gg D(V/D=120)$인 경우의 최종 시각 $t=100\Delta t$에서의 파형으로서 다른 차분법

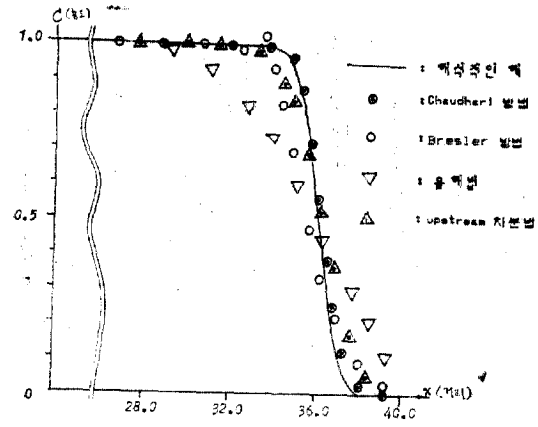

그림 2. 차분법에 따른 파형과 수치분산 ($\Delta x=0.4$, $t=5.0$, $D=0.0006$, $V=0.072$)

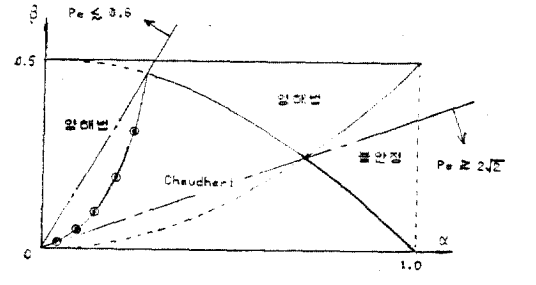

그림 3. RMS 오차가 가장 작은 차분법의 영역

들에 비해 Chaudhari 방법이 수치 분산 현상의 관점에서 뿐만 아니라 정확성에서도 가장 우수한 방법임을 보이고 있다. 그림 3은 그림 1의 안정 조건과 표 2의 수치 실험을 근거로 작성된 것으로 α와 β값에 따른 세 가지 양해법 중 RMS 오차가 가장 작은 방법을 나타낸 것이다. 여기서 두 차분법 간의 경계선 중 왼쪽에 있는 곡선은 표 2에서 보인 결과 외에 경계선 부근에서 여러번의 수치 실험을 통해 결정된 5개의 점을 매끄럽게 이은 것이다. 따라서 Pe가 작아(≤ 0.6) 분산이 지배적인 흐름에서는 양해법이 가장 정확한 반면 Pe가 커서($\geq 2\sqrt{2}$) 대류가 지배적인 흐름에서는 Chaudhari 방법이 가장 정확하다.

음해법(implicit methods)간의 수치 특성을 비교 분석하면 Bresler 방법과 음해법(implicit scheme) 모두가 무조건 안정이라는 장점이 있으나 표 2에서 보는 바와 같이 그 중 Bresler 방법이 정확성에서 월등히 우수함을 알 수 있다. 또한 그림 2에서 음해법은 다른 차분법에 비해 가장 큰 수치 분산 현상을 보이며 Bresler 방법을 제외한 모든 방법에서 overshooting 현상[14]을 볼 수 없다.

검토된 5가지 유한 차분법 전체를 비교 분석하면 정확성에 있어서는 표 2에서와 같이 $\beta \geq 0.3$일 때는 Bresler 방법이 항상 가장 우수하고 $\beta \leq 0.1$인 경우($\alpha=0.9$ 제외)에는 양해법 또는 Chaudhari 방법이 그림 3에 제시된 우월 영역에서 각각 가장 우수하다. 그러나 Bresler 방법은 표 3에서와 같이 계산 시간(CPU)이 양해법 또는 Chaudhari 방법보다 거의 2배로 크다는 단점도 동시에 고려되어야 하겠다.

5. 시간 가중치와 모형 입력에 따른 민감도

일반 차분식 (2)를 보면 시간 가중치 ϕ값에 따라 양해법, Bresler 방법과 음해법으로 구별되는데 정확성에 있어서의 최적 ϕ값을 구하기 위해 첫번째 경우의 ϕ값에 따른 민감도 분석을 하였다. 이를 위하여 $0.1 \leq \alpha \leq 0.9$, $0.1 \leq \beta \leq 0.9$인 구간에서 α와 β를 각각 0.2만큼 증가시키고 ϕ역시 0.0에서 1.0까지 0.1씩 증가시켰다. 이에 따른 공간 RMS의 시간 평균치를 양해법

표 4. ϕ에 따른 공간 RMS 오차의 시간 평균치(경우 1)

α \ β \ ϕ		0.0	0.3	0.4	0.5	0.6
0.1	0.1	0.00306	0.00438	0.00523	0.00608	0.00702
	0.3	0.00274	0.00136	0.00113	0.00158	0.00218
	0.5	0.00424	0.00115	0.00062	0.00085	0.00134
	0.7	불안정	0.00104	0.00054	0.00057	0.00103
	0.9	불안정	0.00091	0.00038	0.00043	0.00086
0.3	0.1	0.03037	0.01400	0.01249	0.01345	0.01643
	0.3	0.01143	0.00354	0.00227	0.00325	0.00539
	0.5	0.01028	0.00256	0.00107	0.00196	0.00332
	0.7	불안정	0.00252	0.00085	0.00107	0.00242
	0.9	불안정	0.00202	0.00071	0.00077	0.00193
0.5	0.1	불안정	0.03498	0.02381	0.02092	0.02572
	0.3	0.03059	0.01053	0.00613	0.00571	0.00909
	0.5	0.02294	0.00705	0.00337	0.00257	0.00590
	0.7	불안정	0.00536	0.00242	0.00162	0.00432
	0.9	불안정	0.00448	0.00199	0.00115	0.00342
0.7	0.1	불안정	0.07442	0.03946	0.02727	0.03384
	0.3	0.07368	0.02461	0.01546	0.01233	0.01553
	0.5	0.04242	0.01554	0.01014	0.00836	0.01198
	0.7	불안정	0.01050	0.00506	0.00235	0.00675
	0.9	불안정	0.00838	0.00400	0.00165	0.00534
0.9	0.1	불안정	0.20838	0.06245	0.03467	0.04335
	0.3	불안정	0.04138	0.02378	0.02059	0.02226
	0.5	0.08593	0.02974	0.02045	0.01633	0.01943
	0.7	불안정	0.02185	0.01562	0.01295	0.01645
	0.9	불안정	0.01390	0.00674	0.00233	0.00766
평	균	0.02888	0.02178	0.01065	0.00803	0.01092

(ϕ=0.0)과 최소값 근방인 ϕ=0.3, 0.4, 0.5 (Bresler 방법), 0.6인 경우만 표 4에 나타내었고 이 표의 내용 중 양해법이 안정인 경우를 그림 4에 $Cr\leq 0.3$일 때와 $Cr\geq 0.5$일 때로 각각 나누어 도시하였다. $Cr\leq 0.3$일 때는 $\alpha=\beta=0.1$을 제외한 모든 경우의 최적 ϕ는 0.4인 반면 $Cr\geq 0.5$일 때는 모든 경우에서 ϕ의 최적치가 0.5이고 $Cr=0.4$일 때는 β값에 따라 ϕ의 최적치가 0.4 또는 0.5가 된다. 따라서 $Cr\geq 0.5$일 때는 Bresler 방법을 그대로 사용해도 무방하나 $Cr\leq 0.3$일 때는 ϕ=0.4로 수정한 일반 차분법을 사용하는 것이 정확성에 있어서 보다 효과적이다.

모형 입력으로서 초기 경계 조건의 변화에 따른 민감도를 고찰하기 위하여 표 1의 두번째 경우에 앞절의 수치 특성에 따라 선택된 세가지 차분법(양해법, Chaudhari 및 Bresler 방법)을 적용하여 그림 3의 경계선 부근에서 수치 실험을 한 결과 공간 RMS 오차의 시간 평균치는 표 5(Δx=0.05, Δt=5.0)와 같다. 양해법과 Chaudhari 방법의 $\alpha-\beta$평면에서의 우월 영역은 그림 3의 첫번째 경우와 거의 일치함을 알 수 있는 반면 Bresler가 가장 정확한 영역은 첫번째 경우와는 달리 양해법 또는 Chaudhari 방법이 안정한 영역에서는 존재하지 않고 있음을 알 수 있다. 표 5에서 α=0.2, β=0.45(D=0.000225, V=0.002)인 경우 최종 시각 $t=100\Delta t$에서의 파형은 그림 5와 같고 이들의 오차를 표 6에

표 5. 공간 RMS 오차의 시간 평균치(경우 2)

α	β	양 해 법	Chaudhari	Bresler
0.025	0.10	0.00076	0.00051	0.00128
0.100	0.10	0.00838	0.00554	0.01434
	0.20	0.00207	0.00106	0.00514
	0.30	0.00032	0.00151	0.00861
0.200	0.45	0.00249	0.00864	0.00495
0.300	0.30	0.01090	0.00547	0.00676
평	균	0.00415	0.00379	0.00572

표 6. 차분법에 따른 첨두량의 비교(경우 2)

	해석해($t=0$)	해석해($t=100\Delta t$)	양 해 법	Bresler	Chaudhari
C의 첨 두 값	5.601	2.754	2.753	2.787	2.697
해석해에 대한 비	1.000	1.000	0.999	1.012	0.979
첨 두 점 의 위 치	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800

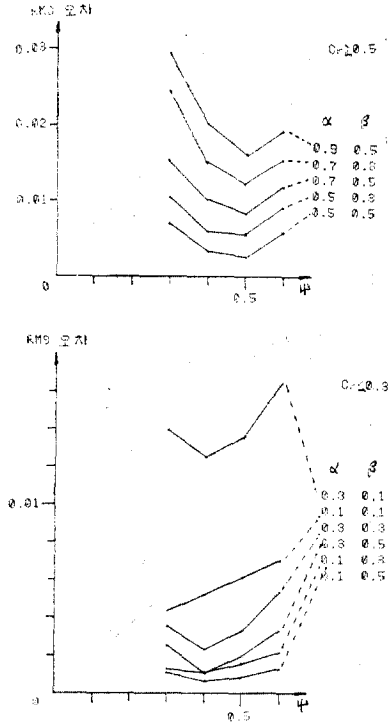

그림 4. ϕ에 따른 RMS 오차의 변화(경우 1)

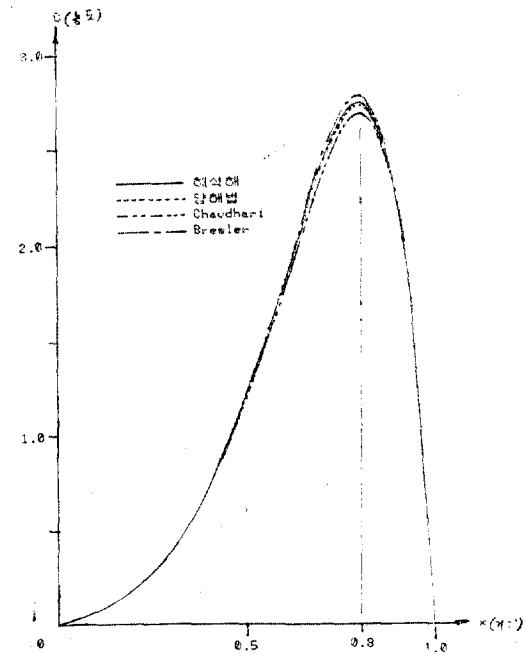

그림 5. 차분법에 따른 파형의 변화(경우 2)

나타내었다. 이를 보면 첨두점의 위치는 세차분법 모두 해석해와 일치하지만 첨두점의 크기는 Bresler 방법에 의한 것은 1% 정도 커지고 양해법에 의해서는 거의 일치하며 Chaudhari 방법에 의해서는 2% 정도 작아진다.

9. 결 론

이상과 같이 대류분산 모형에 관한 유한 차분 근사의 특성 및 장단점을 수치 해석 및 실험을 통하여 연구한 결과 다음과 같은 결론을 도출하였다.

1) Bresler 방법과 음해법은 무조건 안정이고 양해법, upstream 차분법, Chaudhari 방법은 조건부 안정이다.

2) 쌍곡형 미분 방정식인 대류 모형의 유한 차분법이 포물형 미분 방정식인 분산 모형의 차분법보다 정확도에서 일반적으로 다소 떨어진다

3) 계산 시간(CPU)은 양해법 또는 Chaudhari 방법이 비슷하게 가장 작고 Bresler 방법이 이들의 거의 두배로 항상 가장 크다.

4) Peclet 수가 작아 분산이 지배적인 흐름에서는 양해법이 가장 정확한 반면 Peclet 수가 커서 대류가 지배적인 흐름에서는 Chaudhari 방법이 가장 정확할 뿐만 아니라 수치 분산 현상에 가장 둔감하다는 장점도 있다. 그리고 Bresler 방법은 다른 차분법과는 다르게 overshooting 현상에 민감하다는 단점이 있다.

5) upstream 차분법 또는 음해법은 정확성에서 가장 떨어지므로 사용하지 않는 것이 좋다. 특히 음해법은 수치 분산 현상에 가장 민감하다

6) Courant 수가 0.5 보다 큰 경우에는 Bresler 방법을 사용하여도 무방하지만 0.3 보다 작은 경우에는 시간 가중치가 0.4 가 되는 일반 차분법이 Bresler 방법보다 정확도가 높다.

7) 일반적으로 Bresler 방법은 양해법 또는 Chaudhari 방법이 안정인 영역에서 정확도가 떨어질 수 있으므로 사용하지 않는 것이 좋다.

감사의 말

이 논문은 한국학술진흥재단의 1986 년도 연구비에 의하여 연구되었으며 이에 감사를 드린다.

참 고 문 헌

1. 윤태훈, "사대를 갖는 자연 하천에서의 종방향확산", 대한토목학회지, 제 25 권, 제 2 호, 1977. 6.
2. 윤태훈, "불균일 단면을 갖는 하천에서 오염물의 종확산", 대한토목학회지, 제 27 권, 제 3 호, 1979. 6.
3. 이길성, "계산 수리학의 기초 : 수공 모형의 구성" 한국수문학회지(강좌), 제 19 권, 제 2 호, 1986.
4. 이정규, 안수한, "조류에 의한 부유사의 확산에 대한 수치 모형", 대한토목학회논문집, 제 4 권, 제 4 호, 1984. 12.
5. Ames, W.F., "*Numerical Methods for Partial Differential Equation*," Academic Press, Chap. 2, 1977.
6. Anderson, D.A., J.C. Tannehill, and R.H. Pletcher, "*Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*", McGraw-Hill, pp. 88~97. 1984.
7. Bear, J., "*Hydraulics of Groundwater*," Mc Graw-Hill, pp. 263~276, 1979.
8. Bresler, E., "Simultaneous Transport of Solutes and Water under Transient Unsaturated Flow Conditions", *Water Resources Research* 9, 1973.
9. Carslaw, H.S., and J.C. Jaeger, "*Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, Great Britain, 1959.
10. Chaudhari, N.M., "An Improved Numerical Technique for Solving Multidimensional Miscible Displacement Equations", *J. Soc. Petroleum Engrs.* 11, 1971.
11. Cheng, R.T., V. Casulli, and S.N. Milford, "Eulerian-Lagrangian Solution of the Convection-Dispersion Equation in Natural Coordinates", *Water Resources Research*, Vol. 20, No. 7, July 1984.
12. Evans, D.J., and A.R. Abdullah, "Boundary Value Techniques for Finite Element Solutions of the Diffusion-Convection Equation", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, 1986.
13. Falconer, R.A., "Temperature Distribution in Tidal Flow Field", *J. of Environmental Engineering, ASCE*, Vol. 110, No. 6, Dec. 1984.
14. Fried, J.J., "*Groundwater Pollution, Development in Water Science 4*", Elsevier, pp. 254~256, 1975.
15. Grenney, W.J., M.C. Teuscher, and L.S. Dixon, "Characteristics of the Solution Algorithms for the QUAL II River Model", *J. of WPCF*,
16. Li, W.H., "*Differential Equations of Hydra-*

ulic Transients, Dispersion and Groundwater Flow," Prentice-Hall, pp. 189~191, 1972.

17. Robert, D.L., and M.S. Selim, "Comparative Study of Six Explicit and Two Implicit Finite Difference Schemes for Solving One-Dimensional Parabolic Partial Differential Equations", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, 1984.
18. Sobey, R.J., "Numerical Alternatives in Transient Stream Response", *J. of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 110, No. 6, Jun. 1984.
19. Texas Water Development Board, "*Simulation of Water Quality in Streams and Canals*", EPA-OWP-TEX-128, NTIS, 1971.

(接受 : 1987. 10. 20)