고정점을 갖는 평면 삼변망의 최소일의 원리에 의한 조정

Adjustment of Plane Trilateration Nets with Fixed Point by Using of Minimum Work Theory

양 인 태*
Yang, In Tae

Abstract

The precise methods applied to adjust plane trilateration nets employ least squares techniques. The observations or the condition equations in these known methods are, without exception, nonlinear. The coefficients of the corrections in the conditions equations methods are lengthy and complicated.

This paper presents a new method in which the coefficiets of the corrections of the conditions are simple and can be easily calculated and checked. In this method the measured distances in trilateration nets are considered as elastic members in an internally redundant framework.

If the redundant members have measuring errors, axial forces must be applied to fit them in the framework. As a result axial forces will develop in all other members causing changes in their lengths. By applying minimum work techniques one can determine these changes in length which are in fact the required corrections of the measured distances.

The result of this study presents that the closing ratio is about 1/145000 and it is improved that this method is useful in analysis plane trilateration nets.

요 지

평면 삼변망의 조정에 적용되는 정밀방법은 대개 최소제곱법이 적용된다. 이미 알고 있는 방법으로써 관측 방정식이나 조건 방정식은 예외 없이 모두 비선형이다. 조건 방정식에서 보정을 위한 계수식은 매우 길고 복잡하다.

본 논문에서는 조건 방정식이 선형이고 보정계수가 매우 간단하게 계산되고 검산되어 질 수 있는 새로운 기법을 제시하였다. 본 연구에서 택한 방법에서는 삼변망의 관측거리는 잉여관측값을 갖는 형태의 것으로 간주하였다.

만약 이 잉여관측변이 관측오차를 갖는다면 완전한 망을 이루기 위해서는 기준선 방향의 영향이 다른 변의 길이에 변화를 가져오게 된다. 이 변화를 최소일의 원리를 적용하므로서 해석할 수 있었다. 이 방법에 의하여 망조정을 분석한 결과 폐합비가 약 1/145,000으로 매우 양호하여 평면 삼변망의 해석에 유용하게 이용될 수 있음을 입증하였다.

* 정회원 · 강원대학교 공과대학 조교수, 토목공학과

1. 서　　론

최소제곱법에 의한 평면 삼변망의 조정은 좌표의 변형을 관측하거나 조건식을 이용하여 해결되어 질 수 있다. 좌표의 변형을 관측하는 방법은 매우 간단하나 다수의 유사한 식들의 해가 요구되어지며 좌표의 개략값들이 모든 미지점들에 대하여 계산되어져야 한다. 이 때 관측방정식은 개략의 좌표값에 대한 미지 보정의 함수로서 관측된 各距離에 의하여 나타내어진다[1].

일반적으로 조건방정식에 의한 방법은 많지 않은 수의 정규방정식으로 표현될 수 있다. 그것은 중심점에서나, 각의 합이 주어진 값과 계산되어진 값이 같은 점에서 각을 계산함에 근거를 두고 있다. 이것은 중심점에서 각의 폐합오차를 유발하며, 일반적으로 cosine 법칙이 각을 계산하기 위하여 적용된다. 사변형에서는 하나의 대각선에 의하여 생기는 두 삼각형면적의 합은 다른 대각선에 의하여 생기는 두 삼각형 면적의 합과 같아야 되는 조건이 성립된다. 따라서 면적 조건방정식은 기준값이나 폐합오차가 두 면적의 합 사이에 차가 발생하므로 유도된다.

그러나 위에서 어떠한 방법이 채택되든 관측방정식과 조건방정식은 모두 비선형이며 이것의 선형화는 일반적으로 테일러의 전개에서 이차항 이상의 항을 제거함에 의하여 이루어 지며 몇몇의 해는 근사값의 계속적인 반복 대입으로 얻어진다.

그러나 본 논문에서 소개된 삼변망의 조정은 Daniel, N.F. 가 발표한 실제 일의 원리에 의한 조정법을 응용한 것으로 조건식이 선형이며, 보정계수도 매우 얻기 쉽고 점검하기도 쉬우므로 그 유용성이 높음을 입증하고자 한다.

2. 최소일의 방법

그림 1 에서 부재 8 은 어떠한 점의 위치를 결정하기 위하여 사용된 것이 아니므로 잉여관측변이다. 만약 거리 $\overline{AD_m}$ 이 관측되어 졌으나 점들의 기하학적 성질에 의하여 $\overline{AD_c}$ 와 약간의 차이가 있다면 점 A 와 D_c 사이의 변 8 을 설치함에는 어려움이 생길 것이다. 그런 차이를 폐합오차로 볼 수 있으며 이 오차는 변 8 을 결합점

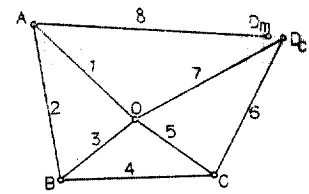

그림 1. 이 측량망은 변 1, 2, 3 으로 시작하여 점 A, B, O 를 결정하였고 변 4와 5로부터 C를, 변 6 과 7 로부터 D_c를 결정하였다. 그러나 변 8 은 어디에도 사용되지 않았으므로 잉여관측변이다.

에 맞추기 위해 외력을 가함으로서 제거된다.

이러한 외력은 관측된 거리 $\overline{AD_m}$ 이 짧으냐 길으냐에 따라 인장력일 수도 있고 압축력일 수도 있다. 그 결과에 따라 잉여관측변을 포함한 모든 변은 축방향으로 영향을 미치고 길이가 δ_d 만큼 변할 것이다.

잉여관측변에 가해진 영향 X 는 변형된 잉여관측변 AD 의 길이가 모든 다른 변형된 변으로부터 계산에 의하여 얻어진 값과 똑같게 주어져야 한다.

한 개 이상의 잉여관측변이 관측된 경우에는 망의형태는 여러개의 방사형이나 사변형으로 분리될 수 있다. 모든 방사형은 하나의 잉여관측변을 갖게 되고 하나 하나 처리되어진다. 다른 도형과 공통인 변은 그러한 도형들의 잉여관측변들과 같은 방향으로 작용한 힘에 의하여 영향을 받게 된다.

따라서 조건방정식은 다음과 같다.

최소일의 원리를 이용하여 표현하면

$$\frac{S_{j1}}{K_1}\delta d_1+\frac{S_{j2}}{K_2}\delta d_2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{S_{jL}}{K_L}\delta d_L+\Delta D_j=0 \qquad (1)$$

이고, 최소제곱법으로 표현하면

$$\frac{a_{j1}}{P_1}v_1+\frac{a_{j2}}{P_2}v_2+\cdots$$
$$+\frac{a_{jL}}{P_L}v_L+\Delta D_j=0 \qquad (2)$$

이다.

식 (1), (2)에서 기호의 의미는 다음과 같다.

S_{ji} : 잉여관측변 j 에 작용하는 실제영향에 의하여 발생하는 변 i 에서의 힘

δ_i : 다른 잉여관측변의 방향으로 가해진 단위 실제영향에 외하여 변 i에 작용하는 영향의 합으로부터 생기는 변 i에서의 길이에 대한 최종 변위

K_i : 변 i의 강도

a_{ji} : 조건방정식 j에서 거리 i의 보정계수

v_i : 거리 i의 보정량

P_i : 보정거리 i의 경중율

ΔD_j : 조건방정식 i의 폐합오차 즉 잉여관측변 길이 j의 계산값과 직접관측한 값과의 차

$j : 1, 2, \cdots, r$

앞의 서술에서 이미 알고 있는 거리나 고정된 점들 간의 거리는 계수의 계산에 필요하다. 그러므로 그들은 조정과정 동안 길이가 변화할 가능성을 배제하므로서 관측된 값이지만 무한대의 경중율을 갖는다고 생각되어져야 한다.

3. 관측 및 조정

본 관측은 강원도 춘천시의 중도에서 1987년 5월 31일에 광파거리측량기(GTS-2)에 의하여 관측되어졌다.

그림 2에서 B는 좌표가 변하지 않는 기준점 좌표로 가정하였으며 각 변의 관측거리는 표 1에 나타내었다. 따라서 본 연구에서는 점 O, D 및 E의 최적 위치 결정과 망조정이 요구된다.

Stipp[2]는 조정된 거리를 관측방향과 평행하다는 가정하에서 좌표법의 분산을 구하였는데 이때 새로운 점 O, D 및 E에 대한 개략의 좌표값이 관측방정식을 나타내기 위하여 필요하였다. 따라서 여섯개의 정규방정식이 새로운 점들의 좌표를 알기 위하여 해결되어져야 한다.

Tarczy-Hornoch[3]는 같은 해석과정을 다르게 해결하였는데 그는 관측방정식으로부터 조건 방정식을 유도하였으며 그의 계수는 매우 복잡하였다. 새로운 점들의 좌표를 계산하기 위하여 개략의 좌표값을 계산하는 필요성이 요구되었다. 그러나 최소일의 원리를 이용하면 간략한 계산으로 직접 구할 수 있다.

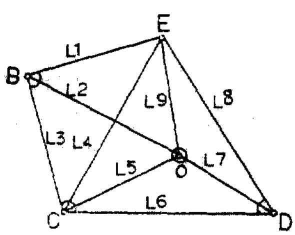

그림 2. 본 실험에서 택한 삼변망의 형태로 $\overline{CD}$가 잉여관측변이다.

조건방정식의 수를 결정함에 있어서 삼변망에 있는 세점을 설치하기 위해서는 세개의 거리가 요구되어지며 새로운 점 하나를 추가하기 위해서는 두개의 새로운 거리를 관측함이 요구된다. 따라서 망이 n개의 점을 갖는다면 그들의 상대적인 위치를 결정하기 위하여 요구되어지는 추가할 거리의 최소 수 M은

$$M = 2n - 6$$

이다.

만약 L이 이미 관측되어 알고 있는 거리의 수라면, 조건식수 r은

$$r = L - (2n - 3)$$

이 된다.

본 연구에서는

$$r = 9 - (2 \times 5 - 3) = 2$$

가 된다.

따라서 그림 2는 O를 중심으로 하는 두개의 도형 O-BCE와 O-CDE로 나뉘어 지며, 그들은 각각 그림 3, 4와 같은 힘의 삼각형을 만족시켜야 하는 두개의 조건식이 성립한다.

즉 그림 3에서

$$\frac{CA1}{\sin(H3)} = \frac{CA4}{\sin(H0 + H1)}$$

$$\frac{C44}{\sin(G1 + G3)} = \frac{CA2}{\sin(G2 - H4)}$$

이며, 그림 4에서

$$\frac{CB6}{\sin(H4)} = \frac{CB4}{\sin(G4)}$$

$$\frac{C44}{\sin(G8)} = \frac{CB8}{\sin H(3)}$$

이다.

3-1. 조건방정식의 계수 계산

조건방정식의 계수계산을 위하여 사용되는 거리는 관측된 실거리가 이용되며 이 때 분력 x, y의 합

즉 $\sum S_x = 0$

$\sum S_y = 0$

이다.

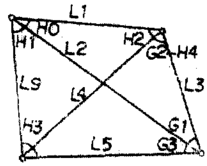

그림 3. 그림 2에서 $\overline{CE}$를 잉여관측변으로 하고 O를 중심으로 한 도형 O-BCE에서 CE의 보정계수 $C44=+1.0000$으로 하여 그린 삼각형

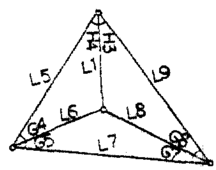

그림 4. 그림 2에서 $\overline{CE}$를 잉여관측변으로 하고 O를 중심으로 한 도형 O-CDE에서 CE의 보정계수 $C44=+1.0000$으로 하여 그린 삼각형

이 두 식은 같은 점에 작용하는 모든 다른 영향을 알고 있다면 임의 점에 작용하는 미지의 영향을 찾아 내기 위하여 이용된다.

그림 2를 두 개의 도형으로 분리하고 그 각각에 대한 삼각망을 그리면 그림 3, 4와 같다.

그림 2에서 변 $L4$를 잉여관측변으로 한다면 그의 변의 계수 $CA4$는 $+1.000$이 된다.

따라서 그림 3에서 변 $L1$의 계수 $CA1$은

$$CA1=\frac{CA4\times\sin(H3)}{\sin(H0+H1)}$$
$$=-0.1579844\cdots$$

이다.

같은 방법으로 계산을 계속하면 다시 $L4$에 대한 계수 $C44$를 구할 수 있어 검산이 가능하다.

즉, $$C44=\frac{CA2\times\sin(G1+G3)}{\sin(G2-H4)}$$
$$=0.9994741\cdots$$

이다.

마찬가지로 그림 4에서 변 $L4$의 계수 $CB4=1.0000$이므로

$$CB6=\frac{CB4\times\sin(H4)}{\sin(G4)}$$
$$=0.967291\cdots$$

이다.

앞에서와 같이 변 $L4$에 대한 계수를 다시 검산하면

$$C44=\frac{CB8\times\sin(G8)}{\sin H(3)}$$
$$=1.0000033\cdots$$

이다.

이것을 정리하여 표로 나타내면 표 1과 같다.

단 표 1의 COEFFICIENT 항에서 음(−)의 부호는 그림 3, 4에서 변 4의 계수가 (+)이므로 陽方向의 영향과 陰方向의 영향의 상관 관계로 부터 도출된 것이다.

3-2. 공통영향계수 계산

그림 2에서 두개의 도형 O-BCE와 O-CDE는 점 O에서 각의 폐합오차가 발생한다.

즉, $\Delta A=H1+G3-H5$
$$=0.0605898\cdots(\text{radian})$$
$$\Delta B=G9+G6+H5-2\pi$$
$$=-0.0568521\cdots(\text{radian})$$

따라서 변 $L4$에는 ΔA와 ΔB에 의한 선형폐합오차 $\Delta L4$가 발생한다.

O-BCE에서

$$\Delta L4=-L9\times\sin(H3)\times\sin(\Delta A)$$
$$=-0.0155980\cdots$$

O-CDE에서

$$\Delta L4=L9\times\sin(H3)\times\sin(\Delta B)$$
$$=-0.0154081\cdots$$

그러므로 위의 변의 계수와 선형폐합오차를 이용하면 다음의 정규방정식이 성립된다.

$$2.7535\ C1+3.0721\ C2-0.01559=0$$
$$3.0721\ C1+3.7175\ C2-0.01541=0$$

위의 식을 풀면

$C1=0.01334$

$C2=-0.00688$

이 된다.

이 공통영향계수를 각 부재계수와 곱하여 최종의 보정량을 구하여 거리를 보정한다.

즉 $\overline{D}_i=D_i+CAi\times C1+CBi\times C2$이다.

여기서

$\overline{D}_i$는 변 i의 보정거리

D_i는 변 i의 관측거리

CAi는 도형 O-BCE에서 변 i의 보정계수

CBi 는 도형 $O\text{-}CDE$ 에서 변 i 의 보정계수
$C1$ 는 도형 $O\text{-}BCE$ 에서의 공통영향계수
$C2$ 는 도형 $O\text{-}CDE$ 에서의 공통영향계수
이다.

결과를 정리하면 표 1과 같다.

3-3. 좌표계산

좌표계산은 $BOCDEB$ 로 연결되는 폐합다각형으로 간주하였고 B 점의 좌표는 임의로(1000, 1000)으로 가정하였으며 BO의 방위각은 118.949269° 즉 2.07605 radian 으로 하였다.

또한 삼변망의 조정결과를 분석하기 위하여 다변망 자체의 조정은 피하고 삼변망 조정결과만을 가지고 폐합시켜 계산한 결과 폐합차는 0.00763m 였으며 폐합비는 1 : 145281.5이었다.

표 1. 가상일의 원리에 의하여 구한 변 계수를 이용하여 삼변材을 조정한 결과

No.	MEASURED DISTANCE	COEFFICIENT O-BCE	COEFFICIENT O-CDE	CORRECTED DISTANCE
1	272.72	−.1580	0	272.7179
2	198.211	.1877	0	198.2135
3	196.39	−.0888	0	196.3888
4	321.933	1.0000	1.0000	321.9395
5	188.055	−.9548	−1.0535	188.0459
6	174.486	0	.0967	174.4853
7	165.543	0	−.2645	165.5448
8	275.05	0	.2437	275.0483
9	135.264	−.8797	−1.2120	135.2606

결과는 표 2와 같다.

표 2. 보정된 거리를 이용하여 B 점의 좌표를 (1000, 1000)으로 가정하여 구한 좌표와 조건방정식에 의하여 구한 좌표의 비교

POINT	AZIMUTH (R)	N	E	MINIMUM WORK NORTH	MINIMUM WORK EAST	CONDITION EQ. NORTH	CONDITION EQ. EAST
B				1000.0000	1000.0000	1000.0000	1000.0000
	2.07605	95.9422	173.4465				
O				904.0578	1173.4465	904.0749	1173.4559
	4.15210	−99.9348	−159.2974				
C				804.1230	1014.1491	804.1230	1014.1693
	1.95617	−65.5879	161.6891				
D				738.5351	1175.8382	738.5476	1175.8634
	.35986	257.4300	96.8575				
E				995.9651	1272.6957	995.9898	1272.6884
	−1.55600	4.0349	−272.6881				
B				999.9999	1000.0076		

CLOSING ERROR=.00763 CLOSING RATIO1/145281.5

4. 결 론

본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 본 연구에서 제시한 망조정 방법은 선형화, 초기값문제나 반복계산 과정이 필요치 않아 직접 구해질 수 있었다.

둘째, 연속된 삼변망은 잉여관측값을 관측하여 연속된 변의 계수를 구할 수 있다.

셋째, 변계수의 계산과정에서 일반적인 방법에서는 검산이 어려우나 본 방법은 언제라도 검산이 가능함을 알 수 있었다.

넷째, 본 연구에서 이용된 망은 조건방정식에 의하여 구한 좌표값에 매우 가깝게 접근하고, 폐합오차가 0.00763mm 로 매우 작고 폐합비는 1/145,281.5 로 매우 양호하였다.

참 고 문 헌

1. Daniel, N.F., "Virtual work adjustment of trilaterations nets." *Journal of the Surveying and Mapping Dvision,* Vol. 105, No. 541, 1979, pp. 67~83.
2. Stipp, D.W., "Trilateration adjustment." *Survey*

ing and Mapping, XXII(4), 1962, pp. 575~580.

3. Tárezy-Hormoch, A., "Notes on the adjurstment of Trilateration. *Empire Survey Review*, part 1, XVII(134) : 1964, pp. 363~374.

(接受 : 1987. 9. 24)