

# 벽면의 유연성을 고려한 액체저장탱크의 동적해석

## Seismic Analysis of Liquid Storage Tanks Considering Shell Flexibility

李 昌 根\*  
Lee, Chang Geun  
尹 楨 邦\*\*  
Yun, Chung Bang

### Abstract

In this paper the liquid sloshing effects in vertical storage tanks under earthquake loadings are studied. The study focuses on the investigation of the effect of the flexibility of the tank wall on the hydrodynamic forces exerted on it. The tank structure is modelled using finite elements. The motion of the liquid is expressed by the Laplace equation. The equation of motion of the fluid-shell system is formulated including the coupling effect between the shell motion and the sloshing motion. A procedure is developed to obtain the natural frequencies and the mode shapes of the sloshing motion as well as the shell vibration. Dynamic analyses have been carried out for several tanks with different dynamic characteristics utilizing the time history method as well as the response spectra method.

### 요 지

직립원통형 액체저장탱크가 지진하중을 받을 때, 벽면 유연성이 벽면에 작용하는 유동압력에 미치는 영향에 대해 연구하였다. 탱크 구조물은 환(ring)형 유한요소를 사용하여 이상화하였으며, 유동에 대한 해는 Laplace 방정식을 이용하여 구하였다. 셸-유체계의 운동방정식은 자유표면거동과 벽면유연성의 상관효과까지 포함하여 구성하였으며, 이에 따른 셸 거동과 자유표면거동에 대한 자유진동모우드를 해석하는 방법이 개발되었다. 예제해석으로는, 구조적 특성이 다른 몇개의 저장탱크에 대해, 응답스펙트럼 해석법과 시간영역 해석법을 사용하여 동적응답을 구하였고, 그 결과들을 비교 분석하였다.

### 1. 서 론

본 논문에서는 벽면의 유연성을 고려한 액체 저장탱크의 동적거동해법에 대하여 연구하였다. 좀 더 자세히 말하면, 직립원통형 유체저장탱크

가 지진하중을 받을 때, 벽면의 유연성이 내부 유체의 거동으로 말미암아 벽면에 발생하는 유동압력에 미치는 영향에 대해 연구하였다. 일반적으로 이 유동압력은 충격성분(impulsive component)과 대류성분(convective component)의 조합으로 생각할 수 있는데 전자는 탱크의 벽면과 같이 움직이는 유동에 의한 것이며, 후자는 벽

\* 정회원 · 한국과학기술원 박사과정

\*\* 정회원 · 한국과학기술원 부교수

면거동에 따른 유체의 자유표면운동에 의한 압력성분을 말한다. 이러한 두가지 성분의 유동압력은 일찌기 1959년 Housner에 의해 탱크벽면이 강체운동을 한다는 가정하에 근사적으로 얻어졌다<sup>(1,2)</sup>. 그러나 1964년 Alaska 지진에 의해 이러한 방법에 의거하여 설계된 많은 저장탱크들이 손상을 입었고, 이후 많은 연구들이 벽면의 유연성의 영향을 고려하는 해석방법에 지대한 관심을 갖게 되었다. 초기에는 직립원통 저장탱크를 전단력과 모멘트를 전달하는 단순보로 단순화하여 해석하는 연구들이 수행되었으며<sup>(3,4)</sup>, 근래에 Haroun<sup>(5)</sup>에 의해 부가질량행렬 개념과 경계적분해석 기법을 이용하여 유연성을 가진 벽면의 거동과 이로 인해 발생하는 유체동압의 상호관계가 잘 규명되고 있다. 그러나, 이 연구에서는 유체의 자유표면거동과 관계된 유동의 대류성분에 대해서는 벽면 유연성의 영향이 고려되지 않았다.

본 논문에서는 유동에 대한 편미분 방정식을 벽면거동에 대해 직접 풀어서, 충격성분은 물론 대류성분에까지 벽면유연성이 미치는 영향을 고려하여 해석하는 방법이 개발되었다. 예제해석은 동적특성이 서로 다른 몇개의 탱크에 대해, 지진응답스펙트럼해석 및 시간영역해석법을 사용하여 수행되었고, 두 해석방법과 구조물들의 특성에 따른 해석결과를 비교분석하였다.

## 2. 쉘 구조물의 이상화

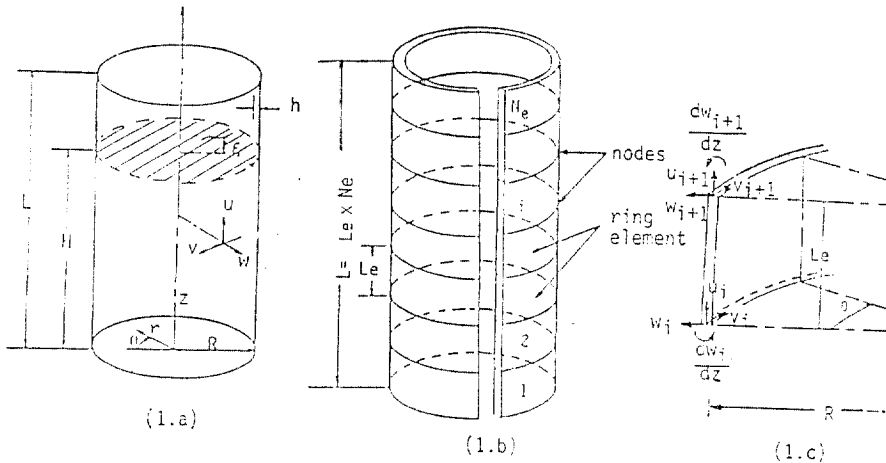


그림 1. Coordinate of the tank and ring element.

그림(1-a)에서 보인 바와 같이 바닥이 지면에 강체로 연결된 직립원통형 탱크에 대해 연구하였다. 원통구조물은 그림(1-b)에서와 같이 환형(ring shape)의 유한요소를 이용하여 이상화하였는데, 이때 각 요소에서의 변위는 다음과 같이 근사적으로 나타내었다.

$$\begin{aligned} W(\theta, z, t) &= w(z, t) \cos \theta \\ V(\theta, z, t) &= v(z, t) \sin \theta \\ U(\theta, z, t) &= u(z, t) \cos \theta \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $W, V, U$ 는 각각 반경방향변위, 회전방향변위 및 축방향변위이며;  $w(z, t)$ 와  $u(z, t)$ 는  $\theta=0$ 인 점에서,  $v(z, t)$ 는  $\theta=\frac{\pi}{2}$ 인 점에서의 각각의 변위로서 임의의 높이( $z$ )에서 각 변위성분들의 크기를 나타낸다.

환형요소내의 변위들은 적당한 형상함수들을 이용하여 요소절점변위에 대한 식으로 표시할 수 있는데, 여기서는 형상함수를 축방향과 회전방향변위에 대해서는  $z$ 의 1차식으로, 반경방향변위에 대해서는  $z$ 에 대한 3차식으로 택하였다. 따라서,  $i$ 번째 요소절점변위벡터,  $\{q\}_e$ 는 아래 식(2)와 같이 요소의 상부와 하부절점에서 각각 4개씩의 변위성분을 가지게 된다.

$$\{q\}_e = \left\{ u_i, v_i, w_i, \frac{\partial w_i}{\partial z}, u_{i+1}, v_{i+1}, w_{i+1}, \frac{\partial w_{i+1}}{\partial z} \right\}^T \quad (2)$$

윗 식의 절점변위벡터를 사용할 때, 쉘(shell)에 대한 변형에너지,  $U(t)$ 와 운동에너지,  $T(t)$

는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$U(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_e} \{q\}_{e_i}^T [K_{e_i}]_{e_i} \{q\}_{e_i} \quad (3)$$

$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_e} \{\dot{q}\}_{e_i}^T [M_{e_i}]_{e_i} \{\dot{q}\}_{e_i} \quad (4)$$

여기서,  $N_e$ 는 환형요소의 수이며, 상첨자( $\bullet$ )는 시간에 대한 미분을 나타내고  $[K_{e_i}]_{e_i}$ 와  $[M_{e_i}]_{e_i}$ 는 각각  $i$ 번째 환형요소의 강성행렬과 질량행렬이다.

식(3)과 식(4)에서의 행렬들은 다음과 같이 얻어진다.

$$[K_{e_i}]_{e_i} = \int_0^{L_e} \int_0^{2+\pi} [N]^T [D]^T [E]_i [D] [N] R d\theta dx \quad (5)$$

$$[M_{e_i}]_{e_i} = \int_0^{L_e} \int_0^{2+\pi} m_i(x) [N]^T [N] R d\theta dx \quad (6)$$

여기서,  $[N]$ 은 요소내 변위성분과 절점변위 벡터의 관계를 나타내는 형상함수행렬;  $[D]$ 는 변형율과 요소내 변위의 관계를 나타내는 행렬;  $[E]_i$ 는  $i$ 번째 요소에서, 응력과 변형율의 관계를 나타내는 행렬;  $R$ 과  $L_e$ 는 각각 환형요소의 반경과 높이;  $m_i(x)$ 는 쉘의 단위면적당 질량을 나타내며, 각 행렬의 형태는 부록(1)에 보였다.

### 3. 유동의 속도포텐셜 및 유동하중

탱크 벽면의 거동  $\dot{W}(x, \theta, t)$ 에 의한 유동해석은, 내부 유체가 비점성, 비압축성이라고 가정할 때, 비회전유동에 대해서는 속도포텐셜  $\phi(r, \theta, z; t)$ 을 구함으로써 수행될 수 있다. 이때 속도포텐셜은 아래와 같은 Laplace 방정식을 만족시키며,

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (7)$$

직립형 원형탱크의 경우 경계조건은 다음과 같다.

탱크의 벽면에서 ( $r=R$ ):

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}(R, \theta, z; t) = \dot{W}(\theta, z, t) \quad (8)$$

바닥면에서 ( $z=0$ ):

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(r, \theta, 0; t) = 0 \quad (9)$$

유체의 자유표면에서 ( $x=H$ ):

$$\dot{\phi}(r, \theta, H; t) + g\xi(r, \theta, t) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(r, \theta, H; t) = \xi(r, \theta, t) \quad (11)$$

여기서,  $\xi(r, \theta, t)$ 는 유체의 자유표면에서의 파의 높이를 나타내며,  $g$ 는 중력가속도이다.

경계조건(8)을 만족하는  $\phi(r, \theta, z, t)$ 는 아래 식(12)와 같이  $r$ 에 대해서는 Bessel 급수의 형태로 나타낼 수 있다<sup>(6)</sup>.

$$\phi(r, \theta, z; t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_1\left(\epsilon_n \frac{r}{R}\right) (A_n(z, t) + b_n \dot{w}(z, t)) \cos \theta \quad (12)$$

여기서,  $J_1(\bullet)$ 는 제 1종 1차 Bessel 함수이고;  $\epsilon_n$ 은  $\frac{\partial J_1}{\partial r}(\epsilon_n) = 0$ 을 만족하는 값들이며;

$b_n$ 은  $r$ 을  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n J_1\left(\epsilon_n \frac{r}{R}\right)$ 의 Bessel 급수로 전개할 때의 계수로서  $2R/(\epsilon_n^2 - 1)J_1(\epsilon_n)$ 로 얻어진다.<sup>(7)</sup>

식(12)를 식(7)에 대입하여 정리하면  $A_n(z, t)$ 에 대한 아래 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 A_n}{\partial z^2}(z, t) - \left(\frac{\epsilon_n}{R}\right)^2 A_n(z, t) \\ & = -b_n \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial z^2}(z, t) \end{aligned} \quad (13)$$

$A_n(z, t)$ 는  $z=0$ 와  $z=H$ 에서의 경계조건을 사용하여 구해야 하는데, 식(12)와 경계조건식(10), (11)로부터 자유표면의 거동  $\xi(r, \theta, t)$ 도 다음과 같이 Bessel 급수의 형태로 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

$$\xi(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) J_1\left(\epsilon_n \frac{r}{R}\right) \cos \theta \quad (14)$$

여기서,  $\eta_n(t)$ 는  $n$ 번째 Bessel 급수의 계수이다.

지금까지의 과정을 종합해 보면, 탱크벽면의 거동,  $\dot{W}(x, \theta, t)$ 에 대해  $\phi(r, \theta, z, t)$ 와  $\xi(r, \theta, t)$ 를 구하는 문제가  $A_n(z, t)$ 와  $\eta_n(t)$ 를 구하는 문제로 변환되었으며, 경계조건식(9), (10), (11)을  $A_n(z, t)$ 와  $\eta_n(t)$ 로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial A_n}{\partial z}(z, t) + b_n \frac{\partial \dot{w}}{\partial z}(0, t) = 0 \quad (9)'$$

$$\dot{A}_n(H, t) + b_n \dot{w}(H, t) + g\eta_n(t) = 0 \quad (10)'$$

$$\frac{\partial A_n}{\partial z}(H, t) + b_n \frac{\partial \dot{w}}{\partial z}(H, t) = \dot{\eta}_n(t) \quad (11)'$$

미분방정식(13)의 해인  $A_n(z, t)$ 는 전장에서

탱크벽면의 강성행렬을 얻기 위해 요소별로  $z$ 의 3차식으로 나타낸  $w(z, t)$ 를 이용하면 정확하게 구할 수 있을 것이다. 그러나 이렇게 복잡한  $w(z, t)$ 를 경계조건으로 하여 전체 유동의 속도포텐셜을 구하는 것은 비효율적일 뿐 아니라 실제적인 것이 못된다. 이는 유동의 주파수 성분이 구조물의 기본 자유진동주파수보다도 훨씬 작아서 유동이 구조물의 저 주파수 진동모우드에 주로 영향을 받기 때문이다. 따라서 본 연구에서는 유동에 대한 해를 얻기 위해, 저 주파수 진동모우드에 의한 벽면의 변형을 충분히 잘 나타낼 수 있는 근사적 형상으로, 식(15)와 같이 유체의 진구간( $0 < z < H$ )에 걸쳐 3차식으로 표현되는  $w(z, t)$ 를 사용하였다.

$$w(z, t) = \langle 1, z, z^2, z^3 \rangle \begin{Bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \end{Bmatrix} \quad (15)$$

여기서, 각 계수들은 반경방향 절점변위  $\{w(t)\}$ 에 대한 최소자승근사치들이며, 이들은 절점들의 높이만의 값으로 정해지는  $[\Omega]$ 와  $\{W(t)\}$ 의 곱의 형태로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \end{Bmatrix} = [\Omega] \{w(t)\} \quad (16)$$

이제,  $w(z, t)$  대신  $\ddot{w}(z, t)$ 를 사용하면, 식(13)의 해는 다음과 같이 구해진다.

$$A_n(z, t) = B_{n1}(t) \cosh \frac{\epsilon_n z}{R} + B_{n2}(t) \sinh \frac{\epsilon_n z}{R} + 2 \frac{b_n R^2}{\epsilon_n^2} \dot{C}_2(t) + 6 \frac{b_n R^2}{\epsilon_n^2} z \dot{C}_3(t) \quad (17)$$

윗식에서  $B_{n1}(t)$ 와  $B_{n2}(t)$ 는 경계조건식들로부터 구해지는데, 식(9)'과 (10)' 및 식(15)와 (16)을 보면,  $A_n(z, t)$ 는 절점속도  $\{\dot{w}(t)\}$ 와 자유표면거동  $\eta_n(z)$ 의 시간적분에 관련된 항의 합으로 구해짐을 알 수 있다. 이렇게 구한  $A_n(z, t)$ 를 식(12)에 대입하면, 유동의 속도포텐셜은 아래와 같이 2개 항으로 나누어 나타낼 수 있다.

$$\phi(r, \theta, z; t) = \phi_I(r, \theta, z, \{\dot{w}\}) + \phi_C(r, \theta, z, \int_0^t \{\eta(\tau)\} d\tau) \quad (18)$$

여기서  $\phi_I$ 는 벽면거동  $\{\dot{w}\}$ 에만 관련된 유동

의 충격(impulsive)성분,  $\phi_C$ 는 자유표면거동  $\{\eta(t)\}$ 에 관련된 유동의 대류(convective)성분을 나타낸다.

식(18)은 미지의 자유표면 거동항이 포함되어 있으므로 완전한 해가 아니다. 따라서 나머지 경계조건식(11)'을 시간에 대하여 미분한 후 이에  $A_n(z, t)$ 를 대입하면 다음과 같이  $\{\eta\}$ 에 대한 식이 벽면가속도  $\{\ddot{w}(t)\}$ 에 의한 운동방정식의 형태로 구해진다.

$$[M_f] \{\eta\} + [K_f] \{\eta\} = [S] \{\ddot{w}\} \quad (19)$$

여기서  $[M_f]$ 와  $[K_f]$ 는 대각행렬인데, 각각 자유표면의 거동과 관련된 유동의 질량행렬 및 강성행렬로 볼 수 있고  $[S]$ 는 벽면가속도와 관련된 가진력의 참여계수(participation factor)로 볼 수 있다.

식(18)로 부터 탱크의 벽면에 작용하는 유동 압력은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$p(\eta, \theta, t) = -\rho_f \phi|_{r=R} \quad (20)$$

여기서,  $\rho_f$ 는 내부유체의 밀도이다.

여기에 가상일의 원리를 적용하면 절점에 작용하는 유동력,  $\{F\}$ 에 관한 식을 아래와 같이 구할 수 있으며,

$$\delta \{w\}^T \{F\} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \delta \ddot{w}(z, t) \cos \theta p(z, \theta, t) R d\theta dz \quad (21)$$

윗식에 포함된 적분을 수행하면  $\{F\}$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$\{F\} = -[M_a] \{\ddot{w}\} - [S]^T \{\eta\} \quad (22)$$

여기서,  $[M_a]$ 는 대칭행렬이며, 벽면가속도와 관련되어 있으므로 유동으로 인한 부가질량행렬로 볼 수 있고,  $[S]$ 는 자유표면의 거동이 절점하중에 미치는 영향을 나타내는 행렬로서 식(19)의  $[S]$ 와 같음을 보일 수 있다<sup>(7)</sup>.

#### 4. 쉘유체계의 방정식 및 해석

앞에서 구한 쉘의 운동에 관계된 항들과 유동에 관련된 항들을 조합하면 다음과 같은 쉘 유체계에 대한 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_s + \bar{M}_a & 0 \\ -\bar{S} & M_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\eta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s & \bar{S}^T \\ 0 & K_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

여기서  $\{q\}$ 는 2장에서 정의된 절점변위벡터이고,  $\{R_s\}$ 는 바닥면에서의 반력을 나타내며,

$[M_e]$ 와  $[S]$ 는 3장에서 반경방향의 변위성분에 대하여 정의된  $[M_e]$ 와  $[S]$ 를  $\{q\}$ 에 관계되도록 변환시킨 행렬이다.

절점변위벡터,  $\{q\}$ 를 바닥면에서의 변위벡터,  $\{q_1\}$ 과 자유절점 변위벡터,  $\{q_2\}$ 로 나누어 생각하면, 식(23)은 다음과 같이 다시 적을 수 있다

$$\begin{bmatrix} M_{11}, & M_{12}, & 0 \\ M_{21}, & M_{22}, & 0 \\ -\bar{S}_1, & -\bar{S}_2, & M_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{\eta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11}, & K_{12}, & \bar{S}_1^T \\ K_{21}, & K_{22}, & \bar{S}_2^T \\ 0, & 0, & K_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_e \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

식(24) 좌변에 포함된 행렬들은  $\bar{S}_1$ 과  $\bar{S}_2$ 로 인해 비대칭이며, 이런 비대칭 계수행렬을 갖는 운동방정식의 해를 구하는 데에는 심각한 어려움이 따른다. 기존의 많은 연구에서는 이 자유표면거동과 셸거동 간의 상관효과를 나타내는 항을 무시함으로써 계수행렬들을 대칭화하여 해석하였다<sup>(3,4,5)</sup>. 그러나, 본 연구에서는 이 항을 포함시키되, 적절한 좌표변환을 통하여 대칭계수행렬을 가지는 식을 유도하여 해석하였으며, 그 내용은 아래와 같다.

식(24)의 양변에, 아래의 식(26)에 보인 바와 같은 정축(monsingular)행렬,  $[P]$ 를 곱하면 다음과 같이 변환된 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_{11}, & M_{12}, & 0 \\ K_{22}M_{22}^{-1}M_{21}, & M_{22}, & 0 \\ \bar{S}_2M_{22}^{-1}M_{21}-\bar{S}_1, & 0, & M_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{\eta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11}, & K_{21}, & \bar{S}_1^T \\ K_{22}M_{22}^{-1}K_{21}, & K_{22}M_{22}^{-1}K_{22}, & K_{22}M_{22}^{-1}\bar{S}_2^T \\ \bar{S}_2M_{22}^{-1}K_{22}, & \bar{S}_2M_{22}^{-1}K_{22}, & K_f + \bar{S}_2M_{22}^{-1}S_2^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_e \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

$$[P] = \begin{bmatrix} I, & 0, & 0 \\ 0, & K_{22}M_{22}^{-1}, & 0 \\ 0, & \bar{S}_2M_{22}^{-1}, & I \end{bmatrix} \quad (26)$$

지진하중에 대해 해석하기 위해서는, 아래와 같이  $\{q_2\}$ 를  $\{q_1\}$ 과 이에 대한 상대변위성분  $\{q_r\}$ 의 합으로 나타낸 후,

$$\{q_2\} = \{q_r\} + [I, I, \dots I]^T \{q_1\} \quad (27)$$

식(25)에 대입하고 2 열과 3 열만을 정리하면 다

음과 같이 계수행렬이 대칭인 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{22}, & 0 \\ 0, & M_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{\eta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{22}M_{22}^{-1}K_{22}, & K_{22}M_{22}^{-1}\bar{S}_2^T \\ \bar{S}_2M_{22}^{-1}K_{22}, & K_f + \bar{S}_2M_{22}^{-1}\bar{S}_2^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_r \\ \eta \end{Bmatrix} = -[M_e] \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (28)$$

여기서,  $[M_e] = \begin{bmatrix} K_{22}M_{22}^{-1}K_{21} + K_{22}[I, I, \dots, I]^T \\ \bar{S}_2M_{22}^{-1}M_{21} - \bar{S}_1 \end{bmatrix}$

식(28)로부터는 자유표면거동과 셸거동간의 상관효과가 고려된 자유진동해석이 용이하며, 모우드중첩법을 이용하여  $\{q_r\}$ 과  $\{\eta\}$ 에 대한 해를 쉽게 얻을 수 있다. 본 연구에서는 응답스펙트럼해석과 시간영역해석을 수행하여 결과를 비교하였다.

## 5. 예제해석 및 토의

표 1에서 보인 바와 같은 구조적 특성이 다른 몇개의 탱크에 대해 해석을 수행하였다. 탱크 I은 반경에 비해 높이가 큰 구조물이며, 탱크 II는 반경에 비해 높이가 작은 구조물이다. 또한 탱크 III은 실제와 같이 벽면의 두께가 높이에 따라 변하는 구조물이며, 탱크 IV는 탱크 III을 근사적으로 해석하기 위해 사용된 평균두께를 가진 구조물이다. 표 2에서는 탱크 I과 탱크 II에 대한 자유진동 및 지진거동 해석결과를 나타냈다. 진동모우드들은 유체자유표면 거동에 주로 관련된 모우드(sloshing mode)와 셸 벽면의 거동에 주로 관련된 모우드(shell mode)의 두부분으로 나눌 수 있는데, 처음 5개의 sloshing mode에 대한 진동수는 탱크 I에 대해서는 1.5~4.5rad/sec, 탱크 II에 대해서는 0.9~2.8rad/sec의 범위에 있었다. 셸 모우드에 대한 첫번째 진동수는 탱크 I과 탱크 II에 대해 각각 33.8rad/sec, 39.9rad/sec로서 sloshing 모우드의 진동수에 비하여 매우 큼을 알 수 있었다. 일반적으로 지진 가속도는 10~50rad/sec의 진동구간에서 높은 에너지성분을 가지므로, 유연성의 영향을 고려한 해석의 경우 구조물의 지진응답이 상당히 증폭될 것임을 기대할 수 있다.

지진에 대한 거동을 위하여 El Centro 지진의 남북방향성분을 사용하였으며, 거동해석을 위해서 3개의 셸모우드와 5개의 sloshing 모우드를

### Ⅱ 1. Structural Properties of Storage Tanks

Case	Tank I	Tank II	Tank III	Tank IV
Radius $R$ (m)	7.32	18.3	5.9	5.9
Length $L$ (m)	21.96	12.2	16.8	16.8
Liquid height $H$ (m)	21.96	12.2	14.4	14.4
Thickness $h$ (m)	0.0254	0.0254	see Table 1. a	0.015
Shell Density $\rho_s$ (kg/m)	7840	7840	8000	8000
Liquid Density $\rho_f$ (kg/m)	1000	1000	1000	1000
Poisson's Ratio $\nu$	0.3	0.3	0.3	0.3
Young's Modulus $E$ (N/m)	$2.067 \times 10^{10}$	$2.067 \times 10^{10}$	$1.915 \times 10^{10}$	$1.915 \times 10^{10}$
Remarks	$L/R=3$	$L/R=0.67$	Variable Thickness	Average Thickness

Note : Tank III has a variable thickness along the height  
 Tank IV has an average thickness

#### Ⅱ 1-a. Wall Thickness along the Height (Tank III)

z(m)	2.4	4.8	7.2	9.6	12.0	13.2	16.8
h(m)	0.039	0.027	0.018	0.009	0.006	0.005	0.005

### Ⅱ 2. Comparison of Results from Different Method

#### (a) Tank I

Analysis Method	Response Spectra	Time History	Haroun's	Housner's
$\omega_s$ (rad/sec)	1.57, 2.67, 3.38, 3.96, 4.46		1.57	1.57
$\omega_f$ (rad/sec)	33.8, 96.7, 129.4		33.2	•
$Q_{max}$ (N)	$2.30 \times 10^7$	$2.31 \times 10^7$	$2.30 \times 10^7$	$1.10 \times 10^7$
$M_{Tmax}$ (N.m)	$2.61 \times 10^8$	$2.58 \times 10^8$	$2.78 \times 10^8$	$1.07 \times 10^8$
$N_{rmax}$ (N/mm)	1549	1534	1600	•
$W_{max}$ (cm)	1.21	1.16	1.17	•
$\xi_{max}$ (cm)	33.9	25.8	31.1	32.9

#### (b) Tank II

Analysis Method	Response Spectra	Time History	Haroun's	Housner's
$\omega_s$ (rad/sec)	0.91, 1.69, 2.13, 2.50, 2.82		0.91	0.91
$\omega_f$ (rad/sec)	33.9, 75.9, 129.3		38.7	•
$Q_{max}$ (N)	$3.24 \times 10^7$	$3.32 \times 10^7$	$3.97 \times 10^7$	$1.18 \times 10^7$
$M_{Tmax}$ (N.m)	$1.69 \times 10^8$	$1.64 \times 10^8$	$2.00 \times 10^8$	$8.85 \times 10^7$
$N_{rmax}$ (N/mm)	160	156	190	•
$W_{max}$ (cm)	0.55	0.52	0.62	•
$\xi_{max}$ (cm)	25.29	27.25	21.44	33.32

Note :  $\omega_s$  : sloshing modes frequencies.  $\omega_f$  : shell vibration frequencies.

$Q_{max}$  : maximum base shear.  $M_{Tmax}$  : maximum overturning moment.

$N_{rmax}$  : maximum axial stress resultant.  $W_{max}$  : maximum radial displacement

$\xi_{max}$  : maximum free surface wave amplitude.

사용하였고, 쉘모우드에 대해서는 감쇄비율 2%, sloshing 모우드에 대해서는 5%의 감쇄비율을 적용하였다. 표 2에 정리된 바닥면에서의 전단력과 전복모멘트의 결과를 보면 본 해석결과는 탱크벽면을 강체라고 가정한 Housner 방법의 결과와 비교할 때, 두 탱크에 대하여 공히 1.8~2.8 배 가량 큼을 알 수 있다. 반면 쉘거동 높이( $z$ )에 대한 cosine 함수로 단순화하여 이의 유연성을 고려하되, 쉘거동과 자유표면 거동과의 상호

영향을 무시한 Haroun 방법의 결과와는 탱크 I의 경우 큰 차이가 없음을 알 수 있었다. 탱크 II의 경우에 있어서 다소의 큰 차이를 보인 것은, 입력지진의 응답스펙트럼이 II의 기본진동수 부근에서 다소 큰 변화를 주고 있기 때문으로 판단된다. 그러나 자유표면운(5)에 대한 결과는 위의 3가지 다른 방법에 의한 결과가 큰차이가 없음을 알 수 있다. 위의 결과로부터 쉘의 유연성이 전체 구조물의 응답에 미치는 영향은 상당

표 3. Comparison of Responses using Different Number of Modes

Case		Tank I			Tank II		
Number of Modes	Shell	3	1	Difference	3	1	Difference
	Free Surface	5	1	(%)	5	1	(%)
$Q_{max}(10^7N)$		2.31	2.30	0.4	3.32	3.24	2.5
$Mr_{max}(10^6N.m)$		2.58	2.61	1.2	1.64	1.67	2.6
$W_{max}(cm)$		1.16	1.21	4.1	0.518	0.547	5.4
$\xi_{max}(cm)$		25.8	31.1	20.5	27.3	21.5	27.0

표 4. Tank with Variable Thickness vs. Tank with Average Thickness

Case	$\omega_x(\text{rad/sec})$	$\omega_y(\text{rad/sec})$	$Q_{max}(N)$	$Mr_{max}(N.m)$	$W_{max}(cm)$	$\xi_{max}(cm)$	Remarks
Tank III	1.784 2.975 3.765	55.72	$3.22 \times 10^7$	$2.74 \times 10^8$	1.987	108.0	Variable thickness
Tank IV	1.748 2.975 3.765	48.18	$4.13 \times 10^7$	$3.26 \times 10^8$	2.681	108.2	Average thickness

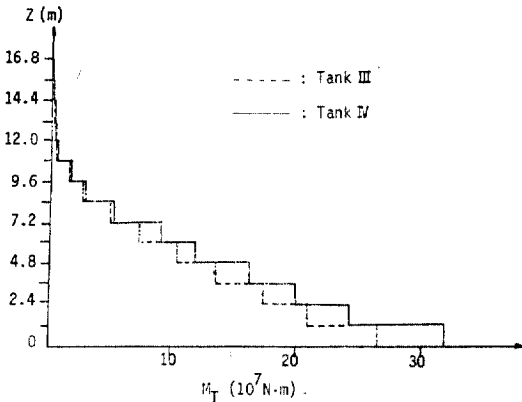


그림 2. Overturning moment along the height

히 크나, 자유표면거동과의 상관작용의 효과는 그리 심각하지 않음을 알 수 있다. 유동력산출을 위해 쉘의 전체 거동을 높이에 따른 3차함수(본 연구)와 Cosine함수(Haroun의 연구)로 달리 가정하여 해석한 결과가 매우 유사한 것을 볼 때, 쉘거동 형태의 선택이 유동력 및 자유표면 거동의 해석결과에 크게 민감한 영향을 주지 않는 것으로 판단된다. 표 3에서는 쉘거동과 자유표면거동에 대해 사용한 모우드 수에 따른 해석결과를 보였는데, 쉘거동에 대한 응답은 첫번째 모우드만 사용해도 충분히 정확한 결과를 얻을 수 있으나, 자유표면거동은 관련된 2~3개의 모우드를 해석에 포함시켜야 정확한 결과를 얻을 수 있음을 보여 주고 있다. 마지막으로 표 4와 그림 2에서는 높이에 따라 벽면의 두께가

변하는 탱크(Tank III)에 대한 해석결과와 근사적 방법으로 평균두께로 가정해서 얻은 결과(Tank IV)를 비교하였다. 후자의 경우는 전자에 비하여 바닥면에서 전복모멘트와 전단력을 20~30% 정도 큰 안전측의 결과를 주므로, 초기설계 단계에서 유용하게 이용할 수 있는 방법이라고 생각된다.

## 6. 결 론

지진하중을 받는 직립 원통형 액체저장탱크에 대해, 벽면 유연성의 영향을 쉘거동 뿐만 아니라 유체자유표면거동에까지도 고려하여 해석하는 방법이 제시되었다. 예제해석 결과 탱크벽면에 작용하는 유체동압과 탱크내의 응력을 구하는 데 있어서, 벽면 유연성이 미치는 영향은 매우 컸으나, 유체 자유표면거동과의 상관효과는 그리 심각하지 않음을 보여 주었다. 또한 쉘에 대한 응답을 얻기 위해서는 관련된 첫번째 모우드만을 사용해도 충분하나 자유표면거동을 해석하기 위해서는 관련된 2~3개의 진동모우드를 사용하여야 정확한 결과를 얻을 수 있음을 알았다. 또한 벽면의 두께가 변하는 구조물을 평균두께를 가진 구조물로 단순화하여 해석하면 약 20~30% 큰 안전측의 결과를 주므로, 이방법이 초기설계단계에서 유용하게 이용될 수 있다고 판단된다.

1. G.W. Housner, "Dynamic PPressure on Accelerating Fluid Containers", *Bull. Seism. Soc. Am.*, 47, 15~35 (1957).
2. H.I. Epstein, "Seismic Design of Liquid-Storage Tanks", *J. Struct. Div., ASCE*, 102, 1659~1673 (1976).
3. A.S. Veletsos, "Seismic Effects in Flexible Liquid Storage Tanks", *Proc. Int. Assoc. for Earthquake Eng.*, Rome, Italy, 1, 630~639 (1974).
4. A.S. Veletsos and J.Y. Yang, "Earthquake Response of Liquid Storage Tanks", *Adv. Civil Eng. Through Eng. Mech.*, ASCE, 1~24 (1977).
5. M.A. Haroun, "Vibration Studies and Test of Liquid Storage Tanks", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 11, 119~206, (1983).
6. N.W. Edwards, "A Procedure for Dynamic Analysis of Thin Walled Cylindrical Liquid Storage Tanks Subjected to Lateral Ground Motions", Ph. D Thesis University of Michigan, Ann Arbor, Michigan.
7. C.G. Lee, "Dynamic Analysis of Liquid-Storage Tank Subjected to Earthquake Loading", M.S. Thesis, KAIST, Seoul, Korea (1986).



<부록 1>

셸 요소의 변위, 변형 및 응력과의 관계식은 아래와 같다.

$$\{d\} = [N] \{q\}_{,i}$$

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\}$$

$$\{\epsilon\} = [D] \{d\}$$

여기서,

$$\{d\} = \{U(\theta, z); V(\theta, z); W(\theta, z)\}^T : \text{요소내 변위 함수}$$

$$\{q\}_{,i} = \left\{ u_i, v_i, w_i, \frac{\partial w_i}{\partial z}, u_{i+1}, v_{i+1}, w_{i+1}, \frac{\partial w_{i+1}}{\partial z} \right\}^T$$

:  $i$  번째 요소 절점 변위.

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x, \epsilon_\theta, \epsilon_{z\theta}, \rho_x, \rho_\theta, \rho_{z\theta}\}^T : \text{변형을 및 곡률 변화율}$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{z\theta}, M_x, M_\theta, M_{z\theta}\}^T : \text{셸 내부응력의 합력.}$$

또한 행렬  $[E]$ 와  $[D]$ 는 아래와 같다.

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nu & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & (1-\nu)/2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & h^2/12 & \nu h^2/12 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \nu h^2/12 & h^2/12 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (1-\nu)h^2/12 \end{bmatrix} \\ \times \frac{Eh}{(1-\nu^2)}$$

여기서,

$\nu$  : Poisson's ratio

$h$  : Shell thickness

$E$  : Young's modulus

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{R} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\theta}{\partial z} & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \cdot & \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ -\frac{1}{2R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{3}{2R} \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{2}{R} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} \end{bmatrix}$$

형상함수행렬은 아래와 같은 관계식으로부터 구하였다.

$$U(\theta, z) = \left\{ \left( 1 - \frac{z}{L_s} \right) u_i + \frac{z}{L_s} u_{i+1} \right\} \cos \theta$$

$$V(\theta, z) = \left\{ \left( 1 - \frac{z}{L_s} \right) v_i + \frac{z}{L_s} v_{i+1} \right\} \sin \theta$$

$$W(\theta, z) = \left\{ \left( 1 - \frac{3z^2}{L_s^2} + \frac{2z^3}{L_s^3} \right) w_i + \left( z - \frac{2z^2}{L_s} + \frac{z^3}{L_s^2} \right) \frac{\partial w_i}{\partial z} \right. \\ \left. + \left( \frac{3z^2}{L_s} - \frac{2z^3}{L_s^2} \right) w_{i+1} + \left( -\frac{z^2}{L_s} + \frac{z^3}{L_s^2} \right) \frac{\partial w_{i+1}}{\partial z} \right\} \cos \theta$$

(受接 : 1987. 7. 21)