

非線型 構造의 設計敏感度 解析法

Methods of Nonlinear Structural Design Sensitivity Analysis

柳 演 善*
Ryu, Yeon Sun

Abstract

Methods of nonlinear structural design sensitivity analysis are developed in parallel with the nonlinear finite element structural analysis methods and numerically evaluated. Direct decomposition and iterative solution methods for the secant stiffness approach and direct use of tangent stiffness in the design sensitivity analysis phase are derived and presented as the methods of nonlinear structural analysis and design sensitivity analysis are closely related. From the considerations of theoretical and numerical behavior, the tangent stiffness approach is shown to be efficient as the intermediate results of structural analysis can be effectively used in the design sensitivity analysis stage.

要 旨

本 研究에서는 非線型 構造의 設計敏感度 解析法을 非線型 有限要素 構造解析法에 對應하여 開發하고 이들을 數值例를 通하여 評價하였다. 非線型 構造解析法과 設計敏感度 解析法은 밀접한 關係를 가지므로, 시칸트剛度를 利用한 直接分解法 및 反復解法과 탄젠트剛度의 直接使用法을 誘導·提示하였다. 理論的 考察 및 數值例로부터, 構造解析 및 設計敏感度解析의 連繫過程에서 탄젠트剛度法의 效率性を 確認하였다.

1. 序 論

이제까지 有限要素解析法 및 數值的 最適化技法을 使用한 構造最適設計를 위하여 많은 研究努力이 기울여져 왔으나 주로 線型構造에 대한 最適設計過程의 開發에 치우쳐 있는 실정이다⁽¹⁻⁷⁾. 그러나 近來에 새로이 開發되는 非線型的 性質을 가진 構造材料의 使用과 極地나 海洋등과 같이 극심한 外的條件下에서 非線型的 舉動을 보이는 構造物에 대한 관심이 增大됨에 따라, 非

線型構造의 解析, 設計 및 이의 最適化의 必要性에 直面하게 되었다. 또한 最近에 刮目할 만 큼 발전된 非線型 有限要素 構造解析法⁽⁸⁻¹³⁾ 및 數值的 最適化프로그램^(6,19-26) 등의 可用性으로 인하여 非線型構造의 最適化 設計가 실제로 가능하게 되었으며 이를 위한 시스템의 開發研究가 활발히 進行되고 있다⁽²⁷⁾.

一般的인 非線型構造의 最適化過程에서는 非線型構造應答에 對한 設計敏感度解析이 必須段階이며 이에 관한 연구는 아직 그 初期段階를 벗어나지 못하고 있는 실정이므로⁽²⁸⁻³⁰⁾, 效率의 이 고도 一般的으로 應用 가능한 設計敏感度解析法이

* 正會員·釜山水產大學 助教授, 海洋工學科

開發되어야 한다. 効率的인 設計敏感度解析을 위해서는 構造解析過程 特히 有限要素解析에서 얻어지는 數値資料가 充分 再活用되어야 하며, 線型構造의 設計敏感度解析의 경우는 直接微分法(direct differentiation method; DDM)과 隨伴變數法(adjoint variable method; AVM) 등이 이 목적에 적합한 것으로 알려져 있다⁽³¹⁻³³⁾. 한편 非線型構造의 경우에는 構造解析過程에서 나타나는 有限要素方程式의 剛度行列이 荷重條件 및 變位狀態의 函數가 되므로, 設計敏感度解析이 構造解析方法과 한층 더 밀접한 關係를 가진다. 따라서 非線型有限要素 構造解析法에 對應하여 非線型 構造의 設計敏感度解析法을 誘導·開發하는 것은 매우 重要하다.

本 研究에서는 非線型構造의 最適設計過程에서 必須段階인 非線型 構造應答에 대한 設計敏感度 解析法을 構造解析方法에 對應하여 考察·開發하고 이들을 數値例를 통하여 評價함으로써 効率的이고 또 一貫性 있는 非線型構造의 設計敏感度 解析알고리즘을 考察·提示하고자 한다.

2. 非線型構造의 最適設計問題

本 研究의 對象 構造物은 靜荷重 또는 類似靜荷重의 作用下에서 非線型的 舉動을 하는 構造物이며, 非線型有限要素法을 構造解析에 使用하는 것으로 한다. 設計變數(design variable) b 는 要素의 幾何學的 形狀에 關係되는 k -次元 벡터로서 板形要素의 두께, 뼈대要素의 斷面등이다. 最適化의 目的函數(cost function) g_0 는 構造物의 重量 또는 特定部分의 應力이나 變位등 設計變數의 函數로서 表示 가능한 量이며, 設計制約條件(design constraint) $g_i, i=1, \dots, N$, 으로는 주로 節點變位 및 要素應力등의 構造應答에 대한 設計基準를 고려한다. 따라서 非線型構造의 最適設計問題를 定式化하면

$$\text{Minimize } g_0(b, U) \quad (1)$$

$$\text{Subject to } g_i(b, U) \leq 0, i=1, \dots, N \quad (2)$$

$$F(b, U) = 0. \quad (3)$$

여기서 U 는 有限要素系의 節點變位를 나타내는 n -次元 벡터로서, 構造全體의 有限要素系에 대한 狀態方程式(3)으로부터 얻어진다. 주어 진 설계변수값 b 에 대하여 狀態方程式(3)을 풀

어서 U 를 구하는 것이 構造解析段階이며, 이때 시칸트剛度法 또는 탄젠트剛度法등이 利用되어진다⁽⁴⁵⁻⁴⁷⁾. 線型構造의 경우에는 式(3)의 F 가 U 의 線型函數이지만 非線型構造에서는 非線型函數가 되므로 構造解析은 물론 設計敏感度解析에 복잡성을 더하게 된다. 또한 式(2)의 制約條件에는 構造應答에 대한 制約은 물론 設計變數의 上限 및 下限등을 포함할 수 있으므로 式(1)~(3)은 非線型構造에 대한 일반적 最適設計 定式化모델이라 할 수 있다.

3. 設計敏感度 解析過程

3.1 設計敏感度 方程式

構造應答解析이 끝난 후 設計最適化過程을 위해서 주된 課題를 이루는 것이 設計敏感度解析이다. 設計敏感度는 目的函數 또는 設計制約函數 $g_i, i=0, 1, \dots, N$, 등의 機能尺度函數(performance measure function)들이 設計變數에 따라 얼마나 敏感하게 變化하는가의 程度를 나타내는 것으로서 機能尺度函數의 設計變數에 대한 微分값으로 表示된다.

機能尺度函數를 一般的으로 g 라 표시하면 이는 設計變數 b 와 構造應答(여기서는 構造有限要素系의 節點變位) U 의 函數가 된다.

$$g = g(b, U(b)) \quad (4)$$

여기서 節點變位 U 는 狀態方程式(3)을 媒介函數로 하는 設計變數 b 의 內在函數(implicit function)이다. 따라서 機能尺度函數의 設計敏感度計算을 위하여 式(4)를 b 로 微分하면

$$dg/db = \partial g/\partial b + (\partial g/\partial U)(dU/db) \quad (5)$$

한편 式(4)는 b 와 U 에 관한 外延函數(explicit function)이므로 式(5)에서 偏微分 $\partial g/\partial b$ 와 $\partial g/\partial U$ 의 計算은 쉽게 수행되지만, dU/db 의 計算을 위해서는 媒介函數인 狀態方程式(3)을 b 로 微分해야 한다. 式(3)을 b 로 微分하여 整理하면 設計敏感度 解析過程에서 풀어야 할 다음의 聯立方程式이 얻어진다.

$$(\partial F/\partial U)(dU/db) = -\partial F/\partial b \quad (6)$$

3.2 直接微分法

直接微分法(DDM)에서는 式(6)으로부터 dU/db 를 計算하고 그 結果를 式(5)에 代入함으로써 設計敏感度 dg/db 를 구한다⁽³⁴⁾.

3.3 隨伴變數法

隨伴變數法(AVM)에서는 式(5)의 設計敏感度를 計算하기 위하여 隨伴變數벡터 C 를 導入한다. 即 式(6)의 양변에 轉置隨伴變數벡터 C^T 를 곱하여 整理하면⁽³³⁾

$$[(\partial F/\partial U)^T C]^T (dU/db) = -C^T (\partial F/\partial b) \quad (7)$$

여기서 C 는 다음 隨伴變數方程式(adjoint equation)의 解이다.

$$(\partial F/\partial U)^T C = (\partial g/\partial U)^T \quad (8)$$

따라서 式(8)의 解 C 가 구해지면 式(7)과 (8)을 式(5)에 代入하여 設計敏感度가 얻어진다.

$$dg/db = \partial g/\partial b - C^T (\partial F/\partial b) \quad (9)$$

3.4 各 方法의 比較

直接微分法과 隨伴變數法의 計算量을 比較하기 위해서 各 方法에서 풀어야 할 方程式의 數를 고려한다. 直接微分法에서는 式(6)을, 隨伴變數法에서는 式(8)을 풀어야 하므로 各式의 左邊 係數行列 $\partial F/\partial U$ 은 非線型 有限要素系의 탄젠트剛度行列로서 그 크기는 同一하다⁽¹⁶⁾. 그러나 非線型構造의 경우에는 線型構造와는 달리 $\partial F/\partial U$ 가 構造物에 作用하는 荷重條件의 函數가 되므로 荷重條件別로 係數行列이 計算되어야 한다. 荷重條件 l 에 대하여 式(6)의 右邊벡터의 數는 k (設計變數의 個數)이며 式(8)의 右邊벡터의 數는 N_l (荷重條件 l 에서 敏感度解析을 要하는 制約函數의 個數, $N_l \leq N$)이므로, $k < N_l$ 이면 直接微分法이 有利하고 $k > N_l$ 이면 隨伴變數法이 效果적이다. 그러나 大部分의 構造最適化 알고리즘에서는 活動制約條件(active constraints)에 대한 敏感度解結果를 利用하므로^(39, 34) $N_l \ll N$ 이 되고 따라서 $k > N_l$ 이 되는 경우가 많으므로 隨伴變數法의 計算量이 적어지는 것이 보통이다.

4. 構造解析法과 敏感度解析法

4.1 狀態方程式과 非線型解析方法

非線型 構造解析에서 사용되는 狀態方程式(3)의 一般的인 函數形態는⁽²⁸⁾

$$F(b, U) \equiv Q(b, U) - R(b) = 0 \quad (10)$$

여기서 R 은 外力벡터로서 設計變數의 函數이며 Q 는 內力벡터로서 設計變數 및 變位の 函數이

다.

시칸트 剛度 K' 를 使用하는 경우 式(10)의 Q 는 다음과 같이 쓸 수 있다⁽¹⁶⁾.

$$Q(b, U) = K'(b, U)U \quad (11)$$

또 탄젠트剛度 K' 를 使用하는 경우에는 式(10)을 線型化 級數展開하여 얻어지는 增分平衡式을 利用하여 變位增分 ΔU 를 計算한다^(16, 18).

$$K' \Delta U = P \quad (12)$$

여기서 P 는 計算된 變位에 對應하는 等價內力과 外力間의 不均衡力벡터이며, K' 는 다음式으로 주어진다.

$$K' = \partial F/\partial U = \partial Q/\partial U \quad (13)$$

式(11) 또는 (12)를 利用하여 式(10)의 狀態方程式(平衡方程式)을 만족하는 U 를 計算하는 것이 주어진 設計變數에 대한 非線型構造解析이다. 式(10)과 (11)을 利用하여 平衡變位 U 를 구하는 것이 全體平衡法(시칸트剛度法)이며, 式(12)를 利用하여 變位增분을 計算한 후 이들을 代數적으로 合하여 平衡變位를 구하는 것이 增分平衡法(탄젠트剛度法)이다. 두 方法에서 모두 一般的으로 反復解法이 使用되고 있으며, 特히 式(12)의 경우에는 K' 를 計算 또는 修正하는 方法에 따라 NR(Newton-Raphson)法 및 修正 NR法 그리고 BFGS(Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)法 및 이들의 組合解法이 널리 利用된다⁽¹⁴⁻¹⁸⁾. NR法에서는 每 反復回마다 既知의 變位로부터 K' 를 直接 計算하고 分解하며 BFGS法에서는 初期剛도로부터 逐次的으로 分解된 K' 를 修正해 나가기 때문에 全體計算量에서 BFGS法이 有利한 경우가 많다^(14, 15, 35, 36).

따라서 構造解析에서 式(10) 및 (11) 또는 式(12)를 使用하는 경우(NR 또는 BFGS法), 設計敏感度解析에서 可用한 資料의 形態가 相異하므로 이들을 效率적으로 活用할 수 있는 設計敏感度解析法이 考案되어야 한다.

4.2 設計敏感度 解析方法

式(10)을 式(6) 및 式(8)에 代入하면 DDM 및 AVIM에서 풀어야 할 方程式이 各各式(14) 및 (15)와 같이 얻어진다.

$$(\partial Q/\partial U)(dU/db) = \bar{R} \\ \equiv \partial(R(b) - Q(b, U))/\partial b \quad (14)$$

$$(\partial Q/\partial U)^T C = \bar{C} \equiv (\partial g/\partial U)^T \quad (15)$$

시칸트剛度法을 構造解析에 使用했을 경우 設計敏感度解析을 위한 式(14) 및 (15)의 係數行列은 式(11)을 微分하여 얻게된다.

$$\partial Q/\partial U = K' + \bar{K}' \equiv K' + (\partial K'/\partial U)U \quad (16)$$

따라서 構造解析過程에서 使用된 시칸트剛度 K' 와 敏感度解析에서 使用될 係數行列 $K' + \bar{K}'$ 가 相異하게된다. 그러므로 式(14) 또는 式(15)를 풀기 위해서는 $K' + \bar{K}'$ 를 直接分解(direct decomposition; DD)하거나 反復解法(iterative solution; IS)을 利用할 수 있다. 係數行列을 直接分解하는 경우 式(14) 및 (15)는 다음과 같이 變形된다.

直接微分—直接分解法(DDM-DD) :

$$[K' + \bar{K}'] (dU/db) = \bar{R} \quad (17)$$

隨伴變數—直接分解法(AVM-DD) :

$$[K' + \bar{K}']^T C = \bar{G} \quad (18)$$

한편 構造解析過程에서 이미 分解된 係數行列 K' 를 再活用하기 위해서는 反復解法을 利用하는 것이 有利하며 이때 式(14) 및 (15)는 다음과 같이 變形된다.

直接微分—反復解法(DDM-IS) :

$$[K^i] (dU/db)^{(i)} = \bar{R} - [\bar{K}^i] (dU/db)^{(i-1)}, \\ i=0, 1, \dots \quad (19)$$

隨伴變數—反復解法(AVM-IS) :

$$[K^i]^T C^{(i)} = \bar{G} - [\bar{K}^i]^T C^{(i-1)}, \\ i=0, 1, \dots \quad (20)$$

式(19) 및 (20)에서 괄호속의 上添字는 反復回數를 表示하며, 위의 반복은 解에 관한 어떤 收斂基準을 만족할 때까지 수행한다.

構造解析에서 탄젠트剛度法을 使用했을 경우 式(14) 및 (15)의 係數行列은 式(13)에 定義된 바와 같이 바로 탄젠트剛度行列 K' 이므로 構造解析의 結果를 敏感度解析에 直接 使用可能하다. 그러나 式(12)의 K' 는 構造解析에서 利用되는 方法에 따라 相異할 수 있으므로, NR 또는 BFGS法을 利用했을 경우 이에 對應하는 K'_{NR} 또는 K'_{BFGS} 를 設計敏感度解析에서도 再活用하게 된다. 따라서 式(14) 및 (15)를 構造解析에서 可用한 資料에 따라 變形하면 다음과 같다.

直接微分—NR法(DDM-NR) :

$$[K'_{NR}] (dU/db) = \bar{R} \quad (21)$$

直接微分—BFGS法(DDM-BFGS) :

$$[K'_{BFGS}] (dU/db) = \bar{R} \quad (22)$$

隨伴變數—NR法(AVM-NR) :

$$[K'_{NR}]^T C = \bar{G} \quad (23)$$

隨伴變數—BFGS法(AVM-BFGS) :

$$[K'_{BFGS}]^T C = \bar{G} \quad (24)$$

4.3 各方法의 考察

大部分의 非線型 有限要素解析프로그램⁽¹⁵⁾에서 使用되고 있는 시칸트剛度法과 탄젠트剛度法에 對應하는 設計敏感度 解析알고리즘으로 式(17)~(20) 및 式(21)~(24)를 誘導하였다. 一般의 으로 構造解析過程에서 얻어진 資料는 탄젠트剛度를 利用한 設計敏感度解析法(式(21)~(24))에서 더 效率의으로 再活用된다. 即 構造解析에서 使用된 K' 가 곧 設計敏感度解析을 위한 方程式의 係數行列이 되지만, K' 를 敏感度解析에 利用하려면 $K' + \bar{K}'$ 를 計算하여 分解하거나 反復解法을 使用해야 하기 때문이다.

시칸트剛度를 利用한 直接分解法과 反復解法에서 有限要素系의 總自由度數 n (即 設計敏感度方程式의 係數行列의 크기)이 대단히 크면 直接分解法의 計算量이 莫大해진다. 또 탄젠트剛度를 利用하는 NR法과 BFGS法에서 K'_{NR} 은 變位狀態로부터 直接 計算되지만 K'_{BFGS} 는 K' 의 近似修正値이므로 이것을 設計敏感度解析에 使用할 경우는 結果에 심각한 誤差를 초래할 수 있다.

4.4 構造解析結果의 利用

構造解析에서 얻어진 剛度行列, 節點變位 및 要素應力等은 強度 및 變位에 關聯된 制約條件의 點檢과 이들의 設計敏感度方程式에서 左邊係數行列 또는 右邊벡터의 計算에 直接 利用된다. 特히 式(7) 및 (14)의 右邊벡터의 計算에서 $\partial Q/\partial b$ 는 要素應力 및 要素剛度行列을 設計變數로 微分한 후 重疊함으로써 얻어지므로⁽³²⁻³⁴⁾, 非線型解析을 위한 定式化方法에 따라 다른 形態로 表現되는 應力 및 變形率概念을 利用한 計算法이 使用되어야 한다.

現在 非線型有限要素解析에 가장 널리 利用되는 形態는 第2 Piola-Kirchhoff 應力 및 Green 變形率을 利用하는 全體라그랑지법(total Lagrangian; TL)과 Cauchy 應力 및 Almansi 變形率

을 利用하는 改定라그랑지法(updated Lagrangian; UL)이며⁽¹⁴⁻¹⁶⁾, 이들의 結果를 利用한 敏感度方程式의 右邊벡터의 偏微分計算過程은 幾何學的 및 材料的 非線型등의 構造非線型性에 따라 달라진다⁽²⁹⁾. 即 幾何學的 非線型的 경우에는 第2 Piola-Kirchhoff 또는 Cauchy 應力의 偏微分이 쉽게 計算되지만 彈塑性, 크리이프, 粘塑性等과 같은 材料的 非線型問題에서는 應力의 設計變數에 對한 偏微分計算이 쉽지 않은 경우가 많다^(29,30). 한편 TL 및 UL 에서의 最終剛度行列은 同一하므로⁽¹⁶⁾ 이들은 4.2節에서 論議된 敏感度方程式의 係數行列로서 直接 使用된다.

5. 數值例

誘導·提示된 非線型構造의 設計敏感度解析法에 대한 有用性 및 效率性을 評價하기 위하여 그림 1 과 같은 3-部材 트러스를 解析하였다. 여기서 設計變數는 各 部材의 斷面積이다.

$$b = (b_1, b_2, b_3)^T \quad (25)$$

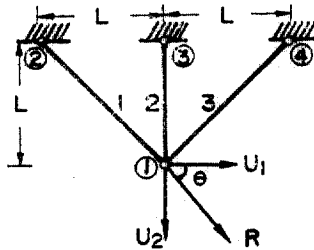


그림 1. 3部材 트러스

設計敏感度解析을 위한 機能尺度函數로서는 節點의 許容變位가 0.1in 인 制約函數를 利用하였다.

$$g_i = (U_i/0.1)^2 - 1.0, \quad i=1,2 \quad (26)$$

構造의 非線型性으로는 幾何學的 非線型的 경우(GN)와 幾何學的 및 材料的 非線型的 경우(GMN)를 고려한다. 解析에 使用된 非線型 變位-變形率 關係式과 應力-變形率 關係式은 다음과 같이 가定하였다.

$$\epsilon = \partial u / \partial x + 0.5(\partial v / \partial x)^2 \quad (27)$$

$$\sigma = c \sqrt{\epsilon} \quad (28)$$

入力數值로서 $L=10\text{in}$, $b=(2, 1, 4)^T\text{in}^2$, $R=200\text{kips}$, $\theta=60^\circ$, $c=6.0 \times 10^3\text{ksi}$ 를 使用하여 얻어진 變位는 構造解析方法에 관계없이 同一하였 으며 表 1 과 같다.

表 1. 構造解析 結果

成 分	GN (in)	GMN (in)
U_1	0.117588	0.108717
U_2	0.119104	0.114996

構造解析結果를 利用하여 式(26)의 設計敏感度 $S_{ij} \equiv (dg_i/db_j)$, $i=1,2$, $j=1,2,3$,를 각각의 設計敏感度解析法을 使用하여 구하였다. 그 結果는 表 2 와 같으며, 表에 보인바와 같이 BFGS의 경우를 제외하고는 모두 同一한 結果를 얻었다. 이는 K'_{BFGS} 의 誤差때문으로 생각된다. 한편 構造解析에서 BFGS法을 使用한 후 最終變位計算을 위한 反復回에서 NR法을 사용했을 때의 얻어진 變位는 表 1 과 같고 S_{ij} 는 表 2 의 (A) 경우와 同一하게 되었다. 또 反復解法의 경우(DDM-IS, AVM-IS) 解의 收斂基準을 相對誤差 10^{-7} 으로 하였을 때 總反復回數는 AVM-IS에서 5회, DDM-IS에서 6회로 나타났다.

6. 要約 및 結論

非線型構造의 最適設計過程에서 必須段階인 設

表 2. 設計敏感度 解析結果

非線型性	解 析 法	S_{11}	S_{12}	S_{13}	S_{21}	S_{22}	S_{23}
GN	(A)	-1.2195	-0.3228	0.0048	-0.9207	-0.9788	-0.0030
	(B)	-1.2206	-0.3296	0.0048	-0.9239	-0.9814	-0.0030
GMN	(A)	-1.0104	-0.2483	0.0045	-0.8416	-0.8108	-0.0222
	(B)	-1.0518	-0.2779	0.0038	-0.8857	-0.8376	-0.0227

(A)=DDM-DD, AVM-DD, DDM-IS, AVM-IS, DDM-NR, AVM-NR

(B)=DDM-BFGS, AVM-BFGS

計敏感度解析은 非線型有限要素 構造解析法과 밀접한 關係를 가진다. 따라서 本 研究에서는 各 構造解析法에서 可用한 資料를 充分히 再活用할 수 있는 設計敏感度解析法을 誘導·考案하고 數值例를 통하여 그 有用性を 確認·評價하였다.

非線型 變位와 관련된 機能尺度函數의 設計敏感度解析을 위하여, 시칸트剛度を 利用하는 直接分解法 및 反復解法과 탄젠트剛度を 利用하는 NR法 및 BFGS法을 直接微分法 및 隨伴變數法과 關聯시켜 開發하고 計算上의 特性을 考察하였다.

非線型構造의 解析過程에서 부수적으로 얻어지는 分解剛度行列(decomposed stiffness matrix)을 設計敏感度解析過程에 効率的으로 再活用하기 위해서는 시칸트剛度の 경우 反復解法이, 탄젠트剛度の 경우 NR法이 有用함을 確認하였다. 그러나 탄젠트剛度を 修正해 나가는 BFGS法의 構造解析上의 長點을 設計敏感度解析過程에서 살리기 위해서는, 構造解析過程에서 BFGS 反復計算이 끝난 후 附加的인 1회의 NR法을 수행함으로써 非線型變位の 收斂을 再確認할 수 있을 뿐만 아니라 安定된 設計敏感度解析도 可能함을 알 수 있었다.

한편 非線型構造의 경우에도 設計敏感度解析에 直接微分法과 隨伴變數法의 適用이 可能하며 每 荷重條件마다 設計敏感度解析에 必要한 計算量을 比較하여 選擇的으로 使用할 수 있게 되었다.

謝 辭

이 研究는 1986년도(後半期) 韓國科學財團의 研究費 支援에 의해 수행되었다.

參 考 文 獻

1. Arora, J.S. and Govil, A.K., "An Efficient Method for Optimal Structural Design by Substructuring", *Comput. & Struct.*, Vol. 7, 1977, pp. 507~515.
2. Belegundu, A.D. and Arora, J.S., "Optimal Structural Design Using General Beam Finite Elements", TR68, Division of Materials Engi-

- neering, College of Engineering, The Univ. of Iowa, 1980.
3. Haftka, R.T. and Prasad, B., "Optimum Structural Design with Plate Bending Elements, A Survey", *AIAA J.*, Vol. 19, 1981, pp. 517~521.
4. Pappas, M., "Improved Methods for Large Scale Structural Synthesis", *AIAA J.*, Vol. 19, 1981, pp. 1227~1233.
5. Nguyen, D. T. and Arora, J.S., "Fail-Safe Optimal Design of Complex Structures with Substructures and Composite Materials", TR. CAD-SS-82.3, Division of Materials Engineering, College of Engineering, The Univ. of Iowa, 1982.
6. Vanderplaats, G.N. "Structural Optimization-Past, Present, and Future", *AIAA J.*, Vol. 20, 1982, pp. 992~1000.
7. Arora, J.S. and Ryu, Y.S., "A User's Manual for the Computer Program DOCS", Level 2.5, TR CAD-SS-82.1, Design Optimization Laboratory, College of Engineering, The Univ. of Iowa, 1983.
8. Nguyen, D.T., Arora, J.S. and Belegundu, A.D., "Design Optimization Codes for Structures: DOCS Computer Program", *J. Aircraft*, Vol. 20, 1983, pp. 817~824.
9. Stricklin, J.A. and Haisler, W.E., "Formulations and Solution Procedures for Nonlinear Structural Analysis", *Comput. & Struct.*, Vol. 7, 1977, pp. 125~136.
10. Mondkar, D.P. and Powell, G.H., "Evaluation of Solution Schemes for Nonlinear Structures", *Comput. & Struct.*, Vol. 9, 1978, pp. 223~236.
11. Chang, T.Y. and Padavon, J., "General Purpose Nonlinear Finite Element Programs", *Struct Mech. Software Ser.*, Vol. 3, 1980, pp. 79~99.
12. Dodds, R.H. and Lopez, L.A., "Substructuring in Linear and Nonlinear Analysis", *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 15, 1980, pp. 583~597.
13. Webster, R.L., "On the Static Analysis of Structures with Strong Geometric Nonlinearity", *Comput. & Struct.*, Vol. 11, 1980, pp. 137~145.
14. ADINA: A Finite Element Program for Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis,

- Report No. AE81-1, ADINA Engineering, September, 1980.
15. Noor, A.K., "Survey of Computer Programs for Solution of Nonlinear Structural and Solid Mechanics Problems", *Comput. & Struct.*, Vol. 13, 1981, pp. 425~465.
 16. Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1982.
 17. Ryu, Y.S. and Arora, J.S., "Review of Nonlinear FE Methods with Substructures", *J. of EM, ASCE*, Vol. 111, No. 11, 1985, pp. 1361~1379.
 18. Ryu, Y.S., "A Combined Algorithm for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations", (in Korean), *Proc. of KSCE*, Vol. 6, No. 3, 1986, pp. 11~20.
 19. Pshenichny, B.M., "Algorithms for the General Problem of Mathematical Programming", *Kibernetika*, No. 5, 1978.
 20. Gabriele, G.A. and Ragsdell, K.M., "Large Scale Nonlinear Programming Using the Generalized Reduced Gradient Method", *J. of Mech. Design, ASME*, Vol. 102, No. 3, 1980, pp. 566~573.
 21. Vanderplaats, G.N., Sugimoto, H. and Sprague, C.M., "ADS-1: A New General Purpose Optimization Program", *Proc. of the 24th AIAA/ASME/AHS Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Lake Tahoe, Nevada, 1983.
 22. Atrek, E., Gallagher, R.H., Ragsdell, K.M., and Zienkiewicz, O.C., Eds., *New Directions in Optimum Structural Design*, Proc. of Int. Symposium on Optimum Structural Design, Univ. of Arizona, Tuscon, Arizona, 1981, John Wiley and Sons, New York, NY, 1984.
 23. Vanderplaats, G.N., "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: With Applications", McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1984.
 24. Arora, J.S., "An Algorithm for Optimum Structural Design without Line Search", Chapter 20 in *New Directions in Optimum Structural Design*, E. Atrek et al. Eds., John Wiley and Sons, NY, 1984.
 25. Thanedar, P.B., Park, G.J., Arora, J.S., "Performance of Two Superlinearly Convergent RQP Optimization Algorithms on Some Structural Design Problems", TR No. ODL-85-12, Optimal Design Laboratory, College of Engineering, The Univ. of Iowa, 1985.
 26. Arora, J.S., Thanedar, P.B., and Tseng, C.H., "User's Manual for IDESING", Version 3.5, TR No. ODL-86.6, Optimal Design Laboratory, College of Engineering, The Univ. of Iowa, 1986.
 27. Ryu, Y.S. and Yu, C.S., "Modular Design of FEM-Based Nonlinear Structural Optimization System", *Proc. of the US Korea Joint Seminar/Workshop on CRITICAL ENGINEERING SYSTEM* (Choi, C.K. and A. H-S. Ang eds.), Seoul, Korea, Vol. 1, 1987, pp. 118~125.
 28. Ryu, Y.S., "A Study of Nonlinear Structural and Design Sensitivity Analysis Methods", Ph. D Thesis, The Univ. of Iowa, 1984.
 29. Ryu, Y.S., Haririan, M., Wu, C.C. and Arora, J.S., "Structural Design Sensitivity Analysis of Nonlinear Response", *Comput. & Struct.*, Vol. 21, 1985, pp. 245~255.
 30. Haririan, M. and Arora, J.S., "Optimization of Nonlinear Structural Response with the Computer Program ADINA", TR No. OLD-86.7, Optimal Design Laboratory, College of Engineering, The Univ. of Iowa, 1986.
 31. Arora, J.S. and Govil, A.K., "Design Sensitivity Analysis with Substructuring", *J. of EM, ASCE*, Vol. 103, 1977, pp. 537~548.
 32. Arora, J.S. and Haug, E.J., "Methods of Design Sensitivity Analysis in Structural Optimization", *AIAA J.*, Vol. 17, 1979, pp. 970~974.
 33. Haug, E.J., Choi, K.K. and Komkov, V., *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, New York, 1984.
 34. Haug, E.J. and Arora, J.S., *Applied Optimal Design*, John Wiley and Sons, New York, 1979.
 35. Ryu, Y.S. and Yoon, G.S., "A Modified BFGS Method with Substructuring for the Nonlinear Structural Analysis", *J. of SNAK*, Vol. 23, No. 3, 1986, pp. 39~44.

36. Ryu, Y.S. and Yoon, G.S., "Comparison of NR and BFGS Methods for the Nonlinear Structural FE Equations", *Bull. Nat. Fish. Univ. Pusan*,

Vol. 26, No. 2, 1986, pp. 15~21.

(接受: 1987. 7. 9)