

等媒介 變數要素를 이용한 쉘의 線形 및 非線形 安定解析

Linear and Nonlinear Stability Analysis of Shells Using
Degenerated Isoparametric Elements.

李 南 浩*
Lee, Nam Ho
崔 暢 根**
Choi, Chang Koan

Abstract

The paper describes the analysis of large displacement problems including instability phenomena. The element used in this is a degenerated isoparametric shell element with eight nodes.

Total Lagrangian formulation has been adopted in this study using Newton-Raphson iteration method with incremental load.

The linear stability analyses performed usually for the initial position can be repeated at several advanced fundamental states on the non-linear buckling path. Thus a current estimate of the failure load is given.

The numerical examples of a cylindrical panel under uniform load, simply supported plate under axial load, and clamped plate under uniform load are carried out. The examples applying degenerated isoparametric elements to bifurcation buckling and nonlinear collapse problems are also performed.

要 旨

本 研究는 不安定 現象을 포함한 大變位를 고려한 解析에 8節點 等媒介 變數要素를 적용하여 그 要素의 우수성을 증명하고 있다. 여기서 채택하고 있는 非線形 公式은 Total Lagrangian 公式이며, 解析방법은 荷重增分을 병행한 Newton-Raphson 방법을 이용했다.

安定解析을 수행할 경우 非線形 經路를 따라 반복함으로써 최종 파괴하중을 매 순간 측정할 수 있도록 프로그램을 작성했다.

檢證을 위해 等分布 荷重을 받는 圓筒形殼, 軸하중을 받는 單純支持형 평판, 그리고 等分布 荷重을 받는 고정된 평판 등과 같은 예제를 수행하여 理論解 및 다른 結果들과 비교 분석했다.

* 正會員 · 韓國電力技術株式會社

** 正會員 · 韓國科學技術院 教授

1. 序 論

쉘의 좌굴은 構造力學에서 가장 복잡한 現象

중의 하나이다. 그러므로 얇은 셸로 구성된 구조물은 그 物理的 현상을 이해해야 效率의이면서 信賴할 만한 設計를 할 수 있으며 예상치 못한 파괴를 막을 수 있다.

構造物의 극한하중과 극한하중에서의 變形 형태는 주로 非線形의인 舉動에 의해 지배를 받는다. 특히 구조물의 安定性이 중요한 原子爐나 高壓容器의 設計時 非線形 解析을 통한 좌굴하중의 예측이 필요하다.

셸과 같은 구조물의 좌굴을 포함한 幾何學的 非線形문제에 대한 研究는 여러학자들에 의해 遂行되어 왔다. 等方性 材料에 대한 좌굴해석은 Navaratna⁽¹⁾ 등이 軸대칭인 셸의 線形的 좌굴에 대하여 研究하였고, Sobel⁽²⁾은 원통셸에 軸 하중과 圓周방향의 壓力荷重이 함께 작용할 때 境界조건이 좌굴에 미치는 영향을 研究하였으며, Prabhu⁽³⁾ 등은 風荷重을 받는 Cantilever형 圓筒셸의 安定해석을 이론적 방법과 실험을 통하여 수행했다. 또한 셸의 不安定 문제에 대한 有限要素法의 적용에 대해 Gallagher⁽⁴⁾, Horrigmoie⁽⁵⁾ 등이 광범위하게 論하고 있으며, Surana⁽⁶⁾, Oliver⁽⁷⁾ 등은 非線形公式 誘導과정을 각각 설명하고 있다. 또한 Brendel과 Ramm⁽⁸⁾은 有限要素法을 이용하여 圓筒形셸에 대한 非線形的 좌굴하중을 계산했으며, Yang과 Sunil Saigal⁽⁹⁾은 材質의 非線形效果도 함께 考慮한 해석을 시도했다.

本 論文은 線形解析에서 效果的으로 사용된 8 節點 等媒介 平板 및 셸要素를 非線形 해석에 적용하고, 또한 線形 固有值 解析을 遂行하여 理論解 및 다른 結果들과 비교하고자 한다.

2. 좌굴에 대한 理論的 背景

일반적으로 셸구조물에 있어서 膜 強性은 굽힘 強性에 비해 훨씬 크다. 따라서, 얇은 셸로 구성된 구조물은 작은 變位에 의해서도 많은 膜 變形에너지가 흡수될 수 있다. 좌굴현상은 이 膜 變形에너지가 굽힘 變形에너지로 변하면서 구조물이 安定을 잃은 현상이다. 일반적으로 膜 變形에너지가 굽힘 變形에너지로 轉換되기 위해서는 大變形이 수반되어야 한다. 만약 좌굴이 일어나기 前(prebuckling)까지 상당히 많은 양의 굽힘 變形에너지가 구조물에 흡수되어 있다면

좌굴이 일어나기 前까지의 變位를 非線形的이라고 假定하여야 한다⁽¹⁰⁾.

완전한 構造物의 靜的 解析에서의 좌굴 현상은 荷重과 變位 關係曲線의 극대점에서의 붕괴와 bifurcation 좌굴로 나눌 수 있으며 그림 1을 통하여 설명된다. 즉, 軸대칭 變位가 발생할 경우는 基本 經路 OAC를 따르지만 初期파괴는 非軸대칭 變位가 급속히 증대되는 것이 특징이므로 基本經路 OAC를 따르지 않고 다른 經路를 택하게 된다(예컨대 OBD). 따라서 이러한 경우는 완전한 셸 構造物(perfect shell structure)의 붕괴하중(collapse load) λ_L 보다 bifurcation point λ_C 가 工學的인 면에서 더 중요하다.

가해진 하중이 점점 증가하여 λ_C 에 도달되면 經路 BD와 BAC 중 어느 하나의 經路를 따르는 데 이상적인 경우를 제외하고 대부분은 經路 BD를 따르며, 非軸대칭 變位가 급격히 증가하면서 더 이상의 하중을 지탱할 수 없게 된다. 이 하중이 좌절하중이며, 점 B에서의 같이 2개의 平衡方程式이 존재할 때가 構造物의 安定性이 증립인 상태이고, 그 이상의 하중에서는 BAC를 따라가더라도 外部에서 약간의 교란을 주면 갑자기 經路를 바꾸면서 구조물에 급격한 變位가 일어나는 불안한 상태로 설명된다. 만일 軸力, 혹은 膜應力이 굽힘변형에 의해 영향을 받지 않는다면 線形 安定解析만 遂行하지만 그렇지 않은 경우에는 非線形 解析을 필요로 한다. 보다 상세한 해석 알고리즘의 전개는 참고문헌 16에 설명되어 있다.

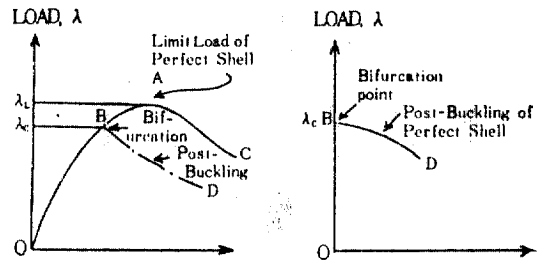


그림 1. 荷重에 따른 變位

3. 非線形 公式

3.1 概念

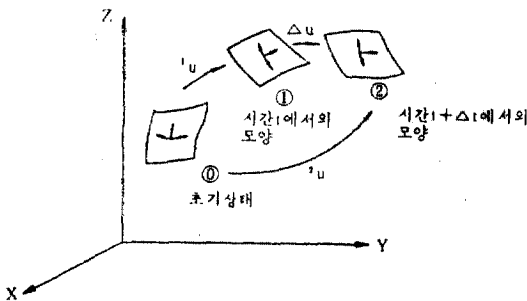
일반적으로 非線形效果는 幾何學的인 것과 材質的인 것으로 나누는데, 前者는 變位가 너무 커서 小變形 理論(small deflection theory)을 더 이상 적용할 수 없음을 의미하며, 後者는 材質의 舉動이 더 이상 彈性 領域에 있지 않음을 의미한다.

얇은 쉘의 幾何學的 非線形을 고려하는 本論文에서는 變形은 크고 變形度는 작은 경우를 고려하는 連續體力學에 바탕을 두고 있다.

3.2 幾何學的인 非線形 公式

幾何學的인 非線形效果는 應力과 變形度의 기준좌표에 대한 표현관계와 2次項의 考慮에 의한 非線形效果로서 기준좌표의 선택에 따라 2가지로 나누어 진다. 즉, 初期모양을 기준으로 하는 total lagrangian 수식과 増分이 시작할 때의 모양을 기준으로 하는 updated lagrangian 수식으로 구분된다. 本論文에서는 total lagrangian 수식을 선택하였다.

고정된 직교좌표계에서 連續體의 세 위치는 變形되지 않은 초기상태와 増分前後를 표현한 ①, ②로 나타낼 수 있다(그림 2 참조). 物理的, 幾何學的 變數들을 표현하는 왼쪽 上端添字는 측정된 상태의 순간을 나타내는데 대응하는 増分變數들에 대해서는 생략했다.



기 준 상 태		
Total Lagrange (T.L.)		0
Updated Lagrange (U.L.)		1

그림 2. 쉘 요소의 변형과정

상태②에 대한 平衡方程式은 假想變位의 정리에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$-\int_{0V} s_{ij} \delta^2 \varepsilon_{ij} dv + \int_0^2 t_i^* \delta u_i da + \int_{0V} f_i^* u_i dv = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$${}^2\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^2u_{i,j} + {}^2u_{j,i} + {}^2u_{k,i} \cdot {}^2u_{k,j}) \quad \dots\dots(2)$$

$${}^2u_i = {}^1u_i + u_i \quad \dots\dots\dots(3)$$

$${}^2s_{ij} = {}^1s_{ij} + s_{ij} \quad \dots\dots\dots(4)$$

$${}^2\varepsilon_{ij} = {}^1\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\text{where } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + {}^1u_{k,i} \cdot u_{k,j} + {}^1u_{k,j} \cdot u_{k,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad \dots\dots(6)$$

$$s_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\int_{0V} C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} dv \left. \vphantom{\int_{0V} C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} dv} \right\} + \int_{0V} {}^1s_{ij} \delta \eta_{ij} dv = {}^2W_{ext} - \int_{0V} {}^1s_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv \quad \dots\dots\dots(8)$$

${}^2s_{ij}$ 는 2^{nd} kirchhoff-piola stress tensor, ${}^2t_i^*$ 와 ${}^2f_i^*$ 는 각각 表面力과 體積力이며, ${}^2\varepsilon_{ij}$ 는 방정식(2)에서 變位를 微分한 ${}^2u_{ij}$ 에 의해 假定된 green lagrangian strain tensor 이다. 0A 와 0V 는 각각 初期狀態에서의 面積과 體積을 의미하고, δu_i 는 ${}^{t+\Delta t} \Delta u_i$ 에 대한 變分을 취한 것이다.

増分에 대한 (3)~(6)식들을 식 (1)에 대입하여 식(8)과 같이 정리할 수 있으며, 또한 有限要素法을 이용하여 行列형태로 표현한다면 다음과 같다.

$$\frac{([{}^0K_e] + [{}^1K_u] + [{}^1K_r])}{[{}^1K_T]} \{u\} = [{}^2R] - [{}^1F] \quad \dots\dots\dots(9)$$

여기서, 왼쪽 上端添字는 그림 2의 각각의 狀態를 표현하며, $\{u\}$ 는 節點變位, $\{R\}$ 은 相應節點力에 의한 外部力, $\{F\}$ 는 內部應力에 의해 발생하는 內力이며, $[{}^1K_e]$, $[{}^1K_u]$, $[{}^1K_r]$ 는 각각 線形彈性剛性行列, 大變位에 의해 발생하는 剛性行列, 內部應力에 의해 발생하는 剛性行列이다.

3.3 安定조건

그림 2에서 위치①은 內力과 外力이 一致된 상태이지만 微小한 하중이 微小한 하중이 増分된 상태②는 安定문제에 대한 Euler method에 따르면 隣接된 平衡狀態(adjacent equilibrium)로 불안한 상태이다. 이러한 경우 外部에서 微小한 하중변화를 가하여도 無限變位가 발생하게

되는데, 이 상태가 좌굴 상태이며 tangent stiffness 行列이 singular일 때이다. 즉, 임의의 상태 m 에 대해 다음과 같이 표현된다.

$$\det[{}^m K_T] = 0 \dots\dots\dots(10)$$

固有값 해석을 위한 방법으로는 일반적으로 2가지가 提案되고 있는데 가장 보편적으로 사용되고 있는 형태는 다음 식과 같다⁽⁸⁾.

$$\det([{}^0 K_s] + [{}^m K_u] + {}^m \lambda [{}^m K_g]) = 0 \quad (11)$$

선형고유값 공식(11)은 bifurcation 혹은 극한점에 도달하기 전까지의 변위가 비선형적일 경우에도 적용될 수 있다. 좌굴이 일어나기 전까지 상당히 많은 양의 굽힘변형 에너지가 포함되어 있는 경우 비선형 해석을 어느정도 수행한 후 고유값 해석을 통해 구한 가장 낮은 고유값(${}^m \lambda$)은 초기 선형 고유값(λ)보다는 다소 만족스러운 극한값(좌굴하중)을 산출할 것이다.

4. 平板 및 셸 요소

4.1 要素의 幾何學的인 표현

셸 요소의 典型的인 幾何學的 形狀은 그림 3에 나타나 있다⁽¹³⁾. 이 요소의 形狀은 中立面에서의 節點좌표, 垂直벡터, 曲線形좌표계 (ξ, η, ζ) 로 정의된 形狀 함수로 정의되며, 節點당 5개의 자유도를 갖는다.

시간 t 일 때의 셸의 임의점에서의 전체좌표는 다음과 같다. ⁽¹¹⁾

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \\ z_i(t) \end{Bmatrix} + \frac{\zeta}{2} \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) t_i \bar{V}_{3i}(t) \dots\dots(12)$$

임의점에서의 變位成分과 變位增分成分도 節點變位 $(u_i, v_i, w_i, \alpha_i, \beta_i)$ 들을 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \frac{\zeta}{2} \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) t_i (\bar{V}_{3i}(t) - \bar{V}_{3i}(0)) \dots\dots(13)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta w_i \end{Bmatrix} + \frac{\zeta}{2} \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) t_i (\bar{V}_{1i}(t) \alpha_i + \bar{V}_{2i}(t) \beta_i) \dots\dots(14)$$

여기서 $\bar{V}_{3i}, \bar{V}_{2i}, \bar{V}_{1i}$ 는 全體좌표계의 節點變位를 局部좌표계로 轉換시킬 때 사용되는 單位벡터들이다.

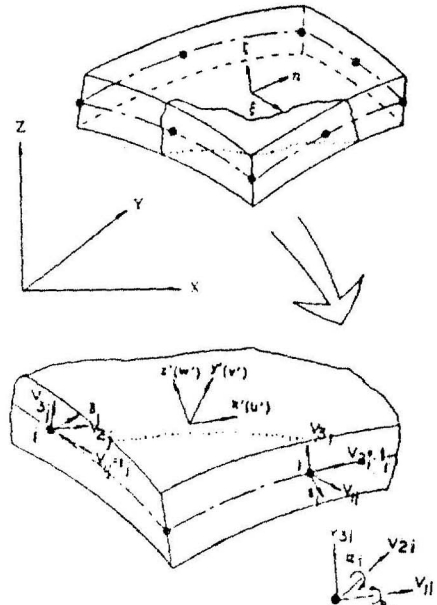


그림 3. 시간 t 에서의 셸요소 형상

4.2 變形度—變位關係

局部좌표계에서 面에 垂直한 變形度を 무시하고 幾何學的 變形을 나타내는 2次項을 고려하여 變形度成分을 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \epsilon' \end{Bmatrix} = \gamma_{x'y'} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} \right)^2 \right) \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u'}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial y'} \right)^2 \right) \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} T_{x'x'} \\ T_{y'x'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ + \frac{\partial v'}{\partial x'} \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ + \frac{\partial v'}{\partial y'} \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \frac{\partial w'}{\partial x'} \end{pmatrix}$$

$$= \{\epsilon^0\} + \{\epsilon L'\} \dots\dots\dots(15)$$

또한 각각의 項들을 變換行列을 이용하면 다음과 같이 誘導된다.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{pmatrix} = \{\theta\}^T [J]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \{\theta\}$$

$$= \{\phi\} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \{\theta\}$$

$$= \{\phi\} [\{s_1\} \{s_2\} \{s_3\}] \{\theta\} \dots\dots\dots(16)$$

여기서 $\{s_1\}$ 은 다음과 같으며, $\{s_2\}$, $\{s_3\}$ 도 유사하게 표현된다.

$$\{s_1\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ 0 \end{pmatrix} u_i + t_i/2 \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ N_i \end{pmatrix}$$

$$[V_{iix'} \ V_{iix'}] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(17)$$

따라서, 다음과 같이 간략하게 표현할 수 있다.

$$\{\mu\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} & \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} & \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{pmatrix}^T$$

$$= [G] \{\Delta\} = [G'] \{\Delta'\} \dots\dots\dots(18)$$

$$\{\Delta\} = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_8\}, \{\Delta_i\} = \{u_i, v_i, w_i, \alpha_i, \beta_i\}$$

$$\{\Delta'\} = \{\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_8\}, \{\Delta'_i\} = \{u_i', v_i', w_i', \alpha_i, \beta_i\}$$

지금까지 誘導된 行列과 벡터들을 이용해서 平衡方程式(9)를 표현하면 다음과 같다.

$$\int_{0_V} [B']^T [C'] [B'] dv \delta \{\Delta'\}$$

$$+ \int_{0_V} [G'] [S'] [G'] dv \delta \{\Delta'\} = \{R(t + \Delta t)\}$$

$$- \int_{0_V} [B']^T \{S'\} dv \dots\dots\dots(19)$$

5. 荷重벡터

外部일 2R 은 3.2 公式(1)에서 다음과 같이 표현했다.

얇은 쉘일 경우 體積力을 무시하면 節點相應力에 의한 外部일은 다음과 같다.

$${}^2R = R_1 + R_2 = - \int_{0_A} {}^2t_i^* u_i dA - \int_{0_V} {}^2f_i^* u_i dV \dots\dots\dots(20)$$

$${}^2R = \int_{0_A} \vec{P} \cdot \delta \vec{u} dA = - \int_{0_A} \delta \{\vec{U}\} \{P\} dA$$

$$= - \{\Delta'\}^T \{F_p\} \dots\dots\dots(21)$$

$$\{F_p\} = \{F_{p1}, F_{p2}, \dots, F_{p8}\}$$

$$\{F_{p1}\} = \{F_{x1}, F_{y1}, F_{z1}, M_{\alpha1}, M_{\beta1}\}$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P \{\vec{N}_i\} \{\vec{s} \times \vec{l}\} d\xi d\eta$$

6. 數值解 및 結果分析

앞에서 설명한 algorithm에 의한 프로그램의 解析 流動圖는 그림 4와 같으며, 프로그램 檢

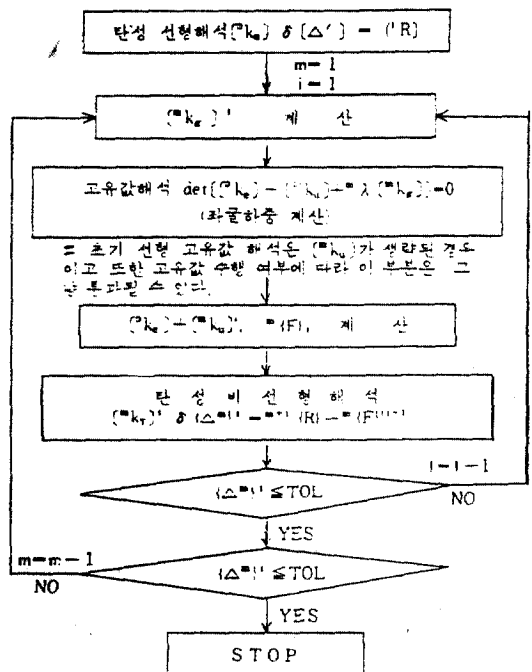


그림 4. 흐름도

證을 위해 다음과 같은 例題를 수행했다. 예제 1, 2는 선형안정해석의 경우로서 초기 선형고유치 공식을 적용하여 각각의 좌굴 하중 및 좌굴 모우드를 구해 이론해 및 다른 요소를 이용한 결과들과 비교했으며, 예제 3, 4는 비선형 안정해석의 경우로서 $[K_u]$, $[K_g]$ 를 고려하여 Standard Newton-Raphson Teration 및 load incremental method 를 병행한 해석을 수행하여 다른 요소를 이용한 결과들과 비교하였다. 물론 예제 1, 2의 경우는 비선형해석을 단계적으로 수행하면서 선형고유값 공식을 적용하여 보다 만족스러운 좌굴하중을 산출할 수 있지만 본 예제 1, 2는 초기 선형 고유값 해석만으로도 이론해와 잘 일치하므로 단계적으로 반복 수행하지 않았다. 그리고 提案된 모든 例題는 材質을 等方性 彈性體로 假定했고 境界 조건은 局部좌굴계에서 정의했다.

6.1 한 방향으로 平面內 壓力荷重을 받는 單純支持 下의 正方形板

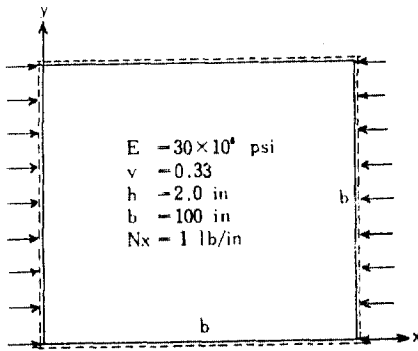


그림 5. 단순지지하의 정방형판

이 平板의 좌굴하중에 대한 嚴密解는 88606lb/in 이며, 理論的 좌굴 모우드는 half-wave 이다. (12)

그림 4의 흐름도에 따라 작성된 프로그램은 <표 1>

요소 분할 수	4 개	16 개	25 개
좌굴 값 (감차적분)	80910.0 lb/in	85950.0 lb/in	86450.0 lb/in
좌굴 값 (정상적분)	26530.0 lb/in	91530.0 lb/in	89480.0 lb/in

로 解析한 경우 표 1이나 그림 6과 같으며, 또한 비교를 위해 SAP6로 해석을 수행했다.

비교 : 64개 요소로 분할한 경우의 SAP6에 의한 해는 90840lb/in 임

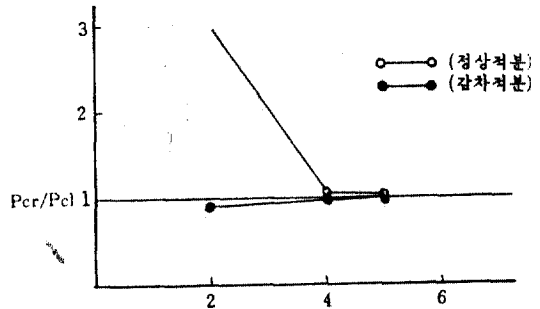


그림 6. 각변의 요소망 분할수

6.2 等分布 外壓을 받는 圓筒形 셸

이 構造物은 r/h이 2095 인 극히 얇은 셸 構造物이며, 양면 끝단은 單純支持, 즉, 境界條件이 $\alpha=\beta=v=w=0$ 이다.

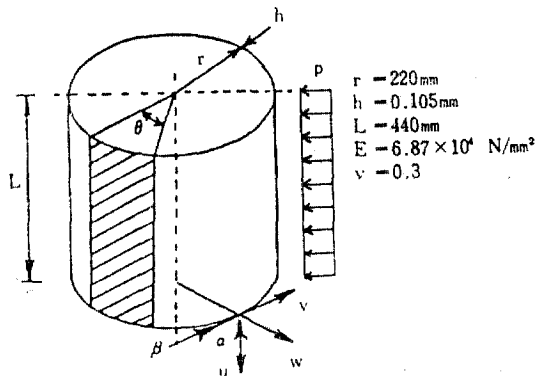


그림 7. 등분포 외압을 받는 원통형셸

理論的인 좌굴압력은 다음과 같다(13).

$$P_{cl} = \frac{0.918E(h/l)^2}{l/r \sqrt{(r/h)} - 0.657} = 15.81 \times 10^{-5} \text{ N/mm} \dots\dots\dots(22)$$

$$0.5 \leq l/r \leq 10; \nu = 0.3$$

理論的 좌굴 모우드는 軸방향으로 하나의 half-wave, 圓周방향으로 m개의 wave 들로 나타난다.

$$m = 2.742 \sqrt{(r^3/l^2h)} = 13.11 \approx 13; \nu = 0.3$$

有限要素 模型을 좌굴 모우드의 대칭성과 局

部좌표계의 특성을 이용하여 원통셀의 일부만을 설정한다. 산출된 결과는 표 2와 같으며, 본 연구에서는 軸방향으로 6等分, 圓周방향으로 4等分 할 경우 理論的인 解와 0.1% 이하의 誤差만이 발생했다. 또한 數值解에 의한 좌굴 모드도 (half-wave에 해당하는 부분의 각도를 측정하던 약 14°로써 理論的인 mode의 wave 수와 비교할 때) 一致했다.

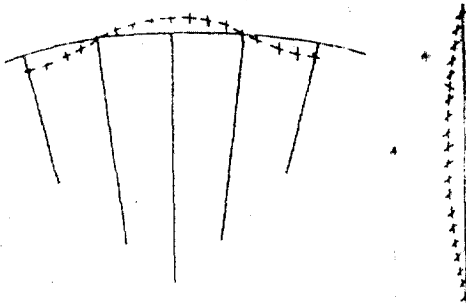


그림 8-1. 높이 L/2되는 지점의 원주방향을 따른 좌굴모우드

그림 8-2. 축방향을 따른 좌굴모우드

표 2.

요소 수 / half-wave	6	6	6	7	12	4
길이 방향 요소 수	1	2	4	4	1	6
좌굴 값 (감차적분) *10 ⁻³	0.2822	0.1204	0.2012	0.2114	0.2179	0.1582
좌굴 값 (정상적분) *10 ⁻²	0.6347	0.3237			0.4246	

6.3 等分布壓을 받는 固定된 正方形板

平板중심의 처짐을 等分布壓의 増分에 따라 그림 9.2에 plotting 하였다⁽¹⁴⁾.

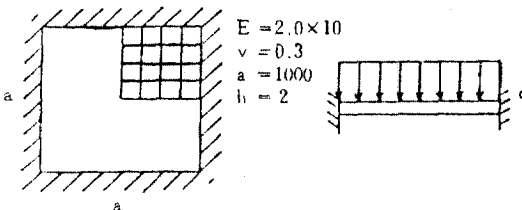


그림 9-1. 등분포압을 받는 정방형판

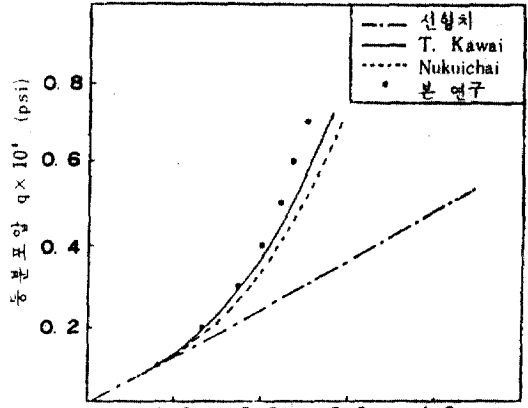


그림 9-2. 평균 중심의 처짐 W^1 (inch)

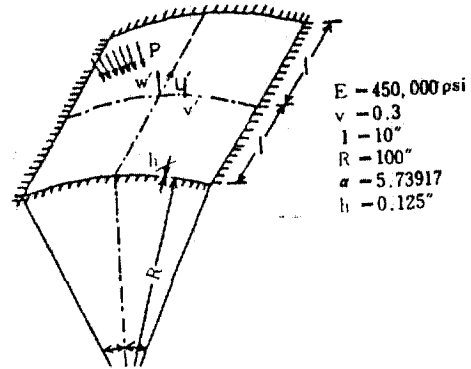


그림 10-1. 면에 수직인 등분포압을 받는 고정된 원통형셀

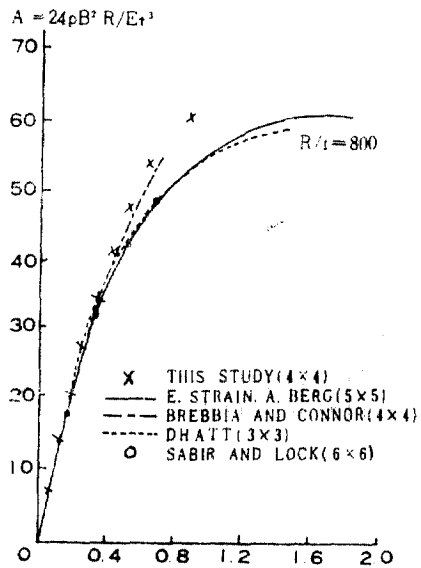


그림 10-2.

6.4 面に 垂直한 等分布壓을 받는 固定된 圓筒形 셸 이 例題는 圓筒形 셸의 1/4 을 16 개 要素로 분할했다. 境界條件은 固定狀態, 즉, $u=v=w=\alpha=\beta=0$ 이며, 하중상태는 面に 垂直한 방향으로 等分布壓을 작용시켰다.

7. 結 論

本 論文에서 研究된 內容의 結論은 다음과 같다.

1) 線形 安定解析을 했을 때, 8 節點 等媒介變數要素를 사용할 경우 다른 flat plate 要素를 사용한 경우보다 월등히 우수한 結果를 산출했다.

2) 8 節點 等媒介變數要素는 非線形 解析에서 도 일반적으로 좋은 結果를 산출했다.

3) 節點變位를 局部좌표계로 變換시키므로 해서 圓筒셸의 모델링이 간편하며, 또한 전산기 사용시간도 줄일 수 있다.

4) 非線形 安定解析은 상당한 계산 時間이 所 要되므로 이를 해결하기 위한 타당한 理論을 얻기 위해서 많은 parametric 研究가 필요하다.

參 考 文 獻

1. D.R. Navratna, T.H. Pian, and E.A. Winter, "Stability Analysis of Revolution by the Finite Element Method," *AIAA J.* Vol. 6, pp. 335~360, 1968.
2. L.H. Sobel, "Effects of Boundary conditions of the Stability of Cylinders subject to Lateral and Axial pressure," *AIAA J.* Vol. 2, pp. 1437~1440, 1964.
3. S.K. Prabhu, S. Gopalacharyulu, and D.J. Johns, "Stability of cantilever shells under wind loads," *Proc. ASCE, J. Engng, Mech. Div.* EM5, 101, pp. 517~530, 1975.
4. R.H. Gallagher, "Finite element representations for thin shell instability analysis," IUTAM Symposium, Cambridge, Massachusetts, 1974.
5. G. Horrigmoe, "Finite element instability

- analysis of free form shells," Div. Struct. Mech. The Norwegian Institute of Technology, Trondheim, Rep. No. 77-2, 1977.*
6. KARAN S. Surana, "Geometrically Nonlinear Formulation for the Curved Shell Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, pp. 581~615, 1983.
7. J. Oliver, E. Onate, "A Total Lagrangian Formulation for the Geometrical Nonlinear Analysis of Structures Using Finite Elements," *International for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, pp. 2253~2281, 1984.
8. B. Brendel, E. Ramm, "Linear and Nonlinear Stability Analysis, of Cylindrical Shells," *Comp. & Struct.* pp. 549~558, 12, 1980.
9. T.Y. Yang, Sunil Saigal, "A curved quadrilateral element for static analysis of shells with geometric and material nonlinear." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 617~635, 1983.
10. D. Bushnel, "Buckling of Shells-Pitfall for Designers," *AIAA J.* 19, pp. 1183~1226, 9, 1983.
11. T.Y. Chang, K. Sawmiphakdi, "Large Deformation Analysis of Laminated Shells by Finite Element Method," *Comp. & Struct.* Vol. 13, pp. 331~340, 1981.
12. S. Timoshenko & J.M. Gere, "Theory of Elastic Stability," 2nd., McGraw-Hill.
13. A. Pflüger, "Stabilitats Probleme der Elastostatik," Springer Verlag, Berlin, 1975.
14. T. Kawai, N. Yoshimura, "Analysis of Large Deflection of Plates by the Finite Element Method," *International Journal for Numerical Method in Engineering*, pp. 123~133, 1969.
15. O.C. Zienkiewicz, "The Finite Method," 3rd Ed., McGraw-Hill, 1977.
16. 이남호, "등매개 변수요소를 이용한 셸의 선형 및 비선형 안정해석" 한국과학기술원 토목과 석사학위논문, 1986.

(接受: 1987. 1. 5)