韓國數學教育學會誌<數學教育>
987. 6. Vol. XXV, No. 3

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Jun. 1987. Vol. XXV, No. 3

教育的 對象으로서의 直觀과 數學教育

— 朴漢植 教授님의 60回 生辰을 위하여 —

柳 喜 纂

I. 序 論

直觀은 주어진 對象을 직접 對함으로써 무엇 느끼는 精神作用을 말한다. 이 直觀은 主觀이며 總體的이라는 점에서 分析的 思考와 대되며, 知性이나 直觀 그 자체의 產物을 그 대에 포함한다는 점에서 단순한 知覺과 비교될 없는 高次元의 精神作用이라 할 수 있다.

數學에서 直觀은 二元的인 位置를 차지하고 다. 즉, 모든 數學的 發明이나 發見의 過程은 觀 이외의 精神作用으로는 說明하기 어려운 면 直觀은 普遍的 眞理의 根源의 位置는 가지 못한다. 예를 들어, 無理數나 四元數의 發見 Hippasus 나 Hamilton 의 "慧眼"의 결과이지 數를 萬物의 根源으로 생각한 Pythagoras 派의 "直觀"은 客觀的으로 타당하지 않으며, 세기, Cauchy, Weierstrass 등의 "解析學의 術化"는 直觀에 대한 不信에서 解析學을 엄밀 基礎 위에 놓고자 하는 움직임이었다.

이러한 直觀의 位置는 數學教育에서도 그대로 映되고 있다. 直觀的 思考는 '별다른 생각없 即興的으로 나오는' 또는 '偶然的이거나 正히 나타낼 수 없는' 教育的으로 별 가치 없는 考로 사용되거나 아니면 天才的 發明家들의 明과 關聯된 "靈感"이나 "啓示"와 같은 어떤 現實的인 힘으로 받아들여지고 있다. 그 결과 觀的 思考는 意圖的으로 教育的 對象에서 제외되어 왔다.

뿐만 아니라, Bruner 와 같은 教育學者들도 느끼고 있듯이[1], 直觀은 操作的으로 定義되기가 대단히 어렵다. 대개, 分析的 思考와 반대되는 것으로만 定義되며, 항상 分析的 思考와 결부되어 論議되어지고 있다.

그러나, 直觀이 비록 普遍的이고 確實한 知識은 保障하지 못하지만 數學的 概念의 形成이나 發達에 있어서 결정적인 役割을 한다는 점을 감안한다면 直觀을 教育的 對象에서 제외하는 것은 教育의 가장 重要한 領域을 포기하는 것일 것이다.

흔히, Einstein 과 같은 人物을 우리는 直觀力이 뛰어난 사람으로 간주한다. 그러나, 平凡한 學生에 지나지 않던 Einstein 의 直觀力이 發達하기 시작한 것은 Pestalozzi 學校에 入學한 後부터라는 사실은 퍽 鼓舞的이다.[2]

本稿는 80年代 數學教育의 焦點이 되고 있는 思考教育 내지 問題解決力 伸長을 위한 教育과 같은 脈絡에서 直觀을 教育的 對象化하기 위한 새로운 틀을 設定하고자 하는 目的에서 直觀에 대한 既存의 哲學的 立場들을 검토한 후 '知識의 根源'과 '앎'의 방법으로서의 直觀의 立場에서 몇 가지 教育的 概念들을 抽出한 다음, 直觀力을 向上시키기 위한 方向을 探索하고자 한다.

II. 教育的 論議를 위한 直觀의 位置

直觀은 Greece 時代부터 다양한 側面에서 논의되어 왔으나 哲學的 立場에서는 주로 確實하고 普遍妥當한 眞理를 얻는 方法으로 간주되어 왔다. 이러한 立場은 Kant 에까지 이어진다.

Bruner, J.S., *The Process of Education* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press; 1977), p. 59

Noddings, N., Shore, P.J., *Awakening the inner eye: Intuition and Education*, (New York: Teachers College, Columbia University, 1984), p. 35.

Plato는 直觀을 idea의 世界와 우리를 連結시키는 精神力으로 파악하였으며, Aristotle은 普遍的인 科學的 知識과 同格이며 科學的 探究에 있어서 必須的인 '證明없이 알려지는 知識'[3]을 얻는 방법으로 直觀을 생각함으로써, 直觀을 眞理의 確實한 保障策으로 생각하였다. 그 후, 中世의 哲學者들은 말할 것도 없고, Descartes도 直觀的 知識을 神의 啓示로 간주하면서, 論證과 함께 眞理를 얻는 가장 確實한 方法으로 생각하였다. Spinoza나 Leibniz 역시 直觀의 不誤謬說을 主張하였다.[4]

Kant는 直觀을 idea의 世界로의 先驗的 洞察이 아니라 眞理를 얻는 精神過程의 일부로 파악하였다. Kant에 의하면, 確實한 認識이 成立하기 위해서는 認識의 두 가지 作用, 즉 感性과 悟性이 서로 協力해야 한다. 感性은 눈에 보이는 感覺을 받아들이는 능력, 즉 直觀을 받아들이는 能力으로, 이 感性에 의해 現象은 表象으로서 우리에게 주어지며 悟性은 感性에 의해 주어진 것, 즉 現象을 能動的으로 思考하는 能力이다.[5] 즉, Kant는 感覺과 理解를 相補的으로 보았다.[6]

한편, Kant는 直觀을 소리, 색, 냄세 등의 '內容'과 時間과 空間의 '形式'으로 구분하였는데, 그는 直觀의 形式인 時間과 空間을 感性이 認識할 무렵에 작용하는 基本的이고도 先驗的인 條件으로 보면서 Euclid 幾何學과 代數學의 모든 명제를 空間과 時間의 直觀에 의존하는 先驗的 綜合判斷으로 간주했다. 따라서, Kant 역시 直觀을 '眞理'의 確實한 根源으로 보았다.

그러나, Kant의 이러한 생각은 非 Euclid 幾何學과 Einstein의 相對性 理論 등으로 인해 크게 批判받게 되었다. 분명 더 이상 유클리드幾何學은 普遍的 眞理라 할 수 없다. 그럼에도 우리는 Kant의 直觀에 대한 批判이 '知識'의 根源으로서의 直觀의 位置까지는 파괴하지는 못함을 주목하고자 한다. 왜냐하면, 분명 非 Euclid 幾何學은 直觀에 의존하지 않으며 理性의 産物이기는 하지만, 그 非 Euclid 幾何學의 無矛盾性을 證明하는 데 使用될 수 있는 客觀的인 모델을 創造하는 데 直觀은 重要한 役割을 하기 때문이다.[7] 뿐만 아니라, 直觀은 物理的 世界의 對象뿐 아니라 知性의 産物 위에서도 作用함으로써 概念을 修正發展시키는 데 결정적인 役割을 한다. 無理數의 發見 後 數概念을 幾何學的 概念으로 轉換한 Greece人들의 '直觀'이 그 例이다. 따라서, 知識의 根源으로서의 直觀의 位置는 否定되지 않음을 알 수 있다.

이러한 直觀의 위치는 教育的 對象으로서 直觀에 대한 論議의 性格上 대단히 重要하다. 왜냐하면, 直觀에 대한 誇張되고 틀린 獨斷을 배제하면서도 直觀에 대한 잘못된 不信을 회 할 수 있게 해주기 때문이다.

한편, 數學的 對象을 '아는' 方法으로서의 觀의 位置를 생각해 볼 수 있다. 실제로, 知 의 背景으로서의 直觀의 位置를 받아들이지 는 數學哲學의 立場도 이 '아는' 방법으로서 直觀의 位置는 인정하고 있음을 알 수 있다. 直觀을 idea의 世界와 우리를 連結시키는 道 로 본 플라톤주의자들은 물론이고, 數學을 經 的 世界와는 아무 關聯이 없는 意味없는 Ga 으로 생각하는 形式主義者들도 假定으로부터 段階的인 産物과 모델로서의 具體物의 認定에 대한 直觀의 역할을 받아들이고 있다.

數學的 對象을 認識하는 데 있어서 直觀에 장 크게 의존하는 입장이 直觀主義이다. 直觀主義는 數學을 直觀的으로 주어진 自然數와 的으로 부여된 反復性으로 시작하는 學問으로 보고 있다. 즉, 自明한 眞理로서 시작하는 것 아니라 주어진 對象과 그 對象 위에서 隨

3) Aristotle, *Posterior Analytics*, Vol. 2, 100 b
4) Bunge, M., ***Intuition and Science***, (Westport, Connecticut: Greenwood Press, Publishers, 1975), pp. 2
5) Kant, I., ***Critique of Pure Reason***, trans F. Max Müller (Garden City, N.Y.: Doubleday, 1966)
6) Noddings, N., Shore, P.J., ***op. cit.*** p. 45～46.
7) 幾何學的 모델에 관해서는 金年植, 金應泰「數學教育」教材論, 幾何단원을 참고할 것.
8) Parsons, C., Foundation of Mathematics, *The Encyclopedia of Philosophy*, Vol. 5, ed. Paul Edwards(York: Macmillan, 1972) pp. 188～213.

있는 明確히 識別할 수 있는 行爲를 가지고 ㅏ한다. 다시 말해, 直觀主義의 關心은 數學 對象의 構成에 있다. 따라서, 그들은 構成的 槪念이나 對象만을 받아들이고 非構成的인 :의 證明 등을 배격하며 직접 直觀할 수 있는 ㅏ을 確信한다.[9]

[觀主義에서의 直觀은 두 가지 性格을 지닌 그것은, 對象을 주는 機能과 經驗을 可能하 하는 機能이다.[10] Kant와 같이, 그들은 時間 空間의 純粹直觀을 가정한다. 우리가 셈 unting)이라 부르는 反復性은 다음에 일어나 것에 注目하는 時間的 識別能力과 對象을 택 空間的으로 다른 位置에 놓을 수 있는 位 ı 識別能力에 달려 있다.[11] 이런 意味에서 :數는 주어져 있다. 또한, 直觀은 經驗에 先 ·며 經驗을 可能하게 한다. 즉, 直觀이 아이 의 健全性과 受容可能性을 決定하는 것이지 :이나 論理가 決定하는 것이 아니다. 이런 서 直觀主義는 經驗論과 크게 구별된다. 또 直觀主義는 Kant와는 달리 精神의 發達을 :한다는 점에서 經驗論과 일치하나, 이러한 이 반드시 經驗의 結果가 아니라는 점에서 論과 대비된다.

學的 知識을 '아는' 方法으로서의 直觀 역 ㅏ리의 論議에 있어서 매우 重要하다. 왜냐 , 교육現場에서 '直觀的으로 안다는 것'은 하게 理解하지 못한 狀態를 뜻하는 경우가 며, 直觀的인 理解는 반드시 論理와 結付되 하는 것으로 받아들여지고 있기 때문이다. 와 관련하여 우리는 H. Bergson과 Schopen- r의 直觀을 言及할 必要가 있다. Bergson ㅏ르면, 直觀은 知性에 先行한다. 즉, 狀況은 知性的인 用語로는 알려질 수 없으며 分析될 수도 없다. 다만 直觀的으로만 認識될 수 있을 뿐이다. 現實의 산 時間 안으로 들어가 이것을 직접 보고 對象의 內部에서 對象과 共感할 수 있어야만 한다.[12] Bergson의 이러한 哲學的 立場은 客觀性이 부족하며 時間槪念에 대한 模糊性으로 인해 批判되고 있지만, 단순한 事實의 獲得과 狀況의 좀더 깊고 생생한 理解 사이의 차를 强調했다는 점에서 대단히 示唆的이다.

Schopenhauer는 直觀과 意志를 結合시켰다는 점에서 Kant의 直觀개념을 넘어선다.[13] Schopenhauer는 Kant가 直觀의 內容을 조사하는 데 실패했음을 비판하였다. Kant에 따르면 그것은 "주어질" 따름이다. 즉, Kant에게 있어서 直觀의 創造機能은 부정된다. Schopenhauer는 知覺的 知識은 우리가 그것을 추구하기 때문에 우리에게 주어지며, 따라서 그것은 의미를 가지고 우리에게 오는 것으로 보았다. 더구나 Kant에게서 "理解"는 直觀의 機能이 아니다. Schopenhauer는 知覺的 知識뿐 아니라 基本的으로 理性과 관련되는 抽象的 知識까지도 理解되기 위해서는 直觀이 必要함을 강조했다. Schopenhauer의 直觀과 動機와의 連結은 '意味를 위한 敎育', 直觀敎育에 대한 우리의 논의에서 핵심적이다.[14]

III. 直觀과 敎育

지금까지 우리는 直觀의 두 가지 位置를 살펴보고, 이것이 敎育的 對象으로서의 直觀을 논의하는 데 있어서 유익하다는 점을 강조했다. 여기서, 우리는 몇 가지 敎育的 槪念을 抽出할 수 있다. 즉, 表象과 意志, 理解의 槪念이 그것이다. 이제 이 세 가지 槪念과 直觀과의 關係를 좀더

Klein, M., *Mathematics: The Loss of Certainty*, 朴世熙(譯), 「수학의 확실성」, 서울：民音社 1984, pp. :57～291.

Noddings, N., Shore, F.J. *op. cit.*, p. 49.

論理主義에 속하는 B. Russell의 自然數論도 '反復'을 重要하게 생각한다. 즉, 0은 空集合 { }에 대응되며 l은 {{ }}, 2는 {{ },{{ }}}에 대응된다. 따라서 G. Spencer Brown은 Russell과는 逆으로 論理를 算術化 할 수 있다고 보고 있다. G. Spencer Brown, *The Law of Form* (London: George Allen & Unwin. 1969)

Bergson, H., *Time and Free Will*, trans. F.L. Pogson (London: George Allen & Unwin, 1910)

Schopenhauer, A., *The World as Will and Representation*, trans. E.F.J. Payne (New York: Dover, 969)

이 밖에 直觀과 意識의 關係에 대한 Sartre의 實存哲學과 直觀의 力動性에 대한 Husserl의 現象學을 研究 ㅏ 必要가 있다.

具體的으로 알아보면서 直觀力을 向上시키기 위한 教育的 方向을 摸索해 보기로 한다.[15)]

(1) 表象과 直觀

直觀의 一次的인 機能은 對象을 表象하는 것이다. 이 表象의 過程에는 概念的 내지 分析的 操作이 介入되지 않는다. 이 과정에서 概念을 使用하기도 하지만 그것은 意思疏通을 위한 것일 뿐이다. 表象은 對象과 主體와의 직접적인 接觸의 産物이다. 이 直觀의 對象은 內的, 外的 世界를 모두 포함한다. 例를 들어 '龍'을 想像할 때 우리는 그 龍이 실제로 하늘을 날아가는 모습을 表象한다. 反省을 할 때에도 意識의 特殊한 에피소드에 內的인 感覺을 介在시킴으로써 그 에피소드를 表象한다. 思索이나 問題解決過程에서도 表象의 機能은 절대적이다.

과거, 數學教育者들은 數學的 問題解決에서 가장 중요한 段階를 '飜譯'으로 보았다. 즉, 言語的 文章을 解讀하고 이것을 數學的 文章으로 符號化하는 過程을 重視했다. 그러나 요즘 認知心理學에서는 '表象'의 概念이 등장한다. 문제해결의 초보자들, 또는 숙련가들도 새롭거나 어려운 問題에 부딪히면, 問題를 단순히 번역을 해서는 問題를 해결할 수 없다. '우리는 어떤 目的으로 이 問題를 풀려고 하는가?' '이 問題는 어떤 답을 要求하는가?' '이 問題와 유사한 問題를 풀어본 적이 없는가?' '이 問題는 어떤 種類의 對象을 다루고 있는가' 등의 自問을 해야 한다. 즉, 問題의 表象을 創造하려는 努力이 필요하다.

우리의 논의상 중요한 것은 이 表象의 主觀性이다. 例를 들어 어떤 問題의 表象은 그 問題를 解決하는 사람마다 다 틀리다. 경우에 따라서, 教師가 學生들에게 提示하는 表象이 學生들에게 전혀 도움이 되지 못할 수도 있다. 또한, 直觀은 表象을 受動的으로 받아들이는 것이 아니라 能動的으로 表象을 創造하는 精神能力이다. 따라서, 學生들 自身이 表象의 構成에 參與하여 그들 스스로 계획을 세우고 組織하고 主張하지 않으면 教育的으로 意味가 없다. 다시 말해 狀況을 直接 '볼' 수 있어야 한다.

우리는 흔히 學習目標를 提示하고 授業을 시작하며, 內容을 構造的으로 압축하여 提示하기도 한다. 이들 모두 學生들에게 全體的인 眺望을 주기 위해 提示된다. 그러나, 그것은 教師의 表象이지 學生의 表象이 아니다. 受動的으로 注入된 表象은 참다운 理解를 위해 아무런 기여를 하지 못한다.

수업시간에 學生들 간의 接觸을 늘려 보는 것은 表象의 확대와 수정이라는 점에서 좋은 방법이 될 수 있을 것이다. 만약 教師와 學生間의 接觸만 있게 되면 學生은 너무나 쉽게 자기 자신의 表象을 버리고 教師의 表象을 盲目的으로 따르게 마련이다. 表象을 확대하고 修正하는 것은 創造이지 受容이 아니다. 또한, 그림이나 圖式, 地圖, table 등을 提示하는 것도 한 方法이 될 수 있을 것이다. Morris Klein도 發見術, 主張, 歸納法, 類推에 의한 推論 등과 함께 그림을 直觀的인 接近法으로 들고 있다.[16)] 그러나 여기서 注意할 것은 完成된 그림이나 圖式은 오히려 學生들의 表象 創造를 방해할 危險이 다분히 있다는 점이다. 따라서 그림을 提示할 때는 學生들의 反應에 따라 變化가 可能한 것이어야 한다.

Z.P. Dienes과 E.W. Golding의 多樣한 (…)에서 內容을 提示하는 아이디어는 많은 도움이 된다.[17)] 흔히 概念이나 skill을 指導하는 데 있어 오직 한 가지 方法만을 使用하는 경우가 많다. 定理를 證明하거나 公式을 유도하는 데 있어 좀더 多樣한 方法을 使用할 필요가 있으며, 學生들의 興味를 끌 수 있는 暗示的인 이야기나 現場感이 있는 生生한 寫眞 등을 通해 (…)의 創造에 도움을 줄 수 있어야 한다. 이를 (…)해 教師들은 數學史나 數學 이외의 다른 學(…)에서 學生들의 興味를 끌 수 있는 素材 開(…)

15) 表象, 理解, 意志는 어떤 의미에서는 하나의 概念이다. 따라서 앞으로 論議를 하는 데 있어 概念的 區(…) 불가피하다.

16) Klein, M. *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math.* (New York: Vintage, 1974), p(…)

17) Dienes, Z.P., Golding, E.W. *Approach to Modern Mathematics* (New York: Herder and Herder, (…)

힘써야 할 것이다.

直觀은 다름아닌 '느낌'이다. 이 '느낌'의 結果가 表象이라면, 無味乾燥한 敎材를 처음부터 끝까지 풀어나가는 式의 授業은 學生들의 直觀力 開發에 아무런 도움을 주지 못할 것이다.

(2) 直觀과 理解

아마 理解를 目標로 授業을 하지 않는 敎師는 없을 것이다. 그러나, 理解는 正確한 論理的 說明과 구별되어야만 한다. 흔히 우리는 자세히 說明하거나 嚴密한 用語나 記號를 使用하면 學生들이 더 잘 理解하리라 믿는다. 그러나, 이러한 假定은 理解와는 전혀 관련이 없다. 理解는 論理의 領域이 아니라 直觀의 領域에 속한다. 다시 말해, 무엇을 '보고' '느끼는' 것이 理解이다. 英語에서 보는 것과 理解는 같은 單語이다. 따라서, 理解는 대단히 主觀的인 槪念이라 할 수 있다. 學者와 學生들 사이뿐 아니라 모든 사람들은 주어진 對象을 理解하는 程度에 있어 差異가 있다. 우리는 Poincare의 다음 말이 理解가 論理의 領域이 아님을 설득력 있게 이야기하고 있다.[18)]

'數學을 理解하지 못하는 사람이 存在한다는 것은 어떻게 可能한가? 만약 數學이 모든 正常인 사람들에 의해서 받아들여지는 論理의 規칙에만 의존하고, 數學의 明證性이 모든 사람에게 받아들여지는 原理에 의해서만 결정된다면 그렇게 많은 사람들이 數學을 어렵게 느끼는 것은 어떻게 說明되어야 하는가?

지난 60, 70年代 '새數學'이 理解를 目的으로 하면서도 說明의 長廣舌로 끝나버렸던 것은 理解가 論理나 記號에 依存했기 때문이다. 學生에게 論理로 說得해서는 안되며, 그들의 感覺에 호소하지 않으면 안된다. 理解하는 것은 그들 스스로 그들의 思考를 구성하고 反芻해 봄으로써 可能하기 때문이다. 記號나 槪念은 單純히 論理的 道具가 아니라 直觀의 對象이어야 한다. 論理的으로는 模糊한 記號가 直觀的으로 完全할 수 있으며, 嚴密한 記號를 使用한다고 해서 理解를 더 잘 하리라는 保障이 없다. 反對로 그러한 엄밀한 記號는 理解의 産物이지 않으면 안된다. $m(\angle A)=30°$와 $\angle A=30°$는 어떻게 다른가? '解'와 '解集合'의 差異는 무엇인가?…

Max Beberman의 다음 例를 살펴보자.[19)]

'十進法 體系에서 素數 13을 생각해 보자. 이 13은 八進法으로 15이다. 이 13은 八進法 體系에서 素數인가 아닌가?'

그는 이 問題를 解決하는 데 망설이게 되는 것은 수와 숫자 사이의 槪念上 혼돈 때문이라고 하면서 위의 問題를 다음과 같이 고치면 '問題'가 사라진다고 말했다.

'十進法으로는 13이고 八進法으로는 15인 素數를 생각해 보자. 이것은 素數인가?'

그러나 '問題'는 사라지지 않을 수도 있다. 여전히 學生들에게는 15=5×3이다. 이 경우 素數는 進法體系가 달라져도 계속해서 素數임을 볼 수 있어야만 망설이지 않게 된다. 즉, 直觀을 할 수 있어야만 理解가 된다.

理解는 '行'한다고 얻어지는 것이 아니라 '行'함의 結果를 吟味함으로써 얻어진다. 우리는 直接 行한 結果이면서도 잘 모르는 경우를 가끔 經驗한다. 이것은 結果를 吟味하지 않았기 때문이다. 吟味는 點檢이나 分析이 아니라 直觀이다. 그것은 '아! 그렇구나'라고 느끼는 洞察이다. 소위 '行하는 敎育'을 틈탄 교묘한 遁術이 대부분 失敗로 돌아가는 것은 이 吟味段階를 고려하지 않기 때문이다. 問題解決의 네 局面中 네번째의 反省段階가 重視되어야 하는 이유도 여기에 있다. 이 反省段階는 풀이 過程이나 答의 檢討에 그쳐서는 안된다. 洞察이야말로 理解의 核心이다.

흔히, Piaget의 發達理論을 '論理'의 發達結果에만 焦點을 맞추는 경향이 있다. 그러나 Piaget 理論의 核心은 그 메카니즘에 있다. 그 메카니즘은 反映的 抽象化라 불려진다. 이것은

---

18) Poincare, H., *Mathematical Creation, The World of Mathematics*, ed. James R. Newman. (New York: Simon & Schuster, 1956) p. 2041.

19) Beberman, M., *An Emerging Program of Secondary School Mathematics*, New Curricula, (ed.) Robert W. Heath (New York: Harper & Row, 1964), p. 14.

同化와 調節이 平衡을 이루게 될 때 생기는 일종의 洞察이다. 同化와 調節 자체만으로는 知識의 獲得이나 理解의 過程을 說明할 수 없다.

Piaget의 反映的 抽象化는 Fischbein의 斷定直觀(Affimatory intuition)과 類似하다. Fischbein은 豫見直觀(Anticipatory intuition)과 斷定直觀을 區別하면서 後者에 더 많은 觀心을 가질 것을 提案하고 있다.[20] 豫見直觀은 흔히 우리가 생각하는 잘못될 可能性을 가진 不明確한 直觀이다. 물론 이러한 直觀은 發明이나 發見에 있어서 매우 重要하다. Poincare가 말하는 孵化期(incubation period)는 이 豫見直觀의 內容을 檢證하려는 오랫동안의 勞力 다음에 오게 된다. 그 다음 斷定直觀이 오게 된다. 이 直觀에 의해 앞에서 豫見한 것이 옳음을 다른 사람에게 嚴密한 方法으로 보여줄 수 있게 되며, 우리 自身이 充分히 明瞭하게 理解할 수 있게 된다. 이 知性的 直觀(educated intuition)이야말로 文明發達의 源動力이다.

우리는 너무 論理的으로 完璧한 敎育을 해 왔다. 그러나, 그것은 敎師나 數學者들의 滿足感에 지나지 않을 수도 있다. 圓이 圓임을 모르는 學生은 없지만 圓은 中心에서 같은 거리에 있는 點들의 集合이며 따라서 圓과 圓의 내부는 分明히 다르다는 것을 알기는 힘들다. 한 圓에서 中心角이 두 배가 되면 해당되는 弧의 길이는 두 배됨은 視覺的으로 自明하다. 學生들은 이것을 論理的으로 說明하려 하면 生覺하기를 싫어한다. 이것이 누적된 결과가 學生들의 數學의 기피로 나타난다.

直觀은 不完全한 思考가 아니며 不明瞭하지도 않다. 반대로, 直觀되지 않는 對象은 理解를 할 수 없다.

數學的 歸納法의 경우를 例로 들어보자. 歸納法은 一般化를 學生들이 發見하도록 하는 目的으로 자주 쓰이는 證明法이다. 그러나 學生들은 $n=1$, $n=k$, $n=k+1$ 사이의 關係를 모르는 채 '무조건' 外形的인 節次만을 따르는 경우를 자주 본다. 그러나, 歸納法의 核心은 그러한 外形的인 過程이 아니라 모든 自然數에서 그 사실이 成立함을 '直觀' 하느냐 못 하느냐에 달려 있다. J. Dieudonné의 다음 글[21]은 示唆的이다.

'나는 Polya의 學生이었을 때를 記憶한다. Polya는 그의 親舊인 Hardy가 n次元의 變數에 의해 決定되는 定理를 證明하려는 學生에게 다음 方法을 권한다라고 그에게 말하곤 했었음을 나에게 이야기 한 적이 있다: $n=1$인 경우에서부터 시작하여 $n=2$, $n=3$인 경우까지 증명해 보라. 그러면, 무엇을 하고 있는지 대충 알게 될 것이고 一般的인 경우의 證明에 대한 아이디어가 생길 것이다. 이 方法은 항상 成功하지는 못하지만 매우 效果的인 경우도 있다.'

(3) 直觀과 意志

지금까지 우리는 直觀과 表象 및 理解 사이의 關係, 즉 直觀이란 表象을 創造하는 精神能力이며 理解란 그 자체로 直觀의 行爲임을 살펴보았다. 그러나, 이러한 生覺들은 精神主體의 意志를 前提로 하고 있다. 다시 말해 直觀이란 表象을 受動的으로 受容하는 것이 아니라 積極的으로 表象을 創造하는 것이며, 理解란 意味를 위한 意志의 要請에 대한 直觀의 反應이다.

컴퓨터는 人間과 類似하게 情報를 받아들이고 處理하며, 分析하고, 結果를 產出해 낸다. 그러나, 컴퓨터는 주어진 資料를 單純히 受容하거나 아니면 限定된 資料만을 받아들일 수 있을 뿐이다. 資料의 選別 與否도 完全히 미리 決定되어 있다. 만약 컴퓨터에게 資料에 대해 묻는다면 그 컴퓨터는 "주어졌다"라고 대답할 것이다. 이것은 칸트가 대답한 방법이었다. Schopenhauer는 主體의 意味 追求活動을 강조했다.

앞에서 우리는 Piaget의 '앎'의 過程의 메카니즘을 直觀으로 說明했다. 그러나, 여기에도 意志가 先行되어야 한다. 受動的인 狀態에서는 知識의 構造를 變化시키지도 못하며 構造를 附加할 수도 없다. 우리가 行動主義의 敎育的 方法을 거부하는 것도 行動主義가 意志를 說明할 도구임을 가지고 있지 못하기 때문이다.

學生들의 內的인 눈을 일깨우기 위해서는

20) Fischbein, E., Intuition and Proof, *For the Learning of Mathematics*, 1982, 3(2), p. 10.
21) Dieudonné, J., *L'Abstraction et L'Intuition Mathematique*, Dialectica, 1975, 29(1), p. 44.

生들이 그 授業目標의 構成에 참여해야 한다. 다시 말해, '이것을 위해 무엇을 해야만 한다'라는 動機的인 意慾이 '이것이 무엇인가?'라는 知的인 물음에 先行되어야 한다. 만약 學生들이 受動的인 位置에 있으면 直觀은 機能을 할 수 없다. "내가 지금 무엇을 하고 있는가?" "왜 내가 이것을 하고 있는가?" "어떻게 하면 이것을 이끌어 낼 수 있는가?" 등 이러한 意志의 活動이 直觀이라 불리는 精神活動 속으로 우리를 引導한다. 敎師들의 가장 重要한, 그리고 첫번째 課題는 學生들의 積極的인 意志를 表出시키는 것이다.

過去, 形態心理學者들은 論理 그 自體는 問題解決에 도움이 되지 않으며 聯想이나 옳고 그름에 대한 直觀的 感賞이 成功的인 問題解決로 이끈다고 보았다. 그러나, 그들은 學生들의 動機的인 側面에 대한 배려를 하지 않았다. 요즈음 流行되고 있는 問題解決力 伸張을 위한 授業에도 學生들의 意志를 持續시킬 수 있는 方案이 강구되지 않으면 成功을 보장할 수 없을 것이다.

다음의 敎師와 學生間의 對話를 注目해 보자. 이 學生은 方程式 $2x-x^2=8$의 풀이에 대해 敎師의 도움을 請하고 있다.[22]

敎師 : 어디를 모르겠니?
學生 : 도대체, 못 풀겠어요.
敎師 : 그것을 잘 봐라!
學生 : ……
敎師 : 좋아. 너는 이 問題에 대해 무엇인가를 말할 수 있다.
學生 : (다소 불만스러운 어투로)… 그것은 方程式이에요.
敎師 : 맞다. 이제 시작했다. 너는 이와 같은 問題를 前에 본적이 있니?
學生 : 나는 이 작은 2를 가지는 것을 많이 봤어요. 이것은 지수라고 하죠?
敎師 : 맞다. 그러면, 네가 보아왔던 방정식과 이것과는 어떤 차이가 있니?
學生 : 잘 모르겠어요. 어 잠깐만요. 오! 이럴 수가. 걱정 마세요. 알겠어요.
敎師 : 도움이 더 필요하니?
學生 : 아니에요. 알겠어요. 쉬운 문제이네요.

아마 이 學生은 數學이란 公式이나 알고리즘에 그대로 適用하는 것 정도로 생각해 왔을 것이다. 많은 학생들은 問題가 조금만 變形되어도 思考하기를 꺼리며 너무 일찍 問題를 포기하는 경향이 많다. 우리는 學生들에게 주어진 情報를 조그만 變形하면 解決될 수 있으며, 비록 現在 알고 있는 情報가 대단히 不足하고 不完全하지만 그 情報를 조금만 더 活用한다면 解決될 수 있는 問題나 狀況이 많이 있음을 일깨워 주어야 한다. 例를 들어, 三角函數의 合의 公式 및 곱의 公式은 혼동될 위험이 많아 정확히 외우기 힘들다. 따라서, 많은 학생이 이 公式을 利用해야만 解決되는 狀況에서 이 公式을 정확히 暗記 못하는 경우, 그 問題를 쉽게 포기하고 만다. 그러나, 이 公式을 정확히 暗記하지는 못할지라도 $\sin(\alpha+\beta)$는 $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$의 적절한 배합에 의해 決定됨을 알고 있다. 그런 경우, 간단한 施行錯誤를 거쳐 公式을 回想해 낼 수 있다.

물론, 많은 것을 아는 것은 理解를 위해 도움이 될 것이다. 그러나, 모든 狀況에서 完全한 情報를 가질 수 없으며, 만족스러운 解를 얻기 위해 完全한 知識만을 필요로 하지는 않는다. 우리가 學生들에게 '주어야 하는' 것은 知識이 아니라 不充分하지만 주어진 資料를 가지고 判斷하고, 보고, 무언가 얻으려고 努力하는 意志이다.

IV. 結 論

지금까지 우리는 直觀을 敎育的 對象으로 다루기 위한 概念的인 틀로서 知識의 根源으로서의 直觀과 앎의 방법으로서의 直觀의 位置를 생각해 보고, 表象과 理解 및 意志라는 세가지 敎育的 概念과 直觀 사이의 關係를 論한 다음 直觀力을 向上시키기 위한 몇 가지 方向을 探索해 보았다.

그러나, 直觀을 强調한 授業은 결코 새로운 敎

22) Noddings, N., Shore, P.J., *op. cit.* pp. 101~102.

授方法이 아니라 멀리 페스탈로치로 거슬러 올라간다. 페스탈로치는 教育을 感覚 印象이 意味를 獲得해 가는 過程으로 定義하였다. 이것은 Kant의 直觀과 理解의 相補的인 機能과 일치한다. 그는 創意性과 直觀力을 억누르는 慣習的인 宗教教育을 비판하면서 直接的인 觀察과 經驗의 重要性을 强調했다. 그는 그의 教授方法을 Kant가 直觀을 指稱할 때 使用한 것과 같은 단어인 Anschaung이라 불렀다.

Fröbel 역시 페스탈로치와 같이 直觀의 開發을 教育에서 强調하였다. 그는 宇宙에 대한 知識을 전달하기 위해서는 適切한 時期에 公明한 係列로 提示된 具體物을 使用할 것을 提案하였다. 例를 들어 球는 宇宙의 基本單位의 概念을 전달하기에 좋은 資料로 보았다. Fröbel은 直觀的 思考의 刺戟劑로서 具體的인 狀況을 强調했다는 點에서 教育的으로 많은 示唆를 하고 있다.[23]

이러한 直觀教育의 전통은 20세기에 들어와 形態心理學者들과 Bruner, Fischbein 등으로 連結된다. Bruner는 "數學에는 形式的으로 證明할 수 없는 갑작스러운 洞察과 좋은 推測의 두 가지 直觀이 있다"고 말하면서 直觀的 思考의 性格과 教師, 經驗, 知識의 構造, 發見術, 推測 등의 直觀的 思考에 영향을 미치는 變因 등을 언급하고 '勇氣있는 趣向'을 위해 正直한 잘못을 저지를 수 있는 自信感과 勇氣를 북돋아주어야 한다고 주장하였다.[24] Fischbein도 본문에서 언급한 바와 같이 豫見直觀과 斷定直觀을 구분하면서, 直觀教育은 短期間의 學習에 의해서는 길러질 수 없으며, 知性의 發達과 보조를 맞추어 組織된 長期間의 훈련에 의해서만 길러질 수 있는 精神的 習慣이라고 말했다.[25]

그러나, 이러한 直觀教育에 대한 오랜 强調에도 불구하고 대부분의 學校教育은 直觀의 培養과는 거리가 먼 斷片的인 知識의 傳達에 그치고 마는 實情임을 부인할 수 없다. 물론 이러한 狀況은 教師들이나 學校教育 自體의 問題에서 비롯된 것이라기보다는 全般的인 社會的 制度나 雰圍氣에서 그 原因을 찾아볼 수 있다. 사실, 모든 것이 點數化되어 그 優位가 比較되는 過熱競爭의 社會的 雰圍氣나 入試制度下에서는 直觀의 開發과 같은 創意的이고 進取的인 思考教育은 기대할 수 없을 것이다.

그럼에도 불구하고 學校教育은 社會的 狀況을 啓導할 責任을 지니고 있으며 數學教育 역시 이러한 學校教育의 役割에서 그 一翼을 담당해야 할 것이다. Wilder의 말처럼 數學教育에서 바람직한 教師는 많은 知識을 가진 사람이 아니라 學生들에 대한 獻身的인 사랑과 教育에 대한 熱意로 가득찬 사람인 이유도 여기에 있는 것이다.[26]

直觀은 天賦的인 發明家들만이 가진 精神機能이 아니라 반대로 이러한 天才들의 背景에는 그들의 潛在的인 能力을 最大한 發揮시켜 주는 훌륭한 뒷받침들이 있었음을 特히 强調하고자 한다.

---

23) Lucas, C.J., *Our Western Educational Heritage* (New York: Macmillan, 1972), pp. 409~411.
24) Bruner, J.S. *op. cit.* pp. 55~68.
25) Fischbein, E., Intuition, structure and heuristic methods in the teaching of mathematics, *Developmen in Mathematical Education*, (ed.) A.G. Howson, Cambridge University Press, 1973, pp. 222~232.
26) Wilder, R.L. The Role of Intuition, *Science*, Vol. 156, May 1967, pp. 605~610.