

# 最小 제곱법에 있어서 重量이 觀測值의 結果에 미치는 影響 A Study on the Influence of the Observational Results by the Weight in the Least Squares

李 啓 鶴\* 尹 載 殖\*\*  
Lee Kye-Hak Yun Jae-Sig  
姜 熙 福\*\*\* 成 水 鍊\*\*\*  
Kang Hee-Bog Sung Soo-Lyeon

## 要 旨

本 研究는 最小 제곱법에 있어서 重量이 觀測值의 結果에 미치는 影響을 究明하는데 目的이 있다. 各種 Tape를 利用하여 張力에 따라 伸長을 求하고 여기에 重量을 주어서 觀測值의 結果를 考察하였다.

本 研究 結果 重量의 값이 變하여도 觀測值의 結果에는 그 大지 큰 影響이 없음을 알았다.

## ABSTRACT

The purpose of this study is to investigate on influence of the observations by the given weights, through the observational equations of the least square.

According to the tention, elongation lengths are obtained by using the each tape and observational results are analyzed in the given weights.

Through the results of this study, we found that variations of weights have not a great influence on the observations.

## 1. 序 論

最小제곱법은 觀測值로 부터 最確值를 求하기 위한 有力한 方法이다. 現在 自然科學 뿐만 아니라 社會科學 分野에도 많이 適用되고 있으며 特히 測地測量의 Data 處理를 하는데 그 役割은 大端히 크다.

最小제곱法으로 Data處理를 하는 過程에서 서로 다른 觀測 精度로 부터 얻어진 觀測方程式에 各各 다른 重量을 주어 計算을 行하여 綜合한 結果를 求하는 것이 行해지고 있다.

本 研究에서는 全南工大 Base line 檢定所에서 各 張力의 變化에 따라 各種 Tape (日産 및 國産)의 伸張距離를 求하고 여기에 重量의 變化를 加해서 觀測值의 結果를 實驗的으로 求하였다.

따라서 本 研究는 最小제곱법에 依한 觀測方程式에 있어서 重量이 觀測值의 結果에 어떠한 影響을 미치는 가를 考察하는데 目的이 있다.

---

\* 全南大學校 工科大學 教授  
\*\* 全北大學校 工科大學 教授  
\*\*\* 全南大學校 大學院

## 2. 基本理論

2-1 Weight를 考慮하지 않은 境遇의 行列 表示 n個의 未知數  $X_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$  사이에 線型關係가 있을때

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = l \quad \dots\dots(1)$$

이 된다. 여기서 m回 觀測했을 때의 l值를  $l_j (j=1, 2, 3, \dots, m)$ 라고 한다면  $l_j$ 는 觀測值이기 때문에 恒常 誤差를 隨伴하게 되므로 (1)式은

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = l_j + v_j \quad \dots\dots(2)$$

가 된다. m回 觀測한 觀測值를 (2)式에 各各 代入하면

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= l_1 + v_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= l_2 + v_2 \\ &\dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= l_m + v_m \end{aligned} \quad (3)$$

(3) 式을 行列로 表示하면

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_m \end{bmatrix} \quad \dots(4)$$

$A_{mn} \quad X_{n1} \quad L_{m1} \quad V_{m1}$

여기서  $m > n$ 일 때

$$\begin{aligned} A \cdot X &= L + V \\ \therefore V &= A \cdot X - L \quad \dots\dots(5) \end{aligned}$$

只今 (5)式의 殘差를 最小로 하기 위하여 兩邊을 제곱하면

$$V^2 = (A \cdot X - L)^2$$

이고 이때 X값을 求하는 것을 最小제곱法이라고 하며 m+1個의 最小值를 얻기위해 다음의 偏導函數를 Zero로 한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^2}{\partial X} &= 2(A \cdot X - L) \cdot A = 0 \\ A^T(A \cdot X - L) &= 0 \\ A^TAX - A^TL &= 0 \\ A^TAX &= A^TL \\ X &= (A^TA)^{-1}(A^TL) \\ \therefore X &= S^{-1} \cdot K \quad \dots\dots(6) \end{aligned}$$

$$\text{여기서 } A^TA = S, A^TL = K$$

2-2. Weight를 考慮한 境遇의 重量의 變化에 對한 解法

只今 觀測方程式

$$A \cdot X - L = V$$

에서 Weight P를 考慮하면

$$A^TPAX - A^TPL = A^TPV \quad \dots\dots(7)$$

이 된다. 여기서  $V^TPV$ 가 最小로 되는 條件에서 (7)式의 右邊을 Zero로 놓으면 (7)式은 (6)과 같은 正規方程式이 된다.

$$X = S^{-1} \cdot K$$

$$\text{但, } S = A^TPA, K = A^TPL$$

여기서 S와 K를 行列로 表示하면

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12}a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

와 같이 되고 또한  $S_{11}S_{12} \dots S_{1n}, S_{21} \dots S_{2n}, S_{n1} \dots S_{nn}$ 을 展開하면

$$\begin{aligned} S_{11} &= p_1a_{11}^2 + p_2a_{21}^2 + \dots + p_ma_{m1}^2 \\ S_{12} &= p_1a_{11}a_{12} + p_2a_{21}a_{22} + \dots + p_ma_{m1}a_{m2} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$S_{1n} = p_1a_{11}a_{1n} + p_2a_{21}a_{2n} + \dots + p_ma_{m1}a_{mn}$$

$$S_{21} = p_1a_{12}a_{11} + p_2a_{22}a_{21} + \dots + p_ma_{m2}a_{m1}$$

$$S_{22} = p_1a_{12}^2 + p_2a_{22}^2 + \dots + p_ma_{m2}^2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$S_{nn} = p_1a_{1n}^2 + p_2a_{2n}^2 + \dots + p_ma_{mn}^2$$

여기에서  $S_{12} = S_{21}, S_{13} = S_{31}, \dots$ 이므로

$S_{ij} = S_{ji}$  따라서 S는 對稱行列이다.

이와같은 方法으로 K도 表示하면

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12}a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_m \end{bmatrix}$$

이 되고 여기서

$$k_1 = p_1a_{11}l_1 + p_2a_{21}l_2 + \dots + p_ma_{m1}l_m$$

$$k_2 = p_1 a_{12} l_1 + p_2 a_{22} l_2 + \dots + p_m a_{m2} l_m$$

$$k_n = p_1 a_{1n} l_1 + p_2 a_{2n} l_2 + \dots + p_m a_{mn} l_m$$

가 된다. 따라서 이들을 종합하여 간단히 표시하면

$$\left. \begin{aligned} S_{ij} &= \sum_{k=1}^m P_k a_{ki} a_{kj} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \\ k_i &= \sum_{k=1}^m P_k a_{ki} l_k \quad P_k \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

이 된다.

$$萬一 \quad P \rightarrow P + \Delta P$$

$$X \rightarrow X + \Delta X$$

로 변환다면

$$V \rightarrow V + \Delta V$$

(7)식은

$$\begin{aligned} A^T(P + \Delta P)A(X + \Delta X) - A^T(P + \Delta P)L \\ = A^T(P + \Delta P)(V + \Delta V) \end{aligned} \dots (9)$$

$(V + \Delta V)^T(P + \Delta P)(V + \Delta V)$ 가 Zero로收敛하면  $A^T(P + \Delta P)(V + \Delta V) = 0$  이므로

(9)식의 右邊은 Zero이다. 따라서

$$(X + \Delta X) = [A^T(P + \Delta P)A]^{-1} [A^T(P + \Delta P)L] \dots (10)$$

또 (10)式에서

$$S + \Delta S = A^T(P + \Delta P)A$$

$$k + \Delta k = A^T(P + \Delta P)L \text{ 이라 하면}$$

$$(S + \Delta S)(X + \Delta X) = (K + \Delta K) \dots (11)$$

(9)式으로 부터

$$A^T(P + \Delta P)A \cdot \Delta X + A^T \cdot \Delta P(A \cdot X - L) = 0$$

近似的으로

$$\Delta X = -[S + \Delta S]^{-1} [A^T \Delta P V] \dots (12)$$

(12)式에 依해 期待值의 變化量  $\Delta X$ 를 求할 수 있다.

### 2-3 標準偏差

一般的으로 n個의 觀測值를  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 그 重量을 各各  $p_1, p_2, \dots, p_n$  이라 하면 그 單位重量의 標準偏差  $\sigma_n$ , 平均値의 標準偏差  $\sigma_m$  다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{a} = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) / \sum p_i$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum p_i (\bar{a} - a_i)^2}{(n-1)}} \dots (13)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_n}{\sqrt{\sum p_i}} \dots (14)$$

### 3. 實驗方法 및 考慮

前述한 理論을 土台로 實際에 應用하기 爲해 全南工大 2號館앞에 測說된 Base line (50m)을 各各의 줄자 Eslon (國產 1, 2), Eslon (日產 1, 2), Steel (日產 1, 2), 6個를 選定하여 張力을 漸次 6kg부터 15kg의 힘으로 引張시켜 伸張距離를 求한 結果는 Table 1, Table 2와 같고 實測時의 溫度는 30°C이었다.

Table 1은 Eslon(國產 1)에 對한 實際計算 例로서 3回 測定한 값의 平均을 50.1m에 서 減하여 測定距離를 求한 다음 50m와의 差를 伸張距離로 한것이다. Table 2 亦是 以上의 計算과 같이 各 Tape에 對한 伸張距離를 나타낸 것이며 이들을 plotting하면 Fig.1과 같다.

Fig.1에서 二次曲線이라할때  $y = ax^2 + bx + c$  라는 基本式에서 未知係數 X(a, b, c)와  $\Delta x$  ( $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ )를 求하기 爲해 (10), (12)式을 使用하여 計算된 結果는 Table 3-1, Table 3-2와 같다.

Table. 1 張力에 따른 신장변화량(Eslon, Korea.1)

(張力 : kg, 신장거리 : m)

회수	1회 측정	2회 측정	3회 측정	평 균	거 리	신장거리
6	0.126	0.128	0.129	0.1277	49.9723	0.0277
7	0.136	0.137	0.138	0.1370	49.9630	0.0370
8	0.151	0.149	0.154	0.1513	49.9487	0.0513
9	0.161	0.162	0.159	0.1607	49.9393	0.0607
10	0.168	0.172	0.168	0.1693	49.9307	0.0693
11	0.176	0.176	0.178	0.1767	49.9233	0.0767
12	0.186	0.187	0.188	0.1870	49.9130	0.0870
13	0.136	0.196	0.199	0.1963	49.9037	0.0963
14	0.202	0.205	0.206	0.2043	49.8957	0.1043
15	0.214	0.214	0.215	0.2143	49.8857	0.1143

Table. 2 각종 Tape의 장력에 따른 신장변화량

종류 장력	ESLON TAPE (Korea 1)	ESLON TAPE Korea 2)	ESLON TAPE (Japan 1)	ESLON TAPE (Japan 2)	STEEL TAPE (Japan 1)	STEEL TAPE (Japan 2)
6	0.0277	0.0300	0.1404	0.0357	0.0003	0.0001
7	0.0370	0.0393	0.1478	0.0433	0.0013	0.0003
8	0.0513	0.0533	0.1532	0.0530	0.0027	0.0013
9	0.0607	0.0650	0.1600	0.0593	0.0037	0.0023
10	0.0693	0.0753	0.1654	0.0683	0.0050	0.0033
11	0.0767	0.0840	0.1738	0.0767	0.0060	0.0043
12	0.0870	0.0937	0.1824	0.0833	0.0077	0.0053
13	0.0963	0.1013	0.1882	0.0907	0.0087	0.0067
14	0.1043	0.1107	0.1946	0.1000	0.0097	0.0077
15	0.1143	0.1240	0.2020	0.1080	0.0107	0.0087

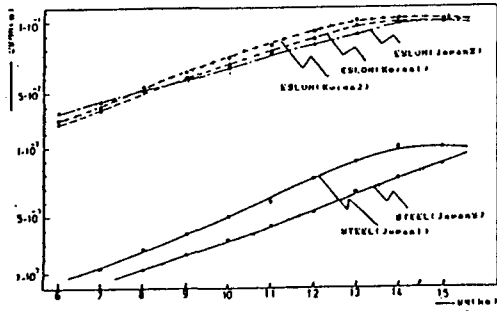


Fig. 1 각종 Tape의 장력-신장거리 관계곡선

Table 3-1에서 알 수 있는 바와 같이 Eslon (國産1, 2), Eslon(日産 2), Steel(日産 1)은 a 係數값이 (-)이므로 위로 彎曲을 나타내고 Eslon(日産 1), Steel(日産 2)는 아래로 彎曲된 曲線으로 그려지며 weight가 增加함에 따라 大體로  $\Delta X$ 의 값은 漸漸 減少함을 알 수 있다.

Table 3-1, Table 3-2의 結果를 利用하여 標準偏差를 求하면 Table 4-1, Table 4-2와 같다.

Table. 3-1 각 중량에 따른 미지계수(a, b, c)의 변화

Kind	Coef.	$\Delta P$	0	2	4	6	8	10
ESLON (Korea 1)	a		-1.519E-04	-1.687E-04	-1.766E-04	-1.812E-04	-1.842E-04	-1.864E-04
	b		1.266E-02	1.310E-02	1.331E-02	1.343E-02	1.352E-02	1.357E-02
	c		-4.242E-02	-4.534E-02	-4.672E-02	-4.752E-02	-4.805E-02	-4.842E-02
ESLON (Korea 2)	a		-1.663E-04	-1.862E-04	-1.956E-04	-2.011E-04	-2.047E-04	-2.072E-04
	b		1.368E-02	1.421E-02	1.446E-02	1.460E-02	1.470E-02	1.477E-02
	c		-4.265E-02	-4.971E-02	-5.135E-02	-5.230E-02	-5.293E-02	-5.337E-02
ESLON (Japan 1)	a		5.227E-05	6.040E-05	6.425E-05	6.649E-05	6.795E-05	6.899E-05
	b		5.767E-03	5.550E-30	5.448E-03	5.388E-03	5.349E-03	5.322E-03
	c		1.040E-01	1.055E-01	1.061E-01	1.065E-01	1.068E-01	1.069E-01
ESLON (Japan 2)	a		-1.023E-05	-1.571E-05	-1.830E-05	-1.981E-05	-2.080E-05	-2.149E-05
	b		8.194E-03	8.339E-03	8.408E-03	8.488E-03	8.475E-03	8.493E-03
	c		-1.299E-02	-1.394E-02	-1.439E-02	-1.466E-02	-1.483E-02	-1.495E-02
STEEL (Japan 1)	a		-6.061E-06	-7.139E-06	-7.650E-06	-7.947E-06	-8.141E-06	-8.279E-06
	b		1.312E-03	1.340E-03	1.354E-03	1.362E-03	1.367E-03	1.371E-03
	c		-7.473E-03	-7.660E-03	-7.749E-03	-7.801E-03	-7.835E-03	-7.859E-03
STELL (Japan 2)	a		1.169E-05	1.188E-05	1.197E-05	1.202E-05	1.205E-05	1.208E-05
	b		8.029E-04	7.975E-04	7.949E-04	7.934E-04	7.925E-04	7.918E-04
	c		-5.890E-03	-5.852E-03	-5.834E-03	-5.824E-03	-5.817E-03	-5.812E-03

Table.3-2 각 증량에 따른 미지계수( $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ )의 변화

Kind	Coef	$\Delta P$	0	2	4	6	8	10
			ESLON (Korea 1)	$\Delta a$	0	1.076E-05	1.167E-05	1.097E-05
	$\Delta b$	0	-2.863E-04	-3.105E-04	-2.917E-04	-2.662E-04	-2.420E-04	
	$\Delta c$	0	1.873E-03	2.031E-03	1.908E-03	1.742E-03	1.583E-03	
ESLON (Korea 2)	$\Delta a$	0	1.278E-05	1.386E-05	1.302E-05	1.188E-05	1.080E-05	
	$\Delta b$	0	-3.399E-04	-3.686E-04	-3.463E-04	-3.161E-04	-2.873E-04	
	$\Delta c$	0	2.223E-03	2.411E-03	2.265E-03	2.067E-03	1.879E-03	
ESLON (Japan 1)	$\Delta a$	0	-5.220E-06	-5.661E-06	-5.318E-06	-4.854E-06	-4.413E-06	
	$\Delta b$	0	1.388E-04	1.506E-04	1.415E-04	1.291E-04	1.174E-04	
	$\Delta c$	0	-9.082E-04	-9.850E-04	-9.253E-04	-8.446E-04	-7.678E-04	
ESLON (Japan 2)	$\Delta a$	0	3.518E-06	3.816E-06	3.585E-06	3.272E-06	2.974E-06	
	$\Delta b$	0	-9.358E-05	-1.015E-04	-9.535E-05	-8.703E-05	-7.912E-05	
	$\Delta c$	0	6.122E-04	6.639E-04	6.237E-04	5.693E-04	5.175E-04	
STEEL (Japan 1)	$\Delta a$	0	6.927E-07	7.512E-07	7.057E-07	6.442E-07	5.856E-07	
	$\Delta b$	0	-1.842E-05	-1.998E-05	-1.877E-05	-1.713E-05	-1.558E-05	
	$\Delta c$	0	1.205E-04	1.307E-04	1.228E-04	1.121E-04	1.019E-04	
STEEL (Japan 2)	$\Delta a$	0	-1.211E-07	-1.314E-07	-1.234E-07	-1.126E-07	-1.024E-07	
	$\Delta b$	0	3.464E-06	3.757E-06	3.529E-06	3.222E-06	2.929E-06	
	$\Delta c$	0	-2.442E-05	-2.648E-05	-2.488E-05	-2.271E-05	-2.064E-05	

Table. 4-1 각 증량에 따른 미지계수(a, b, c)의 표준편차 변화량

Kind	Coef	$\Delta P$	0	2	4	6	8	10
			ESLON (Korea 1)	ma	0	1.185E-05	1.261E-05	1.288E-05
	mb	0	3.153E-04	3.353E-04	3.426E-04	3.441E-04	3.425E-04	
	mc	0	2.063E-03	2.193E-03	2.241E-03	2.251E-03	2.241E-03	
ESLON (Korea 2)	ma	0	1.407E-05	1.500E-05	1.529E-05	1.536E-05	1.529E-05	
	mb	0	3.743E-04	3.980E-04	4.067E-04	4.085E-04	4.066E-04	
	mc	0	2.448E-03	2.604E-03	2.661E-03	2.672E-03	2.660E-03	
ESLON (Japan 1)	ma	0	5.749E-06	6.113E-06	6.247E-06	6.273E-06	6.245E-06	
	mb	0	1.529E-04	1.265E-04	1.553E-04	1.649E-04	1.682E-04	
	mc	0	1.000E-03	1.064E-03	1.087E-03	1.092E-03	1.087E-03	
ESLON (Japan 2)	ma	0	3.875E-06	4.121E-06	4.211E-06	4.228E-06	4.209E-06	
	mb	0	1.031E-04	1.096E-04	1.120E-04	1.125E-04	1.120E-04	
	mc	0	6.742E-04	7.170E-04	7.327E-04	7.357E-04	7.324E-04	
STEEL (Japan 1)	ma	0	7.629E-07	8.113E-07	8.290E-07	8.325E-07	8.287E-07	
	mb	0	2.029E-05	2.158E-05	2.205E-05	2.214E-05	2.204E-05	
	mc	0	1.327E-04	1.412E-04	1.442E-04	1.449E-04	1.442E-04	
STEEL (Japan 2)	ma	0	1.334E-07	1.419E-07	1.450E-07	1.456E-07	1.449E-07	
	mb	0	3.815E-06	4.057E-06	4.146E-06	4.163E-06	4.144E-06	
	mc	0	2.689E-05	2.860E-05	2.922E-05	2.935E-05	2.921E-05	

Table. 4-2 각 중량에 따른 미지계수( $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ )의 표준편차 변화량

Kind	Coef.	$\Delta P$	$\Delta P$					
			0	2	4	6	8	10
ESLON (Korea 1)	$\Delta ma$	0	7.610E-06	6.493E-06	5.581E-06	4.889E-06	4.377E-06	
	$\Delta mb$	0	2.024E-04	1.727E-04	1.484E-04	1.301E-04	1.164E-04	
	$\Delta mc$	0	1.324E-03	1.130E-03	9.710E-03	8.508E-03	7.615E-03	
ESLON (Korea 2)	$\Delta ma$	0	9.034E-06	7.707E-06	6.625E-06	5.804E-06	5.195E-06	
	$\Delta mb$	0	2.403E-04	2.050E-04	1.762E-04	1.544E-04	1.382E-04	
	$\Delta mc$	0	1.572E-03	1.341E-03	1.153E-03	1.010E-03	9.040E-03	
ESLON (Japan 1)	$\Delta ma$	0	3.691E-06	3.149E-06	2.706E-06	2.371E-06	2.123E-06	
	$\Delta mb$	0	9.818E-05	8.382E-05	7.203E-05	6.311E-05	5.649E-05	
	$\Delta mc$	0	6.422E-04	5.479E-04	4.709E-04	4.126E-04	3.693E-04	
ESLON (Japan 2)	$\Delta ma$	0	2.488E-06	2.122E-06	1.824E-06	1.598E-06	1.431E-06	
	$\Delta mb$	0	6.617E-05	5.135E-05	5.178E-05	4.784E-05	4.371E-05	
	$\Delta mc$	0	4.329E-04	3.693E-04	3.174E-04	2.781E-04	2.489E-04	
STEEL (Japan 1)	$\Delta ma$	0	4.898E-07	4.178E-07	3.591E-07	3.147E-07	2.817E-07	
	$\Delta mb$	0	1.303E-05	1.111E-05	9.553E-06	8.370E-06	7.492E-06	
	$\Delta mc$	0	8.522E-05	7.270E-05	6.249E-05	5.475E-05	4.901E-05	
STEEL (Japan 2)	$\Delta ma$	0	8.565E-08	7.307E-08	6.280E-08	5.502E-08	4.925E-08	
	$\Delta mb$	0	2.449E-06	2.090E-06	1.796E-06	1.574E-06	1.409E-06	
	$\Delta mc$	0	1.727E-05	1.473E-05	1.266E-05	1.109E-05	9.929E-06	

Table 4-1, Table 4-2에서 보는 바와 같이  
未知係數 a, b, c 그리고  $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ 의 標準偏差는 大端히 微少한 값으로서 거의 Zero에  
가깝고 weight가 增加함에 따라 前者는 漸次로  
增加하는 반면 後者는 減少함을 알 수 있다.  
또한 Table 4-1, Table 4-2를 알기 쉽게 各  
Tape에 따라서 plotting하면 Fig. 2-1~Fig.  
2-3과 같다.

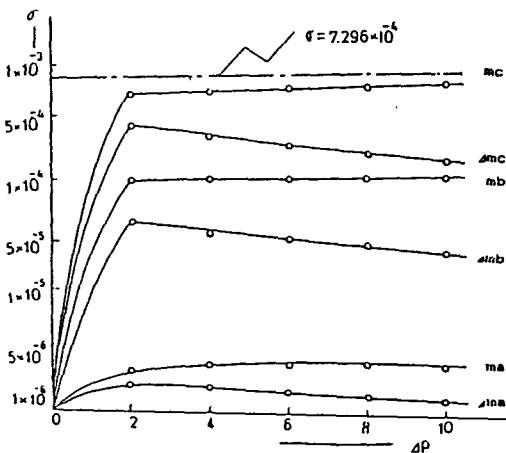


Fig. 2-1 각 중량에 따른 미지계수 X의 표준편차  $m_a, m_b, m_c$ 와  $\Delta X$ 의 표준편차  $\Delta m_a, \Delta m_b, \Delta m_c$ 의 변화곡선 (ESLON Korea2)

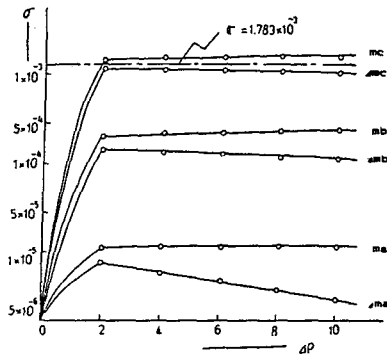


Fig. 2-2 각 중량에 따른 미지계수 X의 표준편차  $m_a, m_b, m_c$ 와  $\Delta X$ 의 표준편차  $\Delta m_a, \Delta m_b, \Delta m_c$ 의 변화곡선 (ESLON Japan2)

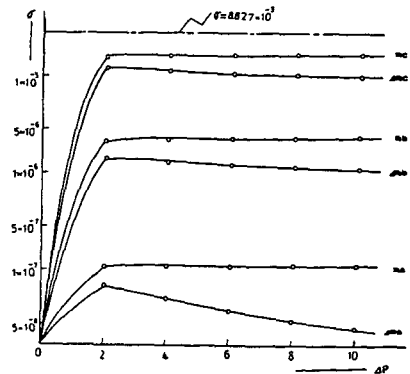


Fig. 2-3 각 중량에 따른 미지계수 X의 표준편차  $m_a, m_b, m_c$ 와  $\Delta X$ 의 표준편차  $\Delta m_a, \Delta m_b, \Delta m_c$ 의 변화곡선 (STEEL Japan2)

只今 Fig. 2-1~ Fig. 2-3에서 各 未知係數 a, b, c 그리고  $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ 의 各各에 對한 標準偏差를 求한 값은 未知係數 X(a, b, c) 그리고  $\Delta X(\Delta a, \Delta b, \Delta c)$ 를 包含한 綜合的인 標準偏差  $\sigma$ 의 範圍內에 있기 때문에 weight의 變動에 있어서 實際의 結果值에 對한 影響은 거의 無視할 수 있다. 여기서 綜合的인 標準偏差  $\sigma$ 를 計算한 結果는 Table 5와 같고 이를 圖示하면 Fig 3과 같다.

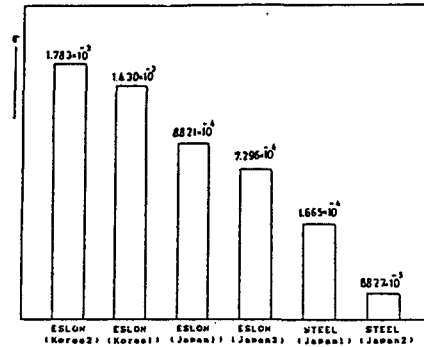


Fig. 3 各 Tape에 따른 표준편차의 비교

Table. 5 各 重量에 따른 표준편차의 변화량(각종 Tape)

Kind $\Delta P$	ESLON (Korea 1)	ESLON (Korea 2)	ESLON (Japan 1)	ESLON (Japan 2)	STEEL (Japan 1)	STEEL (Japan 2)
0	1.302E-03	1.638E-03	8.335E-04	7.031E-04	1.620E-04	8.798E-05
2	1.359E-03	1.702E-03	8.547E-04	7.145E-04	1.639E-04	8.810E-05
4	1.422E-03	1.774E-03	8.787E-04	7.276E-04	1.661E-04	8.824E-05
6	1.469E-03	1.827E-03	8.965E-04	7.375E-04	1.678E-04	8.835E-05
8	1.503E-03	1.865E-03	9.096E-04	7.447E-04	1.690E-04	8.843E-05
10	1.528E-03	1.894E-03	9.195E-04	7.502E-04	1.700E-04	8.850E-05
mean	1.430E-03	1.783E-03	8.821E-04	7.296E-04	1.665E-04	8.827E-05

지금 Fig. 3에서 보는 바와 같이 各 Tape의 標準偏差를 比較해 보면 Esilon(國產 2)이 가장

크고 다음은 Esilon(國產 1), ..., Steel(日產 2)의 順으로 나타났다.

Table. 6 各 重量에 따른 확률오차의 변화와 정도변화

Kind E A $\Delta P$	0	2	4	6	8	10	
ESLON (Korea 1)	E	8.780E-04	9.164E-04	9.594E-04	9.908E-04	1.014E-03	1.031E-03
	A	1/ 56950	1/ 54560	1/ 52114	1/ 50463	1/ 49326	1/ 48507
ESLON (Korea 2)	E	1.105E-03	1.148E-03	1.196E-03	1.232E-03	1.258E-03	1.277E-03
	A	1/ 45257	1/ 43555	1/ 41790	1/ 40584	1/ 39748	1/ 39143
ESLON (Japan 1)	E	5.622E-04	5.765E-04	5.927E-04	6.047E-04	6.136E-04	6.202E-04
	A	1/ 88935	1/ 86736	1/ 84361	1/ 82683	1/ 81492	1/ 80615
ESLON (Japan 2)	E	4.742E-04	4.819E-04	4.908E-04	4.974E-04	5.023E-04	5.060E-04
	A	1/ 105438	1/ 103750	1/ 101877	1/ 100521	1/ 99541	1/ 98812
STEEL (Japan 1)	E	1.093E-04	1.106E-04	1.121E-04	1.132E-04	1.140E-04	1.146E-04
	A	1/ 457659	1/ 452276	1/ 446217	1/ 839006	1/ 438543	1/ 436118
STEEL (Japan 2)	E	5.934E-05	5.942E-05	5.952E-05	5.959E-05	5.965E-05	5.969E-05
	A	1/ 842578	1/ 841404	1/ 840038	1/ 839006	1/ 838237	1/ 837650

또한 Table 6은 各 Tape에 對한 確率 誤差와 精度를 나타낸 것으로서 이를 알기 쉽게 圖示하면 Fig. 4-1~Fig. 4-3과 같다.

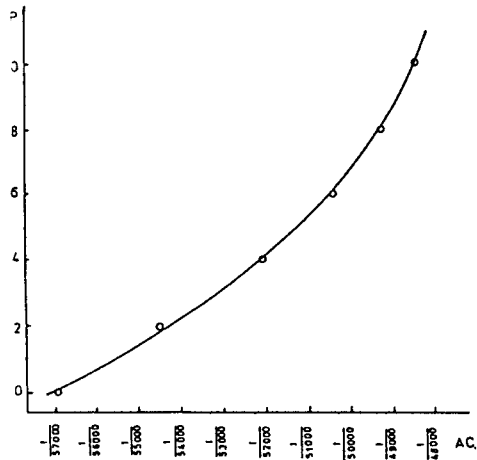


Fig. 4-1 중량과 정도의 상관곡선(Eslon. Korea 1)

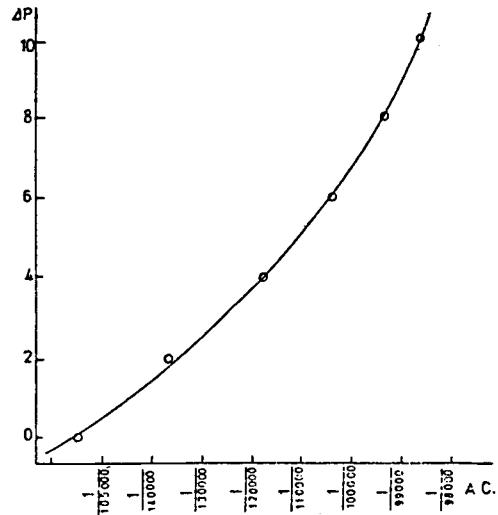


Fig. 4-2 중량과 정도의 상관곡선(Eslon. Korea 2)

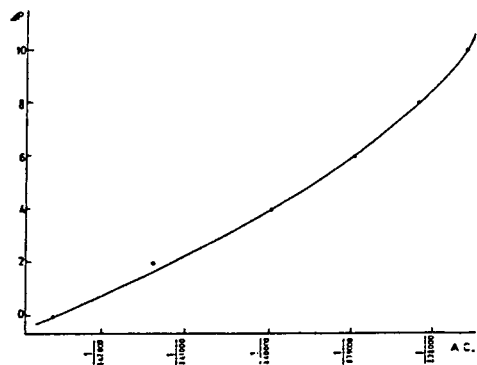


Fig. 4-3 중량과 정도의 상관곡선(Eslon. Japan 2)

Fig. 4-1~Fig. 4-3에서 알 수 있는 바와 같이  $\Delta P$ 가 증가함에 따라 重量은 精度의 제곱에 比例함을 알 수 있으며 또한 Fig. 5는 各 Tape의 精度를 Histo-graph로 表示한 것이다. 여기서 精度의 數値는 便宜上 精度의 分母값을 나타낸 것이다.

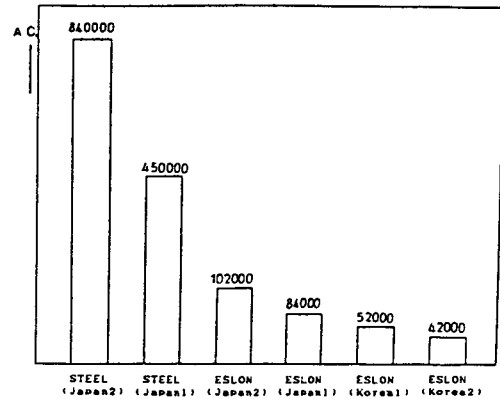


Fig. 5각종 Tape에 따른 정도의 비교

따라서 精度는 Fig. 5에서 Steel(日産 2)가 約1/840,000로서 第一 良好하고 다음은 Steel(日産 1) 그리고 Eslon(日産 2),...,Eslon(國産 2)의 順으로 나타났다.

#### 4. 結 論

本 研究를 通하여 考察한 結果 다음과 같은 結論을 얻을 수 있었다.

첫째: 標準偏差 $\sigma$ 는 Steel Tape가 가장 작고 精度는 그와 反對이며 精度와 標準偏差는 反比例의 關係가 있다.

둘째: 重量 $\Delta P$ 의 增加에 따라 未知係數  $\Delta X$ 는 漸次 減少하나 그 값은 大端히 작다. 그리고 이들 各各의 標準偏差  $ma, mb, mc$  및  $\Delta ma, \Delta mb, \Delta mc$ 는 標準偏差 $\sigma$ 의 範圍內에 있으므로 一般의 境遇 重量값이 變하여도 觀測值의 結果에는 거의 影響을 주지 않는다고 말할 수 있다.



#### 参考文献

1. 日本測地學會：測地學の概観, 1974, pp. 443-448.
2. 石川甲子男外 2人：測量の爲めの最少二乗法, 實教出版 1982, pp. 21-78, pp. 115-118.
3. 岡積満：測量の誤差計算, 森北出版 1975, pp. 5-10.
4. 石川甲子男外 3人：測量計算プログラム, 出海堂(1985), pp. 29-33.
5. 日本測量協會：現代測量學(3), 1981, pp.
6. 오재웅：수치해석 정보처리(I), 대우출판 1984, pp. 111-118.
7. Raymond E. Davis 外 3人：Surveying Theory And Practice, McGraw-Hill 1981, pp. 38-40, pp. 903-918.
8. Edward M. Mikhail 外 1人：Observations And Least Squares, Tomas Y. Crowell Co. 1976, pp. 101-109.
9. Harry Bouchasd 外 1人：Surveying, Harper & Row, 1982, pp. 745-796.