動的 計劃法에 의한 豫防交替模型에 관한 研究

A Study on a Preventive Replacement Model by the Dynamic Programming Method

趙 載 峃 *
黃 義 徹 **

Abstract

This paper is deals with the preventive replacement for the equipment which fails only when the total amount of damage reaches a prespecified failure level. Most of replacement model use time as their decision variable, but it is not appropriate for the cases in which failurses dependent on their cumulative damage levels. In this paper, a new type preventive replacement model is introduced in which an equipment is replaced before failure when the cumulative damage reaches a certain level or replaced on failure, whichever occures first.

The optimal replacement damage levels which minimize total expected cost are obtained by the Dynamic programmong Mathod when the number of use of the equipment is finite. A numerical example is also presented. The optimal preventive replacement policy when the equipment will be used for a finite time span is also discussed.

1. 序 論

최근 설비의 구조가 복잡해지고, 대형화됨에 따라 장비의 효율적 운용 방식과 더불어 경제적 交替方法에 대한 관심도가 높아지게 되었다. 이는 장비의 交替費用이 클경우 장비의 적절한 교체방법을 택함으로써 상당한 정도의 비용절감과 함께 장비의 利用度도 높아질 수 있기 때문으로 생각된다.

장비의 교체방법은 死後交替方法과 豫防交替方法의 두가지로 구분되는데, 만일 장비의 사용중 고장이 막대한 비용을 초래하거나 위험을 야기시킬 염려가 있을 경우에는 장비가 고장나기전에 적절한 시기를 택하여 새로운 장비로 미리 교체하여 줌으로써 장비의 운용중 고장을 줄일 수 있는 豫防交替方法을 사용하는 것이 바람직하다.

豫防交替方法에 대한 연구는 信頼度工學者들에[1] [2] 의하여 2차 세계대전이후 꾸준히 진행되어 왔으며 많은 분야에서 실제 연구된 수학적 모형이 이미 적용되어 왔다. 그러나 실제의 경우 지금까지 진행된 연구의 대부분은 장비의 고장이 시간을 決定變數로 하는 경우에만 국한되어 왔다. 그러나 장비의 고장은 時間變數이외에 더욱 직접적인 諸要因에 의존하여 발생하는 경우가 많다. 예를 들어, 자동차 타이어의 경우는 그 故障이 자동차타이어의 사용시간보다는 오히려 사용에 의해 발생하는 總磨耗量에 더 직접적인 관계를 갖고 있으며, 화학장비의 경우 화학약품과의 접촉에 의해 발생하는 腐飾程度에 따라 그 고장이 결정됨을 알 수 있다. 이때 마모량이나 부식정도가 측정가능하다면 이를 이용하는 편이 보다 직접적인 정보를 이용한다는 점에서 사용시간을 裝備交替의 기준으로 하는 壽命交替政策보다 더 효율적인 豫防交替方法이 될 수 있음이 당연하다.

* 慶熙大學校 產業工學科
** 漢陽大學校 產業工學科

마모량이나 부식정도등의 累積損傷水準(Cumulative damage level)을 기준으로 한 예방교체정책에 대한 연구는 T. Nakagawa, F proschan, R. C. Morey등에 의해 부분적으로 진행되어 왔으며 본 논문에서는 이들에 의해 아직 다루어지지 않은 장비의 使用回數가 유한한 경우의 豫防交替方法에 대해 논하고자 한다.

2. 假　定

본 논문에서 설정한 가정은 다음과 같다. (1) 장비의 使用回數는 총 N회로 한다. (2) 장비의 고장은 장비의 累積損傷水準이 특정한 값 W_0에 이를 때 발생한다. (3) 장비의 損傷은 장비의 사용에 의해서만 발생하며 1회 사용에 의한 損傷量은 확률적으로 발생하고 매회 독립이며 같은 형태의 確率分布函數를 갖는다. (4) 장비의 損傷水準은 항상 탐지 가능하다. (5) 장비의 예방교체는 장비의 사용중에 할 수 없으며 사용이 일단 끝난후 다음 사용시기 전에 행한다. (6) 장비의 豫防交替費用은 장비의 고장으로 인한 死後使用交替에 비해 적게 발생한다. (7) 고장 혹은 예방교체된 장비의 殘餘價値는 0으로 생각한다.

이상의 假定하에서 예방교체에 대한 다음 사항들을 생각해 볼 수 있다. 즉 사용전에 탐지된 장비의 損傷水準이 높음에도 불구하고 장비를 계속 사용한다면 사용중 고장률이 높아져서 막대한 비용을 초래할 위험이 커지게 되고, 낮은 損傷水準임에도 불구하고 사용전의 장비의 예방교체를 해준다면 불필요한 교체비용을 지불하는 결과가 될 것이므로 사용전에 탐지된 損傷水準에 따라 예방교체의 실행여부를 결정하는 정책이 필요하게 된다. 따라서 사용전에 검사된 장비의 손상수준이 X^*이하이면, 그 장비를 계속 사용하고, X^*이상이면 사용전에 장비의 예방교체를 행해 주는 것이 유리하게 될 장비의 最適損傷水準 X가 예방교체의 기준으로서 존재할 것이다. 이에 대해서는 T. Nakagawa가 장비의 使用回數가 무한한 경우에 再生理論을 이용하여 장비의 매회 사용시마다 동일한 값을 갖는 最適損傷水準 X^*를 구함으로써 일부는 해결이 되었다. 그러나 使用回數가 有限한 경우에는 매 사용시마다의 최적손상수준 X^*가 사용회수가 無限한 경우와는 달리 상이한 값을 갖게 된다.

이에 대한 예를들어 보면 使用回數가 1회 남았을 경우에는 다음회의 계속사용을 고려하지 않아도 되므로 使用回數가 여러회 남아있을 경우와 最適交替損傷水準이 달라질 것이기 때문이다. 이러한 이유로 사용회수가 유한한 경우에는 T. Nakagawa의 再生理論에 의한 방식으로는 최적해를 구할 수 없게 된다. 본 논문에서는 使用回數가 유한한 경우에 總期待費用을 최소화시키는 最適損傷水準을 위의 가정하에서 動的計劃法에 의하여 구해 보고자 한다.

3. 用語 및 記號 설명

본 모형에서 사용하는 용어 및 기호는 다음과 같다.

N : 장비의 使用回數

X : 장비의 1회 사용시 장비의 損傷量을 나타내는 確率變數

q(x) : 확률변수 x의 확률밀도함수

C_p : 예방교체비용

C_f : 사후교체비용

X_i^* : 장비의 使用回數가 i회 남았을 경우의 最適交替損傷水準

$V_r(i,z)$: 장비의 使用回數가 i회 남았을 경우 장비의 損傷水準이 z일때 장비를 예방교체할 경우 앞으로 발생한 總期待費用

$V_k(i,z)$: 장비의 使用回數가 i회 남았을 경우 장비의 損傷水準이 z일때 장비를 예방교체하지 않고 그대로 사용할 경우 발생한 總期待費用

$V(i,z)$: $\min\{V_r(i,z),\ V_k(i,z)\}$

4. 動的計劃法에 의한 模型의 展開

$V_r(i,z)$ 함수는 z에 독립한 상수값을 갖게 되고, $V_k(i,z)$ 함수는 z에 대한 單調增加函數가 되며, 이 두 함수가

교체되는 지점의 z가 最適交替損傷水準 X^*가 된다. 따라서 최적교체손상수준 X^*는 $V_r(i,z)=V_k(i,z)$를 만족하는 z의 값이 되고 이때의 정책은

$z \leq X^*$이면 장비의 계속사용

$z > X^*$이면 장비의 예방교체가 된다.

또한 본 정책하에서 발생되는 앞으로의 總期待費用 $V(i,z)$는

$$V(i,z)=\min\{V_r(i,z),\ V_k(i,z)\} = \begin{cases} V_r(i,z) \text{이면 } z \geq X^* \\ V_k(i,z) \text{이면 } z < X^* \text{가 된다.} \end{cases}$$

사용전 검사된 손상수준이 z이고, 장비를 1회 더 사용할 경우 장비의 운영중 고장확률은

$\int_{W_0-z}^{\infty} q(p)dp$이고, 고장나지 않을 확률은

$\int_0^{W_0-z} q(p)dp$가 된다.

이상의 결과로부터 동적계획법의 循環關係式(recursive equation)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$V_r(i,z)=C_p+\int_{W_0}^{\infty} q(p)dp[C+V(i-1,0)]+\int_0^{X^*_{i-1}} V_r(i-1,p)q(p)dp+\int_{X^*_{i-1}}^{W_0} V_r(i-1,p)q(p)dp$$

$V_k(i,z)$는 $z \leq X^*_{i-1}$과 $z > X^*_{i-1}$의 두가지 경우로 나누어 진다.

1) $z \leq X^*_{i-1}$의 경우는

$$V_k(i,z)=\int_{W_0-z}^{\infty} q(p)dp[C_f+V(i-1,0)]+\int_0^{X^*_{i-1}-z} V_k(i-1,z+p)q(p)dp+\int_{X^*_{i-1}-z}^{W_0-z} V(i-1,z+p)q(p)dp$$

이고

2) $z > X^*_{i-1}$의 경우는

$$V_k(i,z)=\int_{W_0-z} q(p)dp[C_f+V(i-1,0)]+\int_0^{W_0-z} V_r(i-1,z+p)q(p)dp$$

의 식으로 표시된다. 장비의 잔여가치가 0이므로 $V_r(0,z)=V_k(0,z)$이며 使用回數가 1회 남았을 경우 $(i=1)$의 사후교체비용 C_f는 사용중 고장이 발생하면 더 이상 교체할 필요가 없으므로 C_f-C_p로 생각함이 타당하다.

그러므로 $i=1$일 경우의 순환관계식은

$$V_r(i,z)=C_p+(C_f-C_p)\int_{W_0}^{\infty} q(p)dp$$
$$V_k(i,z)=(C_f-C_p)\int_{W_0-z}^{\infty} q(p)dp$$

5. 事例 分析

앞으로 5회 사용할 장비가 있다. 이 장비는 마모가 10㎝에 달하면 무조건 파열된다고 하며, 1회 사용에 의한 마모량은 확률적으로 발생하고, 평균이 4㎝인 지수 분포를 따른다고 한다. 장비를 豫防交替하는데 드는 비용은 100만원이고 만일 사용중 장비가 파열된다면 다음 사용을 위한 裝備交替費用 100만원이외에 평균 200만원의 손실이 발생한다고 한다. 장비의 예방교체는 장비의 사용중에 할 수 없고 일단 사용이 끝난 후의 정비기간중에 행해야 한다면 장비의 매회사용시의 장비교체의 기준이 되는 最適交替磨耗水準 $X(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*)$는 얼마인가? 단, 장비의 잔여가치는 없다고 한다.

본 논문에서 언급한 모형을 예제에 적용해 보면

$N=5$

$W=10$

$q(x)=1/4\ x\ e^{-\frac{x}{4}}$

$C_p=100$만원

$C_f=300$만원

$V_k(0,z)=V_r(0,z)=0$

(a) $i=1$에서의 결정

$$V_r(1,z)=C_p+(C_f-C_p)\int_{10}^{\infty} 1/4\ e^{-\frac{p}{4}}\ dp=116.42$$

$$V_k(1,z)=(C_f-C_p)\int_{10-z}^{\infty} 1/4\ e^{-\frac{p}{4}}\ dp=200.e^{-\frac{10-Z}{10}}$$

$V_r(1,z)=V_k(1,z)$를 만족하는 Z는 7.835

그러므로 $X_1^*=7.835$

(6) $i=2$에서의 결정

$$V_r(2,z)=C_p+\{C_f+V(1,0)\}\ \int_{10}^{\infty} 1/4\ e^{-\frac{p}{4}}+\int_0^{7.835} V_k(1,z)\ 1/4\ e^{-\frac{p}{4}}\ dp$$

$$+\int_{7.835}^{\infty} V_r(1,z)\ 1/4\ e^{-\frac{p}{4}}\ dp=164.99$$

$$V_k(2,z)=\{C_f+V(1,0)\}-\int_{10-z}^{\infty} 1/4\ e^{-\frac{p}{4}}\ dp+\int_0^{7.835-z} V_k(1,z+p)\ 1/4\ e^{-\frac{p}{4}}\ dp$$

$$+\int_{7.835-z}^{10-z} V(1,z+p)\ 1/4\ e^{-\frac{p}{4}}\ dp$$

$$=64.99\ e^{-\frac{z}{4}}\ -4.104\ e^{-\frac{z}{4}}\ z$$

$V_r(2,z)=V_k(2,z)$를 만족하는 z의 값은 Newton의 방법에 의해 컴퓨터로 풀면 5.39가 된다. 그러므로 $X_2^*=5.39$

(c) $i=3$에서의 결정

$$V_r(3,z)=C_p+\{C_f+V(2,0)\}\int_{10}^{\infty} 1/4\ e^{-\frac{p}{4}}\ dp+\int_0^{5.39} V_k(2,p)\ 1/4\ e^{-\frac{p}{4}}\ dp$$

$$=231.966$$

$V(3,z)$는 $0\leq Z\leq 5.39$일 경우와 $5.39<Z<10$일 경우로 구분된다.

i) $0\leq Z\leq 5.39$일 경우

$$V_k(3,z)=\{C_f+V(2,0)\}\int_{10-z}^{\infty} 1/4\ e^{-\frac{p}{4}}\ dp+\int_0^{5.39-z} V_k(2,z+p)\ 1/4\ e^{-\frac{p}{4}}\ dp$$

$$+\int_{5.39-z}^{10-Z} V_r(2,z+p)\ 1/4\ e^{-\frac{p}{4}}\ dp$$

$$=131.966\ e^{-\frac{z}{4}}-16.2475\ e^{-\frac{z}{4}}\ z+0.513\ e^{-\frac{z}{4}}\ z$$

이 식에서 $z=5.39$를 대입하면

$V_k(3,5.39)=228.157<V_r(3,z)$ 그러므로 $X_3^*>5.39$가 된다.

ii) $5.39<z<10$일 경우

$$V_k(3,z)=\{C_f+V(2,0)\}\ \int_{10-z}^{\infty} 1/4\ e^{-\frac{p}{4}}\ dp+\int_0^{10-z} V_r(2,z+p)\ 1/4\ e^{-\frac{p}{4}}\ dp$$

$$=164.99+16.4156\ \ e^{-\frac{z}{4}}$$

$V_r(3,z)=V_k(3,z)$를 만족하는 Z의 값은 5.6245가 된다.

그러므로, $X_3^*=5.6245$가 된다.

동일한 방법으로 i=4, i=5에 대해 각각 풀면 그 해는 $X_4^*=5.8135$, $X_5^*=5.77$이 된다. 위의 결과를 요약하면 표 1과 같다.

Table-1. Result of the Case Example

잔존사용회수(i)	5	4	3	2	1
최적마모수준(X^*)	$X^*_5=5.7700$	$X^*_4=5.8135$	$X^*_3=5.6245$	$X^*_2=5.3900$	$X^*_1=7.8350$

6. 裝備의 고장이 損傷水準에 대한 일반적인 確率分布函數를 따를 경우

장비의 고장이 累積損傷水準이 W_0에 이르렀을 때 발생하지 않고 손상수준에 대해 增加故障率을 갖는 일반적인 확률밀도함수 h(x)를 따른다.

최적교체손상수준을 구하기 위한 순환관계식은 다음과 같이 수정된다. 사용전 檢査水準이 Z이고 장비를 1회 더 사용할 경우 장비의 운영중 고장확률은

$$\int_0^\infty q(p)\frac{\int_Z^{Z+P} h(x)dx}{\int_Z^\infty h(x)dx}\,dp$$

이고 고장나지 않을 확률은

$$\int_0^\infty q(p)\frac{\int_{Z+P}^\infty h(x)dx}{\int_Z^\infty h(x)dx}\,dp$$

이므로 순환관계식은

$$V_r(i,z)=C_P+\int_0^\infty q(p)\int_0^P h(x)dx\,dp\cdot\{C_f+V(i-1,0)\}$$

$$+\int_0^{X^*_{i-1}} V_k(i-1,p)\,q(p)\int_P^\infty h(x)dx\,dp$$

$$+\int_{X^*_{i-1}}^\infty V_r(i-1,p)\,q(p)\int_P^\infty h(x)dx\,dp$$

$V_k(i,z)$는 $Z\le X^*_{i-1}$와 $Z>X^*_{i-1}$의 두가지 경우로 나누어지며

(1) $Z\le X^*_{i-1}$이면

$$V_k(i,z)=\int_0^\infty q(p)\frac{\int_Z^{Z+P} h(x)dx}{\int_Z^\infty h(x)dx}\,dp\,\{C_f+V(i-1,0)\}$$

$$+\int_0^{X^*_{i-1}-Z} V_k(i-1,z+p)\frac{\int_{Z+P}^\infty h(x)dx}{\int_Z^\infty h(x)dx}\,dp$$

$$+\int_{X^*_{i-1}-Z}^\infty V_r(i-1,z+p)q(p)\frac{\int_{Z+P}^\infty h(x)dx}{\int_Z^\infty h(x)dx}\,dp$$

(2) $Z>X^*_{i-1}$이이면

$$V_k(i,z)=\int_0^\infty q(p)\frac{\int_Z^{Z+P} h(x)dx}{\int_Z^\infty h(x)dx}\,dp\,\{(C_f+V(i-1,0)\}$$

$$+\int_0^\infty V_r(i-1,z+p)q(p)\frac{\int_{Z+P}^\infty h(x)dx}{\int_Z^\infty h(x)dx}\,dp$$

$V_r(0,z)=V_k(0,z)=0$이 된다.

7. 裝備의 使用年限이 有限한 경우

만일 장비의 사용연한이 유한하고 장비의 사용이 끝난 후 다음 장비사용까지의 시간간격의 분포가 確率分布 $g(t)$를 따른다면 사용연한이 t기간 남았을 경우 장비의 앞으로 남은 총사용회수는 離散的 확률분포를 따르며 그 기대치는 再生理論(Renewal theory)에서의 平生再生回數 $M(t)$가 된다. $g(t)$의 Laplace 변환을 $g^*(s)$라 하면

$M(t)=L^{-1}\{M(s)\}=L^{-1}\{1/s(g^*(s)/1\cdot g^*(s)\}$ 가 된다.

그러므로 장비의 사용연한이 t기간 남았을 경우 최적교체손상수준은 殘存使用回數 i가 $i=[M(t)]^+$일 경우의 최적손상수준을 사용하면 된다. 여기서 $[\ \ ]^+$는 소숫점 이하의 반올림 기호를 의미한다. 그러므로 장비사용의 잔존기간이 t인 시점에서의 장비의 손상수준 Z와 잔존사용회수 $i=[M(t)]^+$인 경우의 최적교체손상수준 X_i^*는 본 논문 3에서의 동적계획법에 의하여 구하면 된다.

8. 結　　論

장비의 고장이 累積損傷水準에 의존하는 경우에 장비의 예방교체의 기준이 되는 最適交替損傷水準을 구하는 수학적모형을 動的計劃法에 의하여 提示하였으며 이에 대한 적용예제를 첨부하였다. 본 모형은 장비의 使用回數가 유한한 경우에 적용 가능하며 최적해의 選定基準으로는 사용시간중 발생하는 總整備費用을 사용하였다. 또한 장비의 사용연한이 유한하고 장비사용의 시간적 간격이 확률분포를 따르는 경우의 최적교체손상수준을 再生理論을 이용하여 구하였다.

본 모형은 실제문제에 쉽게 적용할 수 있으며 수명교체모형에 비해 경제적이라는 장점이 있으나 일반적인 현실을 모두 고려하지는 못하였다는 가정상의 약점과 使用回數가 많은 경우의 계산상의 부담이 문제점으로 남아 있다.

參考文獻

1. Nakagawam T.(1976), "On a replacement problem of a cumulative damage model", *OPI. Res. Q.* Vol. 27(4), pp. 895−900.
2. Barlow, R. E. and F. Proschen(1966), *Mathematical Threory of Reliability*, John Wiley and Sons Inc., New York, pp. 240−245.
3. Barlow, R. E. and Hunter, L. C.(1960), "Mathematical Models For System Reliability," in *The Sylvania Technologist.*
4. A-Hameed, M. S., and Proshan, F.(1973), "Nonstationary Shock Models", *Stochastic Processes and their Application*, Vol. 1, pp. 383−404.
5. A-Hameed, M. S., and Proshan, F.(1975), "Shock model with underlying Birty process", *J. Apll. prob.*, Vol. 12, pp. 18−29.
6. Morey, R. C.(1960), "Some Stochastic Properties of a Compound Renewal Damage Model", *Oper. Res.*, Vol. 14, pp. 902−908.
7. Nemhauser, G. L.(1966), *Introduction to Dynamic Programming*, John Wiley and Sons Inc., New York, pp. 230-235.
8. Conte, S. D. and Carl deBoor(1972), "Elementary Numerical Analysis", *An algorithmic approch*, McGraw-Hill Book Co., pp. 48−52.
9. Ross, S. M.(1970), *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, San-Francisco, pp. 105−110.
10. Spiegel, M. R.(1965), *Laplace Transforms*, McGraw-Hill Book Co., New York, pp. 85−95.