工業經營學會誌 第10卷 第15輯 1987年 6月

품질특성이 선형적으로 변하는 경우의 목표 품질수준과 생산량의 결정

Control Procedure for a Process Subject to Discrete Linear Shift in Quality Characteristic

김 내 헌*

Abstract

A model for obtaining optimal target value and optimal production quantity of the process is described when the mean quality characteristic decreases according to the increase of production quantity.

Two different cases are considered where defective items can be either sold at a reduced unit price or discarded. Some numerical examples are also given.

I. 서 론

일반적인 제품 생산체계에서는 생산량이 증가함에 따라 공구의 마모나 조임쇠의 느슨함 등 생산설비의 변이에 의하여 생산되는 제품의 품질이 저하되어 불량률이 커지는 것이 보통이다. 예를 들어 식료품, 시멘트 등 제품을 포장하는 포장설비에서 생산량이 증가함에 따라 밸브가 닳거나 조임쇠의 풀어짐 등 여러 요인에 의해 기준량보다 적게 혹은 많이 포장되는 경우가 있다. 생산량이 적정수준 이상으로 증가하면 불량품이 많이 생기게 되어 이로 인한 비용을 줄이기 위하여는 일정한 비용을 들여 설비를 재조정하여 품질특성을 개선하여야 한다. 이 경우 초기 품질 수준을 목표 품질수준(target value)이라고 한다.

Gibra [2] 는 공정관리도 관리기법을 이용하여 품질특성의 평균이 선형으로 변하고 분산이 고정된 경우에 대하여 최적 평균목표 품질수준치를 찾는 문제를 다루었다. 품질특성의 하한만이 있는 경우와 상한 및 하한이 모두 주어진 경우에 대해 설비재조정비용 및 불량품 폐기로 인한 손실비용을 최소화하는 최적 평균목표 품질수준치를 찾았다. Kamat[3] 는 공정의 평균 품질특성이 선형으로 변하는 경우 베이지안의 입장에서 공정의 관리절차를 다루었고, Arcelus et al [1] 는 Gibra의 연구결과를 보다 일반화하여 품질특성의 평균과 분산이 모두 선형 또는 비선형으로 변하는 경우를 다루었다. Kim과 Jang [4]은 Gibra의 결과를 불량품이 폐기되지 않고 할인가격으로 판매할 수 있는 경우로 확장하여 최적 생산주기와 최적 목표 품질수준치를 구하였다.

위의 연구들은 품질특성의 평균과 분산이 시간에 대한 함수라고 가정하였다. 그러나 품질특성의 평균이나 분산은 시간보다는 생산량에 직접적으로 영향을 받는다고 볼 수 있다. 본 연구에서는 품질특성이 정규분포를 따른다 가정하고 품질특성의 평균이 생산량에 비례하여 변하는 공정에 대해 불량품이 폐기될 경우와 할인가격으로 판매되는 경우의 두가지 모형으로 나누어 품질특성의 하한이 주어진 경우에 목표 품질수준치를 구하고 설비 재조정후 다음 설비재조정시까지의 최적 생산량을 결정한다.

목표 품질수준치는 실제에서는 기술적 측면 등의 사정으로 인하여 어느 기준 이상으로 설정하지 못할 경우가 있고, 최적 생산량도 제약을 받을 수가 있으므로 위의 두가지의 각각의 모형에 대하여 다음의 세가지 경우를 고려하였다. 조정을 필요로 하는 최대 생산량이 주어졌다고 가정하고 목표 품질수준치를 구하는 경우, 목표 품질수준치가 결정되었다고 가정하고 최적 생산량을 구하는 경우 및 목표 품질

* 아주대학교 산업공학과 교수

수준치와 최적 생산량을 동시에 구하는 경우이다.

Ⅱ. 기호 및 가정

기호

X ; 품질특성을 표시하는 확률변수
μ_0 ; 재조정시의 평균 품질특성
μ_0^* ; 재조정시의 최적 평균 품질특성
α ; 단위 생산량당 평균 품질특성의 변화율
μ_j ; j 개 생산후의 평균 품질특성
$\mu_j = \mu_0 + j\alpha$
σ^2 ; 품질특성의 분산
L ; 품질특성의 규격 하한
P_a ; 양품의 정규 판매가격
P_r ; 불량품의 할인판매가격
g ; 단위 원료 비용
K ; 설비 재조정 비용
n ; 재조정후의 제품 생산량
n^* ; 재조정후의 최적 제품 생산량
C(·) ; 단위 생산제품당 기대 생산비용
P(·) ; 단위 생산제품당 기대 수입

가정

1. 품질특성 X는 j개의 제품생산후 평균 μ_j, 분산 σ^2의 정규분포를 따르며 μ_j는 생산량의 증가에 따라 선형적으로 변한다.
2. 품질특성 X는 규격 하한 L을 갖는다.
3. 품질특성 재조정후부터 다음 품질특성 재조정시까지의 불량률이 50% 이상을 넘지않는 범위의 n만 고려한다(즉, $\mu_j > L$).
4. 불량품 폐기시 폐기비용은 무시한다.

Ⅲ. 불량품 폐기 모형

생산된 제품중 품질특성의 규격 하한 L에 미달되는 모든 제품이 폐기되는 경우, 단위제품당 기대 생산비용을 최소로 하는 목표 품질수준치 μ_0^*와 재조정후의 최적 제품생산량 n^*를 찾고자 한다.

Ⅲ-1. 생산량이 정해진 경우

품질특성 X인 제품을 n개 생산한 생산자에게 야기되는 비용요소는 재조정 비용 K와 다음 두가지의 손실비용을 고려할 수 있다. 즉 품질규격 하한에 미달하는 경우 제품의 폐기로 발생하는 원료비 불량 손실비용 요소 gX, 0<X<L,와 규격 하한을 초과하는 경우 과다 투입된 원료비에 대한 과잉 손실비용 요소 g·(X−L), X≥L,이다. n개의 제품에 대한 총 기대 비용에서 단위제품당의 기대 비용을 구하면,

$$C(\mu_0) = \frac{K}{n} + g\sum_{j=1}^{n}\Big[\int_{-\infty}^{L} x f_j(x)\,dx + \int_{L}^{\infty}(x-L)\,f_j(x)\,dx\Big]/n \quad (1)$$

$$\text{단, } f_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^2}\, e^{-\frac{(x-\mu_j)^2}{2\sigma^2}}$$

이 된다. 단위 제품당의 기대 비용함수 $C(\mu_0)$는

$$C(\mu_0) = \frac{K}{n} + g\mu_0 + \frac{g\cdot\alpha\cdot(n+1)}{2} - \frac{gL}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{L}^{\infty} f_j(x)\,dx \;\cdots\cdots\; (2)$$

로 표시된다. (2)식을 μ_0에 대하여 미분하면 다음과 같이 된다.

$$C'(\mu_0) = g - \frac{gL}{n\sigma\sqrt{2\pi}}\sum_{j=1}^{n} e^{-\frac{(L-\mu_j)^2}{2\sigma^2}} \quad (3)$$

한편, 함수 $C(\mu_0)$의 μ_0에 대한 2차 도함수는

$$C''(\mu_0) = \frac{gL}{n\sigma^3\sqrt{2\pi}}\sum_{j=1}^{n}(\mu_j - L)\, e^{-\frac{(L-\mu_j)^2}{2\sigma^2}} \quad (4)$$

이 되며, 가정 3에 의해 $C''(\mu_0) > 0$이다. 따라서 (3)식을 0으로 놓고 풀은 μ_0값은 $C(\mu_0)$를 최소로 하는 최적해 μ_0^*가 된다.

예 1.

가스를 생산하는 A회사는 가스를 용기에 주입하는데 자동설비를 사용한다. 가스 1g 생산하는데 드는 원료 비용은 1원이고 제품의 규격하한은 1,000g이다. 총 생산량의 크기는 1,000이고 1회 재조정 비용은 50,000원이다. 지금까지의 자료로 보아 이 공정의 표준편차는 5g이고 생산량에 따른 공정 평균의 저하율은 단위 생산당 0.005이다. 최적 재조정 공정 평균 μ_0^*는 $\mu_0^* = 1017.82$가 된다.

Ⅲ-2. 재조정시의 목표 품질수준치가 고정되어 있는 경우

평균 품질특성의 초기값 μ_0는 기술상의 여건이나, 기타 여건으로 인해 한정된 수준 이상으로 조정할 수 없는 경우가 생길 수 있다. 이 경우에는 단위 제품당의 기대 비용을 최소화하는 최적 생산량 n^*를 결정하게 된다.

(2)식에서, 단위 제품당의 기대 비용은 다음과 같이 표시된다.

$$C(n) = \frac{K}{n} + g\mu_0 + \frac{g\cdot\alpha\cdot(n+1)}{2} - gL + \frac{gL}{n}\sum_{j=1}^{n}\Phi\left(\frac{L-\mu_j}{\sigma}\right) \cdots (5)$$

여기서, $\Phi(\cdot)$는 표준 정규분포의 누적확률분포 함수이다. 제품 한 단위를 추가 생산하는데 드는 비용을 $L(n)$이라 하면,

$$\begin{aligned} L(n) &= C(n) - C(n-1) \\ &= -\frac{K}{n(n-1)} + \frac{g\cdot\alpha}{2} \\ &\quad + gL\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Phi\left(\frac{L-\mu_j}{\sigma}\right) - \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\Phi\left(\frac{L-\mu_j}{\sigma}\right)\right] \cdots (6) \end{aligned}$$

이 된다. 임의의 자연수 $n(>3)$에 대해,

$$\begin{aligned} &L(n) - L(n-1) \\ &= \frac{2K}{n(n-1)(n-2)} \\ &\quad + \frac{2gL}{n(n-1)(n-2)}\sum_{j=1}^{n-2}\Phi\left(\frac{L-\mu_j}{\sigma}\right) \\ &\quad + gL\left[\frac{1}{n}\left\{\Phi\left(\frac{L-\mu_0-(n-1)j}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{L-\mu_0-nj}{\sigma}\right)\right\} - \frac{2}{n-2}\Phi\left(\frac{L-\mu_0-(n+1)j}{\sigma}\right)\right] \end{aligned}$$

이 된다. 위의 식 마지막항의 괄호속의 식의 값은 n에 관계없이 0에 가까운 값이므로 무시할 수 있고, 첫번째, 두번째항은 양의 값을 가지므로 $L(n)$은 근사적으로 증가함수라 볼 수 있다. 그런데,

$$L(2) = -\frac{K}{2} + \frac{g\cdot\alpha}{2} + \frac{gL}{2}\left[\Phi\left(\frac{L-\mu_2}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{L-\mu_1}{\sigma}\right)\right]$$

에서 품질특성 평균의 변화율 α가 실제로 작은 값임을 감안할 때

$$\Phi\left(\frac{L-\mu_2}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{L-\mu_1}{\sigma}\right)$$

은 무시할 수 있는 값이라 하겠다. 따라서, $L(2) < 0$으로 볼 수 있으므로 $L(n^*) \leq 0$, $L(n^*-1) > 0$인 최적 생산량 n^*가 존재한다면 유일하다는 것을 알 수 있다. 만일 이러한 n이 존재하지 않으면

$$n^* = \max\{\, j \mid L - \mu_0 - \alpha j \geq 0 \,\}$$

로 두면 된다.

예 2.

어떤 제품을 생산하는 회사에서 제품 1g에 투입되는 원료비용이 1원이고 규격 하한은 1,000g 이다. 목표 품질수준치가 1,012g으로 설정되어 있을 경우 공정 표준편차가 5g, 단위 생산당 평균 품질특성 저하율이 0.005, 1회 재조정 비용이 1,000원이라면 총 생산량 n^*는 264로 주어진다.

Ⅲ-3. 재조정시의 목표 품질수준치와 생산량이 모두 정해지지 않은 경우

평균 품질특성의 초기치와 생산량이 모두 정해지지 않은 경우에는 동시에 이 두 값을 결정하여야 한다.

단위 제품당의 기대 비용은 (5)식에서 다음과 같이 표시된다.

$$C(\mu_0, n) = \frac{K}{n} + g\mu_0 + \frac{g\alpha(n+1)}{2} - gL + \frac{gL}{n}\sum_{j=1}^{n}\Phi\left(\frac{L-\mu_j}{\sigma}\right) \quad (7)$$

(7)식을 μ_0에 대하여 미분하면

$$\frac{\partial C(\mu_0, n)}{\partial \mu_0} = g - \frac{gL}{n\sigma\sqrt{2\pi}}\sum_{j=1}^{n} e^{-\frac{(L-\mu_j)^2}{2\sigma^2}} \quad (8)$$

이 된다. 따라서, (8)식을 0으로 놓은 식

$$g - \frac{gL}{n\sigma\sqrt{2\pi}}\sum_{j=1}^{n} e^{-\frac{(L-\mu_j)^2}{2\sigma^2}} = 0 \cdots\cdots\cdots (9)$$

와

$$\begin{aligned} C(\mu_0, n) &\leq C(\mu_0, n-1) \\ C(\mu_0, n) &\leq C(\mu_0, n+1) \end{aligned} \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

을 만족하는 μ_0^*와 n^*를 구한다. μ_0^*와 n^*가 유일하게 존재하여 (7)식의 최소값을 준다는 증명은 어려운 일이다. 그러나 $C(\mu_0, n)$이 μ_0에 대해 오목함수이고, μ_0가 고정된 경우 (10)식을 만족하는

n을 구할 수 있으므로, (9)식과 (10)식을 만족하는 μ_0^*와 n^*를 수치해법으로 구하면 실제의 경우는 대체로 해결된다고 볼 수 있다.

예 3.

예 1에서 총 생산량이 정해지지 않은 경우에 목표 품질수준치 μ_0^*와 최적 생산량 n^*를 동시에 구해보자. 먼저 μ_0를 1,012로 두고 n을 구하면 1,037을 얻는다. 이 값에 대응하는 μ_0를 다시 구하면 1,017.95, 다시 n은 1,845를 얻는다. 이와같은 방법을 계속하면 다음의 도표와 같이 $\mu_0^* = 1,034.25$ $n^* = 4,877$에 수렴한다.

μ_0	n
1012	1037
1017.95	1845
⋮	⋮
1033.90	4802
1033.93	4808
1033.95	4813
⋮	⋮
1034.15	4858
1034.15	4865
1034.17	4880
1034.25	4877

도표. 목표 품질수준치 및 생산량

Ⅳ. 불량품 할인가격 판매 모형

앞 절에서는 불량품이 완전히 폐기되어 쓸 수 없는 경우에 대한 재조정 평균 품질특성과 생산량을 결정하는 문제를 다루었다. 본 절에서는 철근이나 철골의 경우처럼 품질특성의 규격 하한 L에 미달하더라도 할인된 가격으로 판매할 수 있는 경우를 다루고자 한다.

Ⅳ－1. 생산량이 정해진 경우

품질특성 X인 제품 n개를 생산한 생산자에게 발생하는 수입요소는 양품의 경우는 정규가격에서 과잉 손실비용을 감한

$$P_a - g\cdot(X-L),\ X \geq L$$

이며 불량품의 경우에는 감소된 원료비는 수입으로 볼 수 있으므로

$$P_r + g\cdot(L-X),\ 0 < X < L$$

이다. 따라서 재조정 비용 K를 고려한 단위제품당의 기대수입 $P(\mu_0)$는,

$$P(\mu_0) = -\frac{K}{n} + \sum_{j=1}^{n} \left[\int_L^{\infty} \{P_a - g\cdot(x-L)\} f_j(x)\,dx + \int_{-\infty}^{L} \{P_r + g\cdot(L-x)\} f_j(x)\,dx \right] / n \quad \cdots\cdots (11)$$

이 된다. 단위 제품당의 기대 수입함수 $P(\mu_0)$는

$$P(\mu_0) = -\frac{K}{n} - g\mu_0 + gL + P_r + \frac{P_a - P_r}{n} \sum_{j=1}^{n} \int_L^{\infty} f_j(x)\,dx \quad \cdots\ (12)$$

로 표시된다. (12)식을 μ_0에 대하여 미분하면 다음과 같이 된다.

$$P'(\mu_0) = -g + \frac{P_a - P_r}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(L-\mu_j)^2}{2\sigma^2}} \quad (13)$$

한편, 함수 $P(\mu_0)$의 μ_0에 대한 2차 도함수는

$$P''(\mu_0) = \frac{P_a - P_r}{n\sigma^3\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{n} (L-\mu_j) e^{-\frac{(L-\mu_j)^2}{2\sigma^2}} \quad \cdots\cdots (14)$$

이 된다. 가정 3에 의해 $P''(\mu_0) < 0$이 되어 (13)식을 0으로 놓고 풀은 μ_0값은 $P(\mu_0)$를 최대로 하는 최적해 μ_0^*가 된다.

예 4.

예 1의 경우 양품의 정규 판매가격이 3,000원 불량품의 할인판매가격이 2,000원이라고 하면 목표 품질수준치는 $\mu_0^* = 1017.82$로 구해진다.

Ⅳ－2. 재조정시의 목표 품질수준치가 고정되어 있는 경우

단위 제품당의 기대수입은 (12)식에서 다음과 같이 표시된다.

$$P(n) = -\frac{K}{n} - g\mu_0 + gL + P_a + \frac{P_r - P_a}{n} \sum_{j=1}^{n} \Phi\left(\frac{L-\mu_j}{\sigma}\right) \quad \cdots\cdots (15)$$

제품 한 단위의 추가생산판매로 얻는 수입의 증분을 M(n)이라 하면,

$$M(n)=P(n)-P(n-1)$$
$$=\frac{K}{n(n-1)}+(P_r-P_a)\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Phi\left(\frac{L-\mu_j}{\sigma}\right)-\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\Phi\left(\frac{L-\mu_j}{\sigma}\right)\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

이 된다.

$$M(n)-M(n-1)$$
$$=\frac{-2K}{n(n-1)(n-2)}+\frac{-2(P_a-P_r)}{n(n-1)(n-2)}\sum_{j=1}^{n-2}\Phi\left(\frac{L-\mu_j}{\sigma}\right)+(P_r-P_a)$$
$$\left[\frac{1}{n}\left\{\Phi\left(\frac{L-\mu_o-(n-1)j}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{L-\mu_o-n_j}{\sigma}\right)\right\}-\frac{2}{n-1}\Phi\left(\frac{L-\mu_o-(n-1)j}{\sigma}\right)\right]$$

을 Ⅲ－2절의 L(n)－L(n－1)과 비교할 때 M(n)은 근사적으로 감소함수라 볼 수 있다. 그런데

$$M(2)=\frac{K}{2}+\frac{P_r-P_a}{2}\left\{\Phi\left(\frac{L-\mu_2}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{L-\mu_1}{\sigma}\right)\right\}$$

로부터, $M(2)>0$으로 볼 수 있으므로 $M(n^*)\geqq 0$, $M(n^*+1)<0$인 최적 생산량 n^*가 존재한다면 유일하다는 것을 알 수 있다. 만일 이러한 n이 존재하지 않으면

$$n^*=\max\{j \mid L-\mu_o-\alpha j\geqq 0\}$$

로 두면 된다.

예 5.

예 2에서 정규가격이 3,000원 할인가격이 2,000원, 1회 재조정비용이 50,000원이라면 총 생산량 $n^*=1037$이 된다.

Ⅳ－3. 재조정시의 목표 품질수준치와 생산량이 모두 정해지지 않은 경우

단위 제품당의 기대수입은 (15)식에서 다음과 같이 표시된다.

$$P(\mu_o, n)=-\frac{K}{n}-g\mu_o+gL+P_a+\frac{P_r-P_a}{n}\sum_{j=1}^{n}\Phi\left(\frac{L-\mu_j}{\sigma}\right) \quad (17)$$

(17)식을 μ_o에 대하여 편미분하면

$$\frac{\partial P(\mu_o, n)}{\partial \mu_o}=-g+\frac{P_a-P_r}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(L-\mu_j)^2}{2\sigma^2}} \quad (18)$$

이 된다. 따라서 (18)식을 0으로 놓은 식

$$-g+\frac{P_a-P_r}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(L-\mu_j)^2}{2\sigma^2}}=0 \quad \cdots\cdots\cdots (19)$$

과

$$\left.\begin{array}{l}P(\mu_o, n)\geqq P(\mu_o, n-1)\\ P(\mu_o, n)\geqq P(\mu_o, n+1)\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

을 만족하는 μ_o^*와 n^*를 구한다. 여기서도 Ⅲ－3절과 마찬가지로 μ_o^*와 n^*가 유일하게 존재하여 (17)식의 최대값을 준다는 증명은 할 수 없지만, $P(\mu_o, n)$이 μ_o에 대해 볼록함수이고 μ_o가 고정된 경우 (20)식을 만족하는 n을 구할 수 있으므로, (19)식과 (20)식을 만족하는 μ_o^*와 n^*를 수치해법으로 구하면 실제의 문제는 대체로 해결할 수 있다.

예 6.

예 3에서 정규가격이 3,000원 할인가격이 2,000원이면 $\mu_o^*=1,034.25$, $n^*=4,877$로 얻어진다.

Ⅴ. 결 론

평균 품질특성이 생산량에 비례하여 저하되는 경우 두가지 가격 모형에 대한 목표 품질수준치와 생산량을 결정하는 문제를 다루었다. 품질특성의 저하가 시간보다는 생산량과 밀접하리라는 가정은 의미가 있다 하겠다.

참고문헌

(1) Arcelus, F. J., Banerjee, P. K. and Chandra, R. (1982) "Optimal Production Run for a Normally Distributed Quality Charac-

teristic Exhibiting Non-negative Shifts in Process Mean and Variance", IIE Transactions, Vol. 14, No. 2, p. 90 ~ 98.

(2) Gibra, I.N. (1967) "Optimal Control of Process Subject to Linear Trends", The Journal of Industrial Engineering, Vol. 18, p. 35 ~ 41.

(3) Kamat, S.J. (1976) "A Smoothed Bayes Control Procedure for the Control of a Variable Quality Characteristic with Linear Shift", Journal of Quality Technology, Vol. 8, No. 2, pp. 98 ~ 104.

(4) Kim, H.R., Jang, J.S. (1984) "Generalized Control Procedure for a Process Subject to Linear Shift", Journal of KSQC, Vol. 12, No. 2, pp. 6 ~ 10.