論文 87-24-6-4

보조분모분수식과 모멘트 정합에 의한 선형 시스템 간략법에 관한 연구

(A Study on the Linear System Simplification by Auxiliary Denominator Polynomial and Moment Matching)

黃 炯 秀,* 李 京 根,* 梁 海 權*

(Hyung Soo Hwang, Kyung Kuen Lee and Hae Kwon Yang)

要 約

고차수 선형 시불변 시스템 모델의 축소모델을 구하는 방법을 제안하였다. 원 시스템 모델의 분모식을 이용하여 보조분모분수식을 정의하고 이 식을 연분수 전개하여 축소모델 전달함수의 분모식을 계산하며, 축소모델의 분자식은 간소화된 모멘트 함수를 정의한 후, 이 함수를 이용하여 모멘트를 정합 시킴으로써 계산하였다. 이 방법은 역수변환이 필요없는 방법으로 원 시스템 모델이 안정하면 축소모델도 반드시 안정하며, 구해진 축소모델은 저주파에서 우수한 응답특성을 나타내었다.

Abstract

The model reduction method of the high order linear time invariant systems is proposed. The continuous fraction expansion of Auxiliary denominator polynomial is used to obtain denominator polynomial of the reduced order model, and the numerator polynomial of the reduced order model is obtained by equating the first some moments of the original and the reduced order model, using simplified moment function.

This method does not require the calculation of the reciprocal transformation which should be calculated in Routh approximation, furthemore the stability of the reduced order model is guaranted if original system is stable.

Responses of this method showed us good characteristics.

I. 서 론

고차수의 대규모 시스템을 직접 해석 및 설계하거나, 컴퓨터 시뮬레이션, 최적 제어기의 설계, 온-라인 컴퓨터 처리 등을 한다는 것은 대단히 힘든 일이다. 그래서 그러한 고차수의 대규모 시스템을 저차수 시스템으로 변화하여 처리하는 방법이 많이 연구되었다.

원 시스템 모델의 우세극점을 축소모델에 유지하도록 하는데에 기초를 둔 집성법은 고차수의 원 시스템이 안정하면 축소모델도 반드시 안정하다는 장점이 있으나 시스템 모델이 상태방정식으로 표시되어 있어야 하며, 또한 고차수 상태방정식의 고유치와 고유벡터를 계산하여야만 하는데 이러한 계산은 대단히 복잡하고 힘들어 실제 대규모 시스템 모델의 축소모델을 구하는데 이용하기 곤란한 방법이며,[1,2] 고유치 및 고유벡터 등을 계산할 필요가 없어 계산상 대단히 간편한 연분수 전개법, padé 간략법, 모멘트 정합법 등은 원 시스

*正會員, 群山開放大學 電子計算學科

(Dept. of Computer Sci., Kunsan Open Univ.)

接受日字 : 1987年 4月 22日

(※ 이 논문은 1986년도 문교부 학술연구 조성비에 의하여 연구 되었음.)

템 모델이 안정할 경우, 이 방법들에 의해서 구해진 축소모델의 안정도를 보장할 수 없는 커다란 단점을 내포하고 있다.[3,4,10,13,14]

Hutton[7] 등은 Routh 안정도 판별식을 이용하여 안정한 원 시스템 모델의 축소모델이 반드시 안정한 Routh 간략법을 제시하였다.

이 Routh 간략법은 원 시스템 모델의 고유치및 고유벡터를 계산할 필요가 없고 원 시스템 모델이 안정하면 축소 모델도 반드시 안정한 두 가지 중요한 장점을 가지고 있다. 따라서 집성법, 연분수 전개법등 보다 우수하다고 평가되고 있다. 그러나 Routh 간략법은 역수변환을 거쳐 Alpha표 및 Beta표를 만들고 이 표에 의해서 Alpha-Beta 전개식으로 전개한 후에 축소모델을 구하여 다시 역수변환을 해야하는 등의 복잡한 계산 과정을 거쳐야 한다. 그래서 Krishnamurthy[8] 등은 Alpha표 및 beta표를 만들때 원 시스템 모델의 분모와 분자 계수를 역순으로 적용하여 역수변환을 제거하려는 방법을 제시하였으며, 이 방법을 Rao[6] 등이 더욱 연구하여 Gamma표와 Delta표 및 Gamma-Delta 전개식을 이용하여 역수 변환을 제거한 방법을 제시하였다. 이 방법들은 역수변환을 제거한것이 아니라 역수변환과정을 변경했을 뿐 Routh 간략법과 똑같은 방법이다.

그래서 본 논문에서는 보조분모분수식을 정의하고 이 식을 연분수 전개하여 축소모델의 분모식을 구하고 간소화된 모멘트 함수를 정의한 후에 이 함수를 이용하여 모멘트를 정합 시킴으로써 축소모델의 분자식을을 계산하는 방법을 제시한다. 이 방법은 Routh 간략법과 같이 원시스템 모델이 안정하면 축소모델도 반드시 안정하며 역수변환을 할 필요가 없어 계산상 대단히 간편한 대규모 시스템 간략법이다.

Ⅱ. Routh 간략법의 개요[7]

Hutton등은 안정한 시스템 모델에 대한 안정한 축소모델을 얻기 위하여 Routh-Hurwitz의 안정판별에서 사용하는 Routh표를 이용하였다.

그 기본원리는 Routh표를 만들고 원하는 바의 축소모델의 Routh표가 원 시스템의 것과 축소모델의 차수까지 일치하도록 하는 것이다.

1. Alpha-Beta 전개식

n차 시스템 모델의 전달함수가 다음과 같이 표시되었다고 하자.

$$H(s)=\frac{b_1 s^{n-1}+b_2 s^{n-2}+\cdots\cdots+b_n}{a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+a_2 s^{n-2}+\cdots\cdots+a_n} \qquad (1)$$

이 시스템이 안정하다면 식(1)의 전달함수는 항상 다음과 같은 모양으로 전개시킬 수 있다.

$$\begin{aligned}H(s)&=\beta_1 F_1(s)+\beta_2 F_1(s)F_2(s)+\cdots+\beta_n F_1(s)F_2(s)\cdots F_n(s)\\&=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\prod_{i=1}^{i}F_i(s)\end{aligned} \qquad (2)$$

단, $\beta_i(i=1,2,3\cdots n)$는 상수이고 $F_i(i=2,3,4\cdots n)$는 다음과 같은 연분수 전개식 이다.

$$F_i(s)=\cfrac{1}{\alpha_i s+\cfrac{1}{\alpha_{i+1}s+\cfrac{1}{\ddots\, \alpha_{n-1}s+\cfrac{1}{\alpha_n s}}}} \qquad (3)$$

단, i=1인 $F_1(s)$에 대해서는 약간 변경하여 식(3)의 첫번째 항이 $\alpha_1 s$ 대신에 $1+\alpha_1 s$로 바뀌어 진다.

식(2)를 Alpha-Beta 전개식이라 부르며 Routh 간략법 이론의 기본이 되는 식이다.

2. Routh 수렴식(Routh Convergent)

n차 전달함수 H(s)에 대한 K차 Routh 수렴식 $R_k(s)$는 alpha-beta 전개식에서 K항 이하는 무시하고 얻어진 식을 다시 s의 유리식 형태로 표시하여 나타낸 식을 말한다.

그런데 위의 방법에 의하여 얻어진 수렴식 $R_k(s)$는 고주파에 대한 것으로 일반적인 제어계에서는 저주파의 축소모델이 요구되므로 이 Routh 수렴식은 적당하지 못하다.

3. 역수변환(Reciprocal Transformation)

저주파에 대한 축소모델의 전달함수를 구하기 위하여 먼저 식(1)을 역수변환하여 $\hat{H}(s)$로 변환한다.

$$\hat{H}(s)=\frac{1}{s}H\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{b_n s^{n-1}+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+b_1}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_0} \qquad (4)$$

$\hat{H}(s)$는 H(s)의 분자와 분모식에서 그 계수들의 순서를 바꾸어 놓은 것으로 $\hat{H}(s)$의 역수변환은 다시 H(s)로 돌아갈 수 있을 것임을 알 수 있다.

여기서 중요한 성질의 하나는 $\hat{H}(s)$의 극들은 H(s)의 극들의 역수라는 것이다.

Ⅲ. 보조분모분수식과 모멘트 정합에 의한 시스템 모델 간략법

Routh 간략법은 고유치 및 고유벡터를 계산할 필요가 없고 원 시스템 모델이 안정하면 축소모델도 반드시 안정한 우수한 장점을 가지고 있으나 두번의 역수변환을 거쳐야 하며 대규모 시스템의 축소모델을 구할 때에 컴퓨터를 이용하여 계산하여야 하나 프로그램을 작성하는 것이 쉽지 않다. 그래서 본 논문에서는 원 시스템 모델이 안정하면 축소 모델도 반드시 안정하며 역수변환을 하지 않아 계산이 간편하고 모든 계산식들

의 일반식을 유도하여 간단하게 컴퓨터 프로그램을 작성할 수 있는 새로운 시스템 간략법을 제시한다.

이 방법은 원 시스템 모델의 전달함수 분모식을 기수차 부분과 우수차 부분으로 나누어 기수차 부분을 분모로 우수차 부분을 분자로 하여 보조분모분수식을 만들고 이 분수식을 연분수 전개한 다음, 이 연분수 전개식에서 축소모델의 차수만큼을 취하여 s의 유리식으로 변환하여 축소모델의 분모식을 구하고 축소모델의 분자식은 간소화된 모멘트 함수를 정의한 후에 원 시스템 모델과 축소모델의 정상상태 응답을 일치시키는데 중점을 두어 연구된 모멘트 정합법을 응용하여 계산하는 방법이다.

1. 축소모델의 분모식 계산

고차수 원 시스템의 전달함수 G(s)를 식(5)와 같이 표시하자.

$$G(s)=\frac{b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots\cdots+b_n}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots\cdots+a_n} \qquad (5)$$

식(5)에서 그 분모식 만을 취해서 그 식의 기수차항과 우수차항으로 나누어 우수차항을 분자로 기수차항을 분모로 하여 오름차순으로 정리한 식(6)과 같은 보조분모분수식을 만든다.

$$A(s)=\frac{a_n+a_{n-2}s^2+a_{n-4}s^4+\cdots\cdots}{a_{n-1}s+a_{n-3}s^3+a_{n-5}s^5+\cdots\cdots} \qquad (6)$$

식(6)을 연분수 전개하면 식(7)과 같다.

$$A(s)=\frac{a_n}{a_{n-1}s}+\cfrac{1}{\cfrac{a_{n-1}}{\left(a_{n-2}-\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot a_{n-3}\right)s}+\cfrac{1}{\cfrac{a_{n-2}-\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot a_{n-3}}{\left(a_{n-3}-a_{n-1}\cdot\cfrac{a_{n-4}-\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot a_{n-5}}{a_{n-2}-\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot a_{n-3}}\right)s}+\cfrac{1}{\ddots}}} \qquad (7)$$

식(7)을 치환하여 정리하면 식(8)과 같다.

$$A(s)=\frac{k_1}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{k_2}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{k_3}{s}+\cfrac{1}{\ddots\ \cfrac{k_n}{s}}}} \qquad (8)$$

그 다음 이 식에서 축소모델로 얻고져 하는 차수만큼을 취해서 s의 유리식으로 전개한다. 이렇게 하여 얻은 분수식의 분모항과 분자항을 합한 후에 차수 순으로 정리하여 얻은 식을 축소모델 전달함수의 분모식으로 한다. 이때 연분수 전개식의 계수, k_n는 Routh 간략법의 역수변환을 개선하기 위해서 Rao[6] 등이 제시한 Gamma표의 r_1값과 일치하므로 구해진 축소모델의 분모식은 Routh 간략법에 의해서 구해진 축소모델 전달함수의 분모식과 일치한다. 그러므로 원 시스템 모델이 안정하면 축소모델도 반드시 안정하다.

또한 고차수의 원 시스템 모델의 보조분모분수식을 연분수 전개하는 것은 쉽지 않다. 그래서 연분수 전개식의 계수 k_n과 k_n값을 이용하여 축소모델 전달함수의 분모식을 컴퓨터를 이용하여 간단히 구할 수 있도록 연분수 전개식의 계수 일반식과 축소모델의 분모식 계산 일반식을 유도하였다.

(1) 연분수 전개식의 계수(k_n) 계산 일반식

보조분모분수식의 분모와 분자식의 계수를 2차원 배열을 이용하여 식(9)와 같이 표시하고 이 식을 초기치로 하여 연분수 전개식, 식(7)의 계수를 일반식으로 나타내면 식(10)과 같다.

$$a_{00}=a_n,\quad a_{02}=a_{n-2},\quad a_{04}=a_{n-4}\cdots\cdots$$
$$a_{10}=a_{n-1},\ a_{12}=a_{n-3},\quad a_{14}=a_{n-5}\cdots\cdots \qquad (9)$$
$$a_{nl}=a_{n-2,l+2}-k_{n-1}\cdot a_{n-1,l+2}\quad \begin{matrix} n=2,3,4\cdots \\ l=0,2,4\cdots \end{matrix}$$

$$k_n=\frac{a_{n-1,0}}{a_{n,0}}\qquad 단,\ k_1=\frac{a_{0,0}}{a_{1,0}} \qquad (10)$$

2) 축소모델의 분모식($D_n(s)$) 계산 일반식

축소모델의 분모식은 연분수 전개식, 식(8)에서 축소모델의 차수만큼을 취해서 구해진다. 즉, 1차, 2차, 3차, …의 축소모델의 분모식은 식(11)과 같다.

$$D_1(s)=s+k_1$$
$$D_2(s)=s^2+k_2s+k_1k_2$$
$$D_3(s)=s^3+(k_1+k_3)s^2+k_2k_3s+k_1k_2k_3$$
$$D_4(s)=s^4+(k_2+k_4)s^3+(k_1k_4+k_1k_2+k_3k_4)s^2+k_2k_3k_4s+k_1k_2k_3k_4$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad (11)$$

식(11)을 일반식으로 표시하면 식(12)와 같다.

$$D_n=s^2D_{n-2}(s)+k_nD_{n-1}(s) \qquad (12)$$

(단, $D_0=1$, $D_1=s+k_1$이다.)

2. 축소모델의 분자식 계산

축소모델의 분자식은 원 시스템 모델의 정상상태 응답과 축소모델의 정상상태 응답이 일치하도록 하기 위해서 모멘트 정합법을 이용한다.[13,14]

전달함수 G(s)의 모멘트 함수는 식(13)과 같다.

$$T_i=\frac{(-1)^i}{i!}\int_0^\infty t^i g(t)\ dt \qquad (13)$$

여기서 g(t)는 전달함수 G(s)의 역라프라스 변환이다.

식(13)을 이용하여 모멘트를 계산하기 위해서는 적분을 해야 되는데 이것은 대단히 복잡하므로 식(14) 처럼

적분할 필요없이 모멘트 값을 계산하는 방법을 이용한다. 먼저 전달함수 G(s)를 오름차순으로 정리한 후 멱급수로 전개하여 멱급수 전개식의 계수를 이용하면 쉽게 모멘트를 계산할 수 있다.

멱급수 전개식의 계수를 이용한 모멘트 함수는 식(14)와 같다.

$$T_i=\frac{(-1)^i}{i\,!}M_i \tag{14}$$

여기서 M_i는 멱급수 전개식의 i번째 항의 계수이며 $i=0,1,2,3\cdots$이다.

그러나 원시스템 모델의 전달함수와 축소모델 전달함수의 모멘트를 일치시켜 분자식의 계수를 계산하기 때문에 식(14)의 모멘트 함수 $(-1)^i/i\,!\,(M_i)$중 $(-1)^i/i\,!$ 부분은 생략해도 축소모델의 분자식 계수는 변하지 않으므로 본 논문에서는 식(15) 처럼 간략화된 모멘트 함수를 정의하여 이용한다.

$$T_i=M_i \tag{15}$$

여기서 M_i는 멱급수 전개식의 i번째 항의 계수이다.

1) 원 시스템 모델 및 축소모델 전달함수의 모멘트 계산

고차수의 원시스템 모델의 전달함수 식(5)를 오름차순으로 표시하면 식(16)과 같다.

$$G(s)=\frac{b_n+b_{n-1}s+b_{n-2}s^2+\cdots+b_1s^{n-1}}{a_n+a_{n-1}s+a_{n-2}s^2+\cdots a_0s^n} \tag{16}$$

식(16)을 멱급수로 전개하면 식(17)과 같다.

$$G(s)=M_0+M_1s+M_2s^2+\cdots\cdots\cdots \tag{17}$$

식(17)의 계수, M_0, M_1, M_2, ⋯는 식(15)에 대입하여 구해진 원 시스템 모델 전달 함수의 각 항의 모멘트 값이다.

축소모델의 모멘트를 계산하기 위해서 먼저 보조분모분수식에 의해서 구해진 축소모델의 분모식을 이용하여 축소모델의 전달함수 $G_r(s)$를 다음과 같이 오름차순으로 정의하면 식(18)과 같다.

$$G_r(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N_m+N_{m-1}s+N_{m-2}s^2+\cdots+N_1s^{m-1}}{D_m+D_{m-1}s+D_{m-2}s^2+\cdots+D_0s^m} \tag{18}$$

(단, $m\ll n$이다.)

식(18)을 멱급수로 전개하면 식(19)와 같다.

$$G_r(s)=\frac{N_m}{D_m}+\frac{\left(N_{m-1}-D_{m-1}\frac{N_m}{D_m}\right)s}{D_m}+\left(\frac{N_{m-2}-D_{m-2}\frac{N_m}{D_m}}{D_m}-\frac{D_{m-1}\left(N_{m-1}-D_{m-1}\frac{N_m}{D_m}\right)}{D_m^2}\right)s^2+\cdots\cdots \tag{19}$$

식(19)를 치환하여 정리하면 식(20)과 같다.

$$G_r(s)=M_{r0}+M_{r1}s+M_{r2}s^2+\cdots\cdots \tag{20}$$

식(20)의 계수, M_{r0}, M_{r1}, M_{r2}, ⋯⋯는 식(15)에 대입하여 구해진 축소모델 전달함수의 각 항의 모멘트 값이다.

2) 축소모델 분자식의 계수 계산

축소모델의 분모식은 이미 구해졌으므로 분자식만 구하면 완전한 축소모델이 되는데, 분자식은 원 시스템 모델 전달함수와 축소모델 전달함수의 모멘트를 일치시킴으로써 쉽게 구해진다. 즉 원 시스템 모델의 모멘트 식(17)의 계수와 축소모델의 모멘트 식(20)의 계수를 식(21)처럼 각각 일치시켜 계산하면 축소모델의 계수가 구해진다.

$$\begin{aligned} M_0&=M_{r0}\\ M_1&=M_{r1}\\ M_2&=M_{r2}\\ &\vdots \end{aligned} \tag{21}$$

식(21)에 식(19)의 축소모델 멱급수 전개식의 계수를 대입하여 축소모델 분자식의 계수 N_m, N_{m-1}, N_{m-2}, ⋯에 대하여 정리하면 식(22)와 같다.

$$\begin{aligned} N_m&=M_0D_m\\ N_{m-1}&=M_1D_m+M_0D_{m-1}\\ N_{m-2}&=M_2D_m+M_1D_{m-1}+M_0D_{m-2}\\ &\ \ \vdots\qquad\qquad\vdots\\ N_1&=M_{m-1}D_m+M_{m-2}D_{m-1}+\cdots+M_0D_1 \end{aligned} \tag{22}$$

식(22)를 행열로 표시하면 식(23)과 같다.

$$\begin{bmatrix} N_m\\ N_{m-1}\\ N_{m-2}\\ \vdots\\ N_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ M_1 & M_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ M_2 & M_1 & M_0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ M_{m-1} & M_{m-2} & \cdots & \cdots & \cdots & M_1 & M_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_m\\ D_{m-1}\\ D_{m-2}\\ \vdots\\ D_1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

식(23)의 우변 두 행열중 D_m, D_{m-1}, ⋯D_1은 보조분모분수식의 연분수 전개식(8)을 축소모델의 차수만큼을 취하여 구해졌고, M_0, M_1, M_2⋯M_{m-1}은 원 시스템 모델의 멱급수 전개식 (17)에 의해서 구해졌으므로 식(23)의 행열식을 계산하면 축소모델 분자식의 계수가 구해진다.

3) 축소모델의 분자식 계산을 위한 멱급수 전개식의 계수계산 일반식

멱급수 전개식의 각 계수를 구하기 위해서는 전달함수의 분자를 분모로 직접 나누면 되나, 이 직접 계산 방법은 차수가 증가함에 따라 대단히 복잡하여져서 계산하기 힘들다. 그래서 멱급수 전개식의 계수를 컴퓨터를 이용하여 쉽게 계산할 수 있도록 일반식을 유도하였다. 전달함수 G(s)를 오름차순으로 정리한 식(16)

의 분자, 분모의 계수를 a_n으로 나누면 식(24)와 같다.

$$G(s)=\frac{\frac{b_n}{a_n}+\frac{b_{n-1}}{a_n}s+\frac{b_{n-2}}{a_n}s^2+\cdots+\frac{b_1}{a_n}s^{n-1}}{1+\frac{a_{n-1}}{a_n}s+\frac{a_{n-2}}{a_n}s^2+\cdots+\frac{a_0}{a_n}s^n} \tag{24}$$

식(24)의 계수를 치환하여 정리하면 식(25)와 같다.

$$G(s)=\frac{A_{21}+A_{22}s+A_{23}s^2+\cdots+A_{2,n}s^{n-1}}{1+A_{12}s+A_{13}s^2+\cdots+A_{1,n+1}s^n} \tag{25}$$

식(25)를 멱급수로 전개하면 식(26)과 같다.

$$G(s)=A_{21}-(A_{21}\cdot A_{12}-A_{22})s+(A_{23}-A_{21}\cdot A_{13}-A_{12}A_{22}+A_{21}\cdot A_{12}^2)s^2\cdots\cdots \tag{26}$$

식(26)을 간단히 쓰면 식(27)과 같다.

$$G(s)=A_{21}-A_{31}s+A_{41}s^2-A_{51}s^3+A_{61}s^4\cdots\cdots \tag{27}$$

식(27)의 A_{21}은 식(25)의 A_{21}이며 $A_{31}, A_{41}, A_{51}, \cdots$는 식(28)과 같은 일반식에 의해서 표시할 수 있다.

$$A_{k,l}=A_{k-1,1}\cdot A_{1,l+1}-A_{k-1,l+1} \tag{28}$$

$$\begin{pmatrix} k=3,\ 4,\ 5\cdots \\ l=1,\ 2,\ 3\cdots \end{pmatrix}$$

단, 초기치 A_{21}, A_{22}, A_{23}, …와 A_{12}, $A_{13}A_{14}$, … 는 식(25)의 분자, 분모식의 계수이다.

3. 축소모델 알고리즘

대규모 시스템 모델의 축소모델을 구하기 위한 알고리즘은

1) 대규모 시스템 모델의 고차수 전달함수의 분모식을 이용하여 보조분모분수식 A(s)를 만들어, 이 식 A(s)를 연분수 전개한다.

2) 연분수전개식에서 축소모델의 차수 만큼을 취하여 역 연분수전개한다. 이렇게 하여 구해진 분수식의 분모항과 분자항을 합한 후, 차수순으로 정리하여 축소모델의 분모식을 구한다.

3) 간략화된 모멘트 함수를 이용하여 원 시스템 모델과 축소모델의 모멘트를 구한다.

4) 원 시스템 모델의 모멘트와 축소모델의 모멘트를 일치시켜 축소모델의 분자식을 구한다.

Ⅳ. 수치예

어떤 시스템을 모델링하였을 때에 식(29)의 전달함수가 얻어졌다고 가정하고 이 전달함수(8차)의 7차와 5차의 축소모델을 구한다.[16]

$$G(s)=\frac{35s^7+1086s^6+13285s^5+82402s^4+278376s^3}{s^8+33s^7+437s^6+3017s^5+11870s^4+27470s^3}$$
$$\frac{+511812s^2+482964s+194480}{+37492s^2+28880s+9600} \tag{29}$$

식(29)를 오름차순으로 정리하면 식(30)과 같다.

$$G(s)=\frac{194480+482964s+511812s^2+278376s^3}{9600+28880s+37492s^2+27470s^3}$$
$$\frac{+82402s^4+13285s^5+1086s^6+35s^7}{+11870s^4+3017s^5+437s^6+33s^7+s^8} \tag{30}$$

식(30)의 분모식을 이용하여 보조분모분수식 A(s)를 만들면 식(31)과 같다.

$$A(s)=\frac{9600+37492s^2+11870s^4+1086s^6+s^8}{28880s+27470s^3+3017s^5+33s^7} \tag{31}$$

1. 축소모델 전달함수의 분모식 계산

식(31)을 연분수 전개하면 식(32)와 같다.

$$A(s)=\frac{0.33240997}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{1.01831062}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{1.72890001}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{2.56267696}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{3.91961505}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{6.39358502}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{11.09321966}{s}+\cfrac{1}{\cfrac{23.02542740}{s}}}}}}}} \tag{32}$$

5차 축소모델을 구하기 위해서 식(32)의 5차만큼을 취하여 분수식으로 변환하고, 이 분수식의 분모식과 분자식을 합하여 차수순으로 정리하면 식(33)과 같은 축소모델의 분모식을 얻는다.

$$D_5(s)=s^5+5.98092504s^4+15.79665008s^3+22.61725841s^2+17.68428200s+5.87843169 \tag{33}$$

식(33)을 이용하여 축소모델 전달함수 $G_{r5}(s)$를 표시하면 식(34)와 같다.

$$G_{r5}(s)=\frac{N_4s^4+N_3s^3+N_2s^2+N_1s^1+N_0}{s^5+5.98092504s^4+15.79665008s^3+22.61725841s^2+17.68428200s+5.87843169} \tag{34}$$

2. 축소모델 전달함수의 분자식 계산

5차 축소모델 분자식의 계수, $N_0 \sim N_4$를 구하기 위해서는 원 전달함수 식(30)과 축소모델 전달함수 식(34)의 모멘트를 정합시킴으로써 구해진다. 먼저 원 전달함수 식(30)을 멱급수로 전개하면 식(35)와 같다.

$$G(s)=20.25833333-10.63506944s+6.19035127s^2-6.05913936s^3+8.01877455s^4-10.00604406s^5+11.00196444s^6-11.00064281s^7\cdots \tag{35}$$

5 차 축소모델을 구하기 위해서는 모멘트를 5 개만 구하면 되므로 식(15)와 식(35)에 의해서 모멘트를 구하면 식(36)과 같다.

$$T_0=20.25833333,\quad T_1=-10.63506944,$$
$$T_2=6.19035127,\quad T_3=-6.05913936,\quad T_4=8.01877455 \tag{36}$$

그리고 축소모델 전달함수 $G_{r5}(s)$의 모멘트를 구하여 원 시스템 모델 전달함수의 모멘트 식(36)과 일치시킴으로써 분자식의 계수, $N_0 \sim N_4$를 구하여, 식(34)에 대입하면 5 차 축소모델이 구해지는데 이 계산은 식(23)에 축소모델 분모식(33)의 계수와 원 시스템 모델의 모멘트, 식(36)의 값을 대입하여 계산함으로써 쉽게 구해진다.

$$\begin{bmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.25833333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10.63506944 & 20.25833333 & 0 & 0 & 0 \\ 6.19035127 & -10.63506944 & 20.25833333 & 0 & 0 \\ -6.05913936 & 6.19035127 & -10.63506944 & 20.25833333 & 0 \\ 8.01877455 & -6.05913936 & 6.19035127 & -10.63506944 & 20.25833333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.87843169 \\ 17.68428200 \\ 22.61725841 \\ 15.79665008 \\ 5.98092584 \end{bmatrix} \tag{37}$$

식(37)을 계산하여 축소모델 분자식의 계수, $N_0 \sim N_4$를 구한다.

축소모델의 계수, $N_0 \sim N_4$를 식(34)에 대입하여 5 차 축소모델을 표시하면 식(38)과 같다.

$$G_{r5}(s)=\frac{33.16016625s^4+153.33136976s^3+306.50394991s^2+295.73655020s+119.08722862}{s^5+5.98092504s^4+15.79665008s^3+22.61725841s^2+17.68428200s+5.87843169} \tag{38}$$

같은 방법으로 7 차 축소모델을 구하면 식(39)와 같다.

$$G_{r7}(s)=\frac{34.69272891s^6+531.11771746s^5+3492.31122433s^4+12007.8198072s^3+22195.0540485s^2+20975.245826s+8446.31444217}{s^7+17.07414469s^6+126.44677489s^5+509.17165114s^4+1188.11840329s^3+1626.65452822s^2+1254.26553419s+416.93037148} \tag{39}$$

V. 축소모델의 응답특성 고찰

1. 과도응답 특성

과도응답특성을 측정하기 위해서 원 시스템 모델의 전달함수와 축소모델 전달함수에 각각 단위계단입력을 인가하고 그 응답결과를 그림 1 에 나타내었다. 그림 1 에 나타난 것 처럼 원 시스템 모델(8 차)의 응답과 축소모델(7 차, 5 차)의 응답이 거의 일치하여 하나의 곡선으로 나타나는 우수한 특성을 보인다.

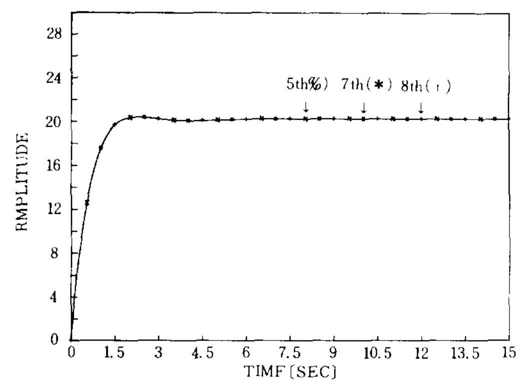

그림 1. 수치예의 원 시스템 모델과 축소모델의 단위계단 응답

Fig. 1. Unit step response of original and order model in the numerical example.

2. 주파수응답 특성

주파수응답 특성을 측정하기 위해서 수치예의 원 시스템 모델과 축소모델 전달함수의 주파수응답 특성을 그림 2 에 나타내었다. 각 축소모델의 응답은 원 시스템 모델의 응답과 거의 일치하는 우수한 특성을 나타냄을 알 수 있다.

3. 위상 특성

위상 특성을 고찰하기 위해서 원 시스템 모델과 각 축소모델의 위상 특성을 그림 3 에 나타내었다. 각 축소모델의 위상 특성은 저주파에서 우수한 특성을 나타낸다.

Ⅳ. 결　　론

Routh 간략법은 원 시스템 모델이 안정하면 축소모델도 반드시 안정하다는 큰 장점을 갖고 있는 우수한 방법이다. 그러나 Routh 간략법은 역수변환을 한후 이 역수변환된 식을 이용하여 Alpha표 및 Beta표를 만들고 이 Apha표 및 Beta표를 이용하여 Alpha-Beta 전개식으로 전개한 다음 원하는 차수만큼을 취해서 s의

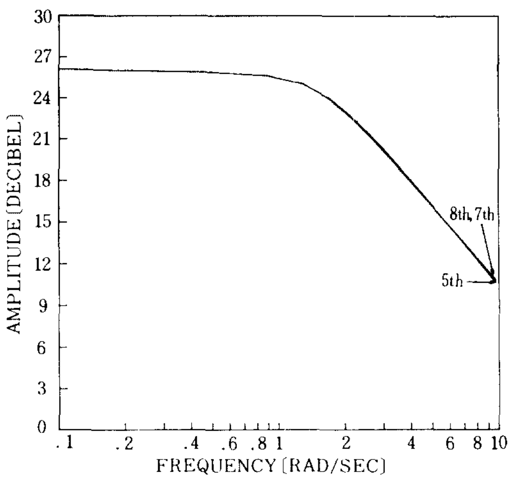

그림 2. 수치예의 원 시스템 모델과 축소모델의 주파수 응답

Fig. 2. Frequency response of original and reduced order model in the numerical example.

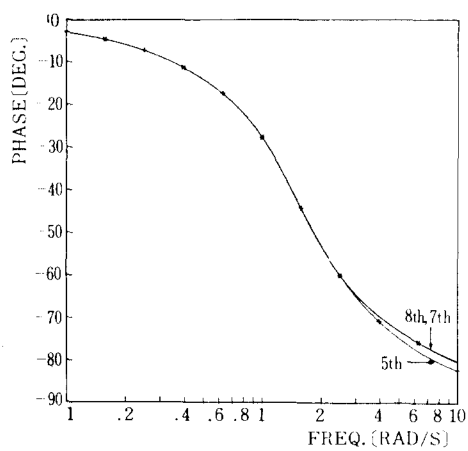

그림 3. 수치예의 원시스템 모델과 축소모델의 위상 특성

Fig. 3. Phase characteristic curve of original and reduced order model in the numerical example.

유리식으로 표시한 후 다시 역수변환을 해야하는 방법으로 그 계산과정이 대단히 복잡한 결점이 있다.

그래서 본 논문에서는 보조분모분수식과 간소화된 모멘트 함수를 정의하고 이들을 이용하여 간편하게 축소모델을 구하는 방법을 제시하였다.

이 방법으로 구해진 축소모델의 분모식는 Routh 간략법에 의하여 구해진 축소모델의 분모식과 일치하므로 원 시스템이 안정하면 축소모델도 반드시 안정하며 과도응답, 주파수응답 그리고 위상 특성은 저주파에서 우수한 특성을 보인다.

또한 대규모 시스템의 축소모델을 구할 때는 컴퓨터 처리가 절실히 요구되므로 이를 위해 필요한 일반식들을 제시하였으며 이 일반식들을 이용하면 쉽게 프로그램을 작성할 수 있어 대규모 시스템의 해석 및 설계, 컴퓨터 시뮬레이션등에 쉽게 이용할 수 있을 것이다.

參 考 文 獻

[1] E.J. Davison, "A method for simplifying linear dynamic systems", *IEEE Trans on Automatic control.* vol. AC-11, pp. 93-101, 1966.

[2] M. Aoki, "Control of large scale dynamic systems by aggregation", *IEEE Trans on. Automatic control,* vol. AC-13, no. 3, pp. 246-253, 1968.

[3] D.J. Wright, "The continued fraction representation of transfer function and model simplification", *Int. J, Control* . vol. 18, no. 3 pp. 449-454, 1973.

[4] L.S. Shieh and M.J. Goldman, "A mixed causer form for linear system reduction", *IEEE Trans Sys. man. cyb,* vol. SMC-4, pp. 584-588, 1974.

[5] M.R. Chidambara and R.B. Schainker, "Lower order generalized aggregated model and suboptimal control", *IEEE Trans on Automatic control,* vol. AC-16, no. 2, pp. 175-180, April 1971.

[6] A.S. Rao, S.S. Lamba and S.V. Rao, "Routh approximation time domain reduced-order models for signle-input single-output systems", *Proc. IEEE* vol. 125, no. 9, pp. 1059-1063, 1978.

[7] M.F. Hutton and B. Friedland, "Routh approximation for reducing order of linear time-invariant systems", *IEEE Trans on Automatic Control* vol. AC-20, pp. 329-337, 1975.

[8] V. Krishnamurthy and V. Seshadri, "A simple and direct method of reducing order of linear systems using Routh approximation in frequency domain "*IEEE Trans. Automatic control* . vol. AC-21, pp. 797-799, October 1976.

[9] S.V. Rao, "Structural properties of Routh approximation method" *Proc. JACC, Charlottes-Ville.* VA 1981.

[10] S.S. Lamba and S.V. Rao, "Aggregation matrix for the reduced order continued fraction expansion model for Chen and Shieh" *IEEE Trans on. Auotmatic control.* vol. AC-23, pp. 81-83, 1978,

[11] M. Faris, B.S. , K. Warwick and M. Guilandoust, "Stable reduced order model for discrete time systems" *IEE Proc.* vol. 133, no. 3, pp. 137-141, May 1986.

[12] K. Warwick, "A new approach to reduced order modelling" *IEE, Proc,* vol. 131, no. 2, march 1984.

[13] M. Jamshid, Large Scale Systems: *Modelling and Control,* North-Holland, pp. 67-71, 1983.

[14] M.S. Mahmoud and M.G. Singh, Large Scale Systems Modelling, *Pergamon Press,* pp. 189-261, 1984.

[15] J.L. Melsa and S.K. Jones, Computer programs for computational assistand in the study of linear control theory, *Mc-Graw Hill* 1973.

[16] V. Krishnamurthy and V. Seshadri, "Model reduction using the Routh stability criterion" *IEEE Trans on Automatic control* vol. AC-23, no. 4, August 1978.