

전력 밀도 스펙트럼을 이용한 반복적 영상 신호 복원 알고리즘

(Iterative Image Restoration Algorithm Using Power Spectral Density)

林 永 錫*, 李 門 浩**

(Young Seok Lim and Moon Ho Lee)

要 約

추정된 원 영상의 전력 밀도 함수와 훼손된 영상에 대한 푸리에 변환의 실수부 부호 정보를 사용하여 훼손된 영상의 복원 과정을 수행하는 반복 알고리즘을 제안하였다.

컴퓨터 시뮬레이션 결과 $N(0, 15^2)$ 의 잡음으로 훼손된 32개 명암도를 갖는 영상에 대해서, 10회 반복함으로써 10dB 이상의 SNR 이득을 얻을 수 있었으며, 백색 잡음으로 훼손된 영상이 반복 과정을 수행함에 따라서 원 영상에 빠른 속도로 수렴하는 것을 볼 수 있었다.

Abstract

In this paper, an iterative restoration algorithm from power spectral density with 1 bit sign information of real part of two dimensional Fourier transform of image corrupted by additive white Gaussian noise is proposed. This method is a modified version of image reconstruction algorithm from power spectral density.

From the results of computer simulation with original 32 gray level image of 64×64 pixels, we can find that restored image after each iteration converge to original image very fast, and SNR gain be at least 8[dB] after 10th iteration for corrupted image with additive white Gaussian noise.

I. 序 論

현재까지의 영상 복원 알고리즘은 크게 선형 필터를 이용하는 방법과 비선형 필터를 이용하는 방법으로 대별되고 있으며 연구 또한 활발히 진행되고 있으나,^{1,2} Youla에 의하여 제안된 직교 투영연산자에 의한 영상 복원 알고리즘은 크게 주목받지 못하고, stark 등에

의하여 한번 시도되었을 정도이다.^{3,4} 그러나, Youla에 의하여 제안된 영상 복원 알고리즘은 제안된 정보만으로 원래의 영상을 재구성하는 영상 재구성 분야에서는 괄목할 만한 성과를 보여 주고 있다.⁵

Stark 등은 전력 밀도 함수만을 이용하여 직교 투영 연산자를 이용한 반복적 영상 복원 알고리즘을 발표하였으나, 투영 연산자의 image space가 convex set가 아니기 때문에 훼손된 영상이 반복적 알고리즘을 거듭 수행함에 따라서 원 영상에 수렴하지 않게 되는 경우가 생긴다.⁶ 그러나 stark의 알고리즘에, 원 영상에 대한 푸리에 변환의 실수부의 부호정보를 첨가함으로써 투영 연산자의 image space를 convex set

*正會員, 全南大學校 電子工學科

(Dept. of Elec. Eng., Chonnam Nat'l Univ.)

**正會員, 全北大學校 電子工學科

(Dept. of Elec. Eng., Chonbuk Nat'l Univ.)

接受日字: 1986年 10月 22日

로 국한할 수 있으며 영상 재구성 또한 완벽하게 행할 수 있다.^{6,7)} 그런데 영상 재구성을 위하여 전력 밀도 함수 외에 첨가된 푸리에 변환 실수부의 부호 정보는 반복적 알고리즘의 초기 수렴 방향의 결정에만 영향을 미치기 때문에 부호 정보만으로 영상을 재구성 할 때와 같은 정확성을 요구하지는 않는다.

따라서 본 논문에서는 전력 밀도 함수와 훼손된 영상의 푸리에 변환 실수부에 대한 1bit 부호 정보만으로 영상복원을 수행하는 반복적 알고리즘을 제안하고 32명암도 64×64 화소의 영상에 대하여 행한 컴퓨터 시뮬레이션으로 성능을 시험한 결과, 10회 반복함으로써 8 [dB] 이상의 신호대 잡음비 이득을 얻을 수 있으며 N(0, 15²) 정도의 심한 잡음으로 훼손된 영상도 순조롭게 원 영상에 수렴해 가는 과정을 확인할 수 있었다. III장에서는 반복적 영상 복원 알고리즘의 근간이 되는 전력 밀도 함수로부터 영상을 재구성하는 알고리즘에 관하여 언급하고, III장에서는 반복적 영상 복원 알고리즘에 관하여 기술하였으며 이를 IV장의 컴퓨터 시뮬레이션의 결과로써 확인하였다.

II. 전력 밀도 함수로부터의 영상 신호의 재구성

다차원 이산적 신호의 재구성에 사용될 수 있는 선형적 정보로는 여러가지가 있지만 그 중에서 전력밀도 함수는 가산 잡음의 제거가 비교적 용이하다는 점에서 가장 효용성이 높다.

2 차원 이산적 신호 f(n₁, n₂)의 전력 밀도 함수 P(m₁, m₂)는 f(n₁, n₂)의 푸리에 변환을 F(m₁, m₂)라 하면

$$P(m_1, m_2) = |F(m_1, m_2)|^2 \tag{1}$$

로 주어지며 또한 Parseval의 정리로부터 다음 (2)식의 관계가 성립한다.

$$\sum_{m_1} \sum_{m_2} P(m_1, m_2) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} f^2(n_1, n_2) \tag{2}$$

따라서, P(m₁, m₂)는 f(n₁, n₂)에 대한 많은 정보를 포함하고 있기는 하지만, (2)식에서 P(m₁, m₂)로부터 f(n₁, n₂)가 유일하게 결정되지는 않는다.

Quadrant support를 갖는 2 차원 영상 f(n₁, n₂), 즉 f(n₁, n₂) = 0 : n₁ < 0 or n₂ < 0,를 전력 밀도 함수 P(m₁, m₂)로서 재구성하는 문제는 다음과 같은 연산자 방정식의 고정점을 찾는 문제로 귀착된다.⁴⁾

$$\begin{aligned} f &= P_s P_s f = T f & (3) \\ P_s &: S \rightarrow S_f \\ P_s &: S \rightarrow S_s \\ S_s &= \{f(n_1, n_2) : f(n_1, n_2) \in S, f(n_1, n_2) = 0, \\ & \quad n_1 < 0 \text{ or } n_2 < 0\} \end{aligned}$$

$$S_f = \{f(n_1, n_2) : f(n_1, n_2) \in S, |F(m_1, m_2)| = \sqrt{P(m_1, m_2)}\}$$

여기서 S는 전 이산적 이변수 함수 공간이며 S_s는 quadrant support를 갖는 이변수 함수들을 원소로 하는 공간이며 S_f는 P(m₁, m₂)를 전력 밀도 스펙트럼으로 하는 이변수 함수들을 원소로 하는 함수 공간이다.

(3)식의 해인 고정점 f*를 찾기 위한 일반적인 반복 알고리즘은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= P_s P_s \cdot f_i \\ &= T \cdot f_i \\ &= (T)^i f_0 \end{aligned} \tag{4}$$

그러나, (4)식으로 주어지는 반복 알고리즘에서 연산자 T의 range space R(T)가 non-convex set이므로,⁴⁾ f_i로부터 f_{i+1}이 유일하게 결정되지만 sequence {f_i}가 원하는 해 f*에 수렴하는, 즉 lim_{i→∞} f_i = f*가 되는 여부는 초기 추정 함수 f₀에 크게 의존한다.

따라서 다음 (5)식으로 주어지는 f(n₁, n₂)의 푸리에 변환 F(n₁, n₂)의 실수부의 부호 정보 G(m₁, m₂)를 사용하여 초기 추정 함수 f₀를 (6)식과 같이 설정한다.

$$G(m_1, m_2) = \text{Sign}\{\text{Re}\{F(m_1, m_2)\}\} \tag{5}$$

$$f_0(n_1, n_2) = \text{IDFT}\{\sqrt{P(m_1, m_2)} \cdot G(m_1, m_2)\} \tag{6}$$

이렇게 함으로써 이산적 함수공간 S의 subspace 인 T의 range space R(T) 내에 초기 추정 함수 f₀를 중심으로 convex인 subspace Sf_s를 생각할 때 (4)식의 반복 알고리즘에서 연산자 T의 domain을 Sf_s로 국한하여 T'(T' : S_{f_s} → S_{f_s})로 표현할 수 있다.⁸⁾

따라서 (4)식의 반복 알고리즘은

$$f_{i+1} = T' f_i \quad (\{f_i\} \in S_{f_s}) \tag{7}$$

로 나타내어지며, S_{f_s}는 convex set이므로 lim_{i→∞} f_i = f*로써 원하는 해에 수렴시킬 수 있다.

III. 반복적 영상 복원 알고리즘

가산된 백색 가우스 잡음으로 인하여 훼손된 영상으로부터 원 영상의 전력 밀도 함수의 추정은 비교적 용이하며 또한 연구도 활발히 진행되고 있다.^{9,10)}

따라서, 전력 밀도 함수를 선형적 정보로 하는 영상 재구성 알고리즘을 이용하여 영상 복원의 과정을 수행할 수 있다. 원 영상의 1bit 부호 정보만으로 영상 재구성을 행할 때는 N×N 영상에 대하여 4N×4N 크기의 DFT로 구하여지는 정확한 부호 정보를 필요로 한다.¹⁰⁾ 그러나 (6)식의 초기추정 함수 설정을 위한 1bit 부호 정보 G(m₁, m₂)는 식(7)로 주어지는 반복 알고리즘의 초기 수렴 방향에만 영향을 미치기 때문에 G(m₁, m₂)는 원

원상에 대한 정확한 부호 정보가 아니더라도 $\{f_i\} \in S_{rs} = R(T')$ 가 되도록 취하여 주변 고정점을 찾는 기능상에는 하등의 영향을 미치지 못한다.

따라서 훼손된 영상에 대한 1bit 부호 정보 $G(m_1, m_2)$ 를 이용하여 (6)식에 의하여 초기 추정 함수를 설정하면 영상 재구성 방법에 따라 원 영상을 복원할 수 있게 된다. 물론, 영상의 훼손된 정도(입력영상의 신호 대 잡음비)에 따라서 어떤 i 에 대해서 $f_i \in S_{rs}$ 가 되어 원 영상에 수렴되지 않을 수도 있겠으나 $N(0, 15^2)$ 의 가우스 잡음으로 훼손된 32명암도 영상 신호에 대하여 행한 컴퓨터 시뮬레이션 결과 빠른 속도로 원 영상에 수렴해 가는 것을 볼 수 있었다.

반복적 영상 신호 재구성 알고리즘을 이용한, 영상 신호의 복원을 위한 일련의 수행과정은 다음과 같다.

$N \times N$ 크기의 원 영상을 $f(n_1, n_2)$, 훼손된 영상을 $\hat{f}(n_1, n_2)$ 라 하고, 이들을 quadrant support를 갖는 $2N \times 2N$ 크기의 영상으로 변환한 결과를 각각 $\tilde{f}(n_1, n_2)$, $\tilde{\hat{f}}(n_1, n_2)$ 라 하면

$$\tilde{f}(n_1, n_2) = \begin{cases} f(n_1, n_2) : 0 < n_1 \leq N, 0 < n_2 \leq N \\ 0 : \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

$$\tilde{\hat{f}}(n_1, n_2) = \begin{cases} \hat{f}(n_1, n_2) : 0 < n_1 \leq N, 0 < n_2 \leq N \\ 0 : \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

(단, $-N+1 \leq n_1 \leq N, -N+1 \leq n_2 \leq N$)

이다.

1) 초기 추정 함수의 설정

$$f_0(n_1, n_2) = \text{IDFT} \{ \sqrt{\bar{P}(m_1, m_2)} \cdot G(m_1, m_2) \} \quad (10)$$

($\bar{P}(m_1, m_2)$: 추정된 원 영상의 전력 밀도 함수
 $G(m_1, m_2)$: $\text{Sign} \{ \text{Re} [\text{DFT} \{ \tilde{f}(n_1, n_2) \}] \}$)

2) $f'_i = P_s \cdot f_i = \begin{cases} f_i : n_1, n_2 > 0 \\ 0 : \text{otherwise} \end{cases}$

3) $f'_{i+1} = P_r \cdot f'_i = \text{IDFT} \{ \sqrt{\bar{P}(m_1, m_2)} \cdot G_i(m_1, m_2) \}$

여기서, $G(m_1, m_2)$ 는 f'_i 의 위상 정보로써

$$G_i(m_1, m_2) = [\text{DFT} (f'_i)] / [\text{DFT} (f'_i)]$$

4) $d(f_i, f_{i+1}) > \epsilon$ 이면 2), 3)의 과정을 반복하고, 그렇지 않으면 반복과정을 종료한다. 여기서 $d(\cdot, \cdot)$ 는 두 영상의 차이를 나타내는 임의의 convex인 distance에 대한 허용 오차이다.

IV. 컴퓨터 시뮬레이션 및 검토

반복적 영상 복원 알고리즘을 시험하기 위한 컴퓨터 시뮬레이션은 64×64 화소 32명암도의 '소년' 영상 신호를 원 영상으로 하여 행하였다. 이산적 데이터 처리

를 위하여 원 영상에 잡음을 첨가한 뒤 32명암도로 정수화하였다. 즉, 원 영상을 $f(n_1, n_2)$, 잡음을 $n(n_1, n_2)$ 라 하면 훼손된 영상 $\hat{f}(n_1, n_2)$ 는

$$\hat{f}(n_1, n_2) = \begin{cases} 0 : I \leq 0 \\ 31 : I \geq 31 \\ I : \text{otherwise} \end{cases}$$

($I = [f(n_1, n_2) + n(n_1, n_2) + 0.5]$, $[\cdot]$ 는 절상)

로 하였다.

$f(n_1, n_2)$, $\hat{f}(n_1, n_2)$ 를 (8), (9)식에 의하여 quadrant support를 갖는 128×128 화소의 영상으로 변환하여 $\tilde{f}(n_1, n_2)$, $\tilde{\hat{f}}(n_1, n_2)$ 를 만들고 (10)식에 따라 초기 추정 함수 f_0 를 설정하였다.

그러나, 본 논문에서는 전력 밀도 함수의 추정에 목적이 있는 것이 아니기 때문에 (10)식의 $P(m_1, m_2)$ 는 원 영상의 전력 밀도 함수를 그대로 사용하였다.

컴퓨터 시뮬레이션은 잡음 신호를 $N(0, 5^2)$, $N(0, 10^2)$, $N(0, 15^2)$ 에 대하여 각각 수행하고 그 결과를 표 1과 그림 1, 2, 3, 4에 나타내었다. 표 1은 가우스 잡음으로 인하여 훼손된 영상에 대한 반복 알고리즘의 반복 횟수에 따른 복원 정도를 보여 주고 있다. 표 1에 표현된 원 영상과 복원 영상과의 오차는 다음과 같은 두가지 경우에 대하여 각각 계산하였다. 즉 원 영상과 K 번째 반복으로 얻어지는 복원 영상의 (i, j) 번째 화소의 명암도 값들의 차이들

$$e_k(i, j) = f(i, j) - f_k(i, j)$$

라면

$$\text{MSE} : e_{1k} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [e_k^2(i, j) / f^2(i, j)]$$

$$\text{SNR}_{\text{peak}} : e_{2k} = 10 \log_{10} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [N^2 G_{\text{max}}^2 / e_k^2(i, j)]$$

(단, f 는 원 영상, f_k 는 복원 영상이며,

$$G_{\text{max}} = \max_{i, j} [f(i, j)] \text{이다.})$$

그림 1은 원 영상과 $N(0, 5^2)$, $N(0, 10^2)$, $N(0, 15^2)$ 의 잡음에 의하여 훼손된 영상들이며 그림 2, 그림 3 및 그림 4는 각 잡음들에 의하여 훼손된 영상들(그림 1-b, 1-c, 1-d)의 복원 과정을 5회 및 10회 반복하였을 때의 복원 영상과 원 영상과 복원 영상간의 오차를 보여 주고 있다.

컴퓨터 시뮬레이션의 결과로써 비교적 훼손 정도가 낮은 영상의 복원은 물론이고(그림 2), 표준편차가 영상의 평균 명암도 값에 맞먹는(즉, $\sigma \approx \sum_{i,j} f(i, j) / N^2$) 잡음에 의하여 길게 훼손된 영상에 대해서도 훌륭한 복원 영상을 얻을 수 있었다.(그림 4)

물론 본 논문에서 제안된 영상 복원을 위한 반복 알고리즘은 선형적 정보로서 전력 밀도 스펙트럼을 요구

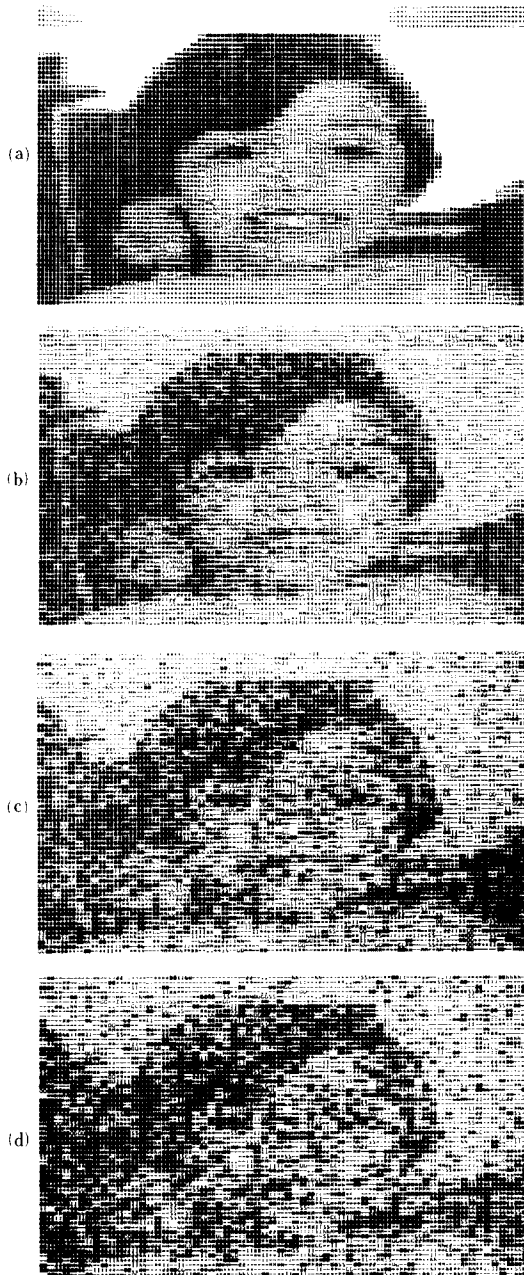
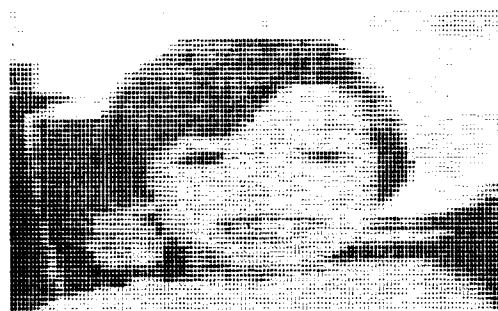


그림 1. (a) 원 영상

- (b) $N(0, 5^2)$ 의 가산된 잡음으로 훼손된 영상
- (c) $N(0, 10^2)$ 의 가산된 잡음으로 훼손된 영상
- (d) $N(0, 15^2)$ 의 가산된 잡음으로 훼손된 영상

Fig. 1. (a) Original image.

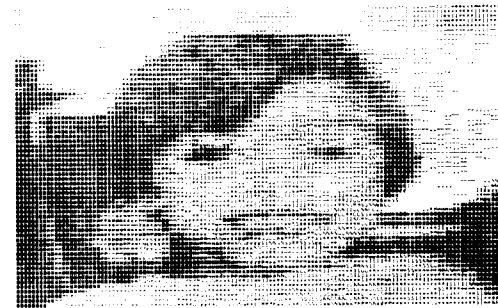
- (b) Corrupted Image with Additive Noise of $N(0, 5^2)$.
- (c) Corrupted Image with Additive Noise of $N(0, 10^2)$.
- (d) Corrupted Image with Additive Noise of $N(0, 15^2)$.



(a)



(b)



(c)



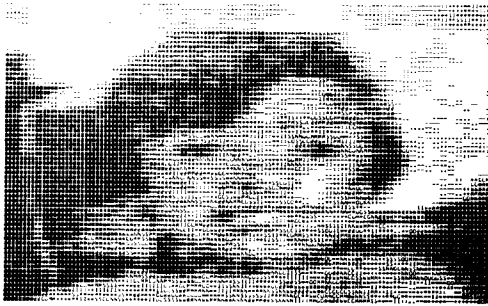
(d)

그림 2. 그림1.(b)의 복원 과정

- (a) 5회 반복후 복원 영상
- (b) 오차 영상
- (c) 10회 반복후 복원영상
- (d) 오차 영상

Fig. 2. Restoration of Fig.1.(a).

- (a) Restorated Image After 5th interation.
- (b) Error Image.
- (c) Restorated Image After 10th Iteration
- (d) Error Image.



(a)



(b)



(c)



(d)

그림 3. 그림1.(c)의 복원 과정

- (a) 5회 반복후의 복원 영상 (b) 오차 영상
- (c) 10회 반복후의 복원 영상 (d) 오차 영상

Fig. 3. Restoration of Fig.1.(c).

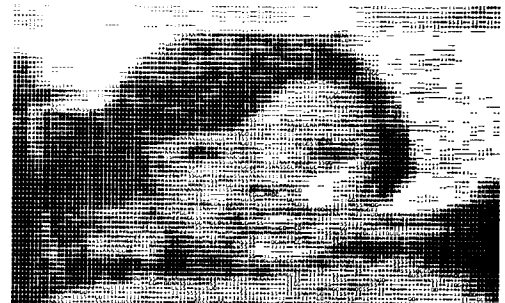
- (a) Restored Image After 5th Iteration.
- (b) Error Image.
- (c) Restored Image After 10th Iteration.
- (d) Error Image.



(a)



(b)



(c)



(d)

그림 4. 그림1.(d)의 복원 과정

- (a) 5회 반복후의 복원 영상 (b) 오차 영상
- (c) 10회 반복후의 복원 영상 (d) 오차 영상

Fig. 4. Restoration of Fig.1.(d).

- (a) Restored Image After 5th Iteration.
- (b) Error Image.
- (c) Restored Image After 10th Iteration.
- (d) Error Image.

표 1. 반복 알고리즘의 복원 성능

Table 1. Performance of Iterative Restoration Algorithm.

No. of iteration k	N(0, 5 ²)		N(0, 10 ²)		N(0, 15 ²)	
	ϵ_{1k}	ϵ_{2k}	ϵ_{1k}	ϵ_{2k}	ϵ_{1k}	ϵ_{2k}
0 *	0.04924	17.37	0.16663	12.07	0.30547	9.44
1	0.20566	11.16	0.21400	10.99	0.22496	10.77
2	0.05410	16.96	0.07404	15.60	0.08904	14.80
3	0.03349	19.04	0.05387	16.98	0.06849	15.94
4	0.02412	20.47	0.04343	17.92	0.05722	16.72
5	0.01866	21.59	0.03696	18.62	0.04991	17.31
6	0.01545	22.41	0.03247	19.18	0.04473	17.79
7	0.01339	23.03	0.02917	19.65	0.04088	18.18
8	0.01197	23.51	0.02660	20.05	0.03783	18.52
9	0.01105	23.86	0.02468	20.37	0.03516	18.83
10	0.01042	24.11	0.02332	20.62	0.03323	19.08
15	0.00928	24.62	0.01993	21.30	0.02806	19.82
20	0.00903	24.74	0.01885	21.54	0.02641	20.08

*The values for k=0 are the errors between original image and image corrupted by noise.

하고 있다. 그러나 현재까지 제안된 백색잡음 제거에 응용되는 대부분의 방법들이 역시 선형적 정보로서 전력 밀도 스펙트럼을 요구하고 있고 또한 백색 잡음으로 훼손된 영상의 전력 밀도 스펙트럼의 추정은 비교적 용이하며 연구도 많이 행하여지고 있다. 따라서 실행시간이 비교적 많이 소요되는 2 차원 푸리에 변환 및 역 푸리에 변환을 반복적으로 수행하여야 된다는 단점이 있기는 하지만 반복 과정의 수렴속도 개선에 관한 연구가 좀 더 진행된다면 이 점도 보완될 수 있을 것이다.

V. 결 론

가산된 백색 가우스 잡음으로 인하여 훼손된 영상 신호의 복원을 위한 방법으로 전력 밀도 함수와 훼손된 영상의 2 차원 푸리에 변환 데이터의 실수부의 1bit 부호 정보를 이용한 반복적 알고리즘을 제안하였다.

컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 영상 신호의 복원 성능을 시험한 결과 N(0, 15²)으로 훼손된 32개 명암도를 갖는 영상 신호에 대해서 반복 과정을 수행함에 따라 원 영상에 수렴해 감을 볼 수 있었으며 신호 대 잡음

비 이득 또한 10회의 반복으로 8 [dB] 이상을 얻을 수 있음을 확인하였다.

參 考 文 獻

- [1] R.C. Gonzales and P.Wintz, *Digital Image Processing*, Addison-Wesley Pub. Co., Massachusetts, 1977.
- [2] W.K. Pratt, *Digital Image Processing*, John Wiley & Sons, Inc., 1978.
- [3] D.C. Youla, "Generalized image Restoration by the Method of Alternating Orthogonal Projections", *IEEE Trans. CAS, CAS-25*, pp.694-702, Sept. 1978.
- [4] A. Levi, and H.Stark, "Image Restoration by the Method of Generalized Projections with Application to Restoration from Magnitude", *J. Opt. Soc. Am. A*, vol.1, pp. 932-943, Sept. 1984.
- [5] M.I. Sezan and H. Stark, "Tomographic Image Reconstruction from Incomplete View Data by Convex Projections and Direct Fourier Inversion", *IEEE Trans. ME*, vol. ME-3, pp.91-98, June 1984.
- [6] P.L. Van Hove, M.H. Hayes, J.S. Lim, and A.V. Oppenheim", "Signal reconstruction from Signed Fourier Transform Magnitude", *IEEE Trans. ASSP*, vol. ASSP-31, pp. 1286-1994, Oct. 1983.
- [7] 임영석, "전력 밀도 스펙트럼으로부터의 영상 재구성에 관한 연구", 전남대학교 논문집 공학편, 제31집, pp. 35-40, 1986.
- [8] A.N. Michel and C.J. Herget, *Mathematical Foundations in Engineering and Science: Algebra and Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, p.29, 1981.
- [9] D.E. Dudgeon and R.M. Mersereau, *Multi-dimensional digital signal Processing*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, pp.315-339, 1984.
- [10] 소상호, 김종교, 이문호, "2차원 신호의 최대 정보량을 갖는 전력 스펙트럼 추정", 대한전기학회 논문지, vol. 34, pp. 107-114, 1985.
- [11] S.R. Curtis, A.V. Oppenheim, and J.S. "Signal Reconstruction from Fourier Transform sign Information," *IEEE Trans. ASSP*, vol. ASSP-33, pp.643-657. June 1985.