論文 87-24-4-6

周波數領域에서 線型시스템 簡略化를 위한 새로운 方法

(A New Method for Approximation of Linear System in Frequency Domain)

權 五 臣*

(Oh Shin Kwon)

要 約

本 論文에서는 線型, 時不變한 높은 次數의 制御系에 대한 새로운 모델 簡略法을 提示하였다.

새롭게 提示한 모델 簡略法은 D-table과 모멘트 整合法을 利用 하였는데 D-table은 새로운 모델 簡略法에 의한 簡略化모델의 分母多項式 係數를 구하기 위하여 使用하였으며 分子多項式의 係數는 모멘트 整合法을 利用 하였다.

이러한 새로운 모델간략법은 Routh 簡略法의 短點으로 지적되는 두번에 결친 逆數變換過程과 복잡 한 連分數 계산과정을 필요로 하지 않는다.

本 論文에서 제안한 새로운 모델간략법의 장점은 Routh 簡略法에 비하여 計算이 간편하며 원 시스템이 安定하면 간략화모델 또한 반드시 安定 함을 들 수 있겠다.

Abstract

A new approximation method is proposed for the linear model reduction of high order dynamic systems.

This method is based upon the denominator table (D-table) and time moment-matching technique.

The denominator table (D-table) is used to obtain the denominator polynomial of reduced-order model, and the numerator polynomial is obtained by time moment-matching method.

This proposed method does not require the calculation of the alpha-beta expansion and reciprocal transformation which should be calculated by Routh approximation method.

The advantages of the proposed method are that it is computationally every attractive better than Routh approximation method and the reduced model is stable Il the original system is stable.

I. 序 論

科學文明이 急進的으로 發展 함에 따라서 宇宙航空技術, 重工業 自動生産系統, 情報通信網, 水資源系統, 國家戰略시스템 등은 이제 過去의 制御理論 만으로는 堪當할 수 없을만큼 大規模化 되었다.[1-3]

이러한 大規模 시스템에 대한 컴퓨터 시뮬레이션, 最適制御理論의 解析 및 設計등 컴퓨터를 利用한 制御가 매우 어렵게 되었는데 이는 시스템 모델의 次數 가 커짐에 따라 컴퓨터의 容量과 이에 따른 處理時間이 엄청나게 增加하여 비록 컴퓨터 處理를 하더라도 既存의 方法으로 이러한 問題點을 解決하는 것이 거의 不

*正會員, 全州工業專門大學 電子計算科

(Dept. of Computer Sci, Chonju J. T. Col.)

接受日字：1987年 1月 9日

可能하게 되었다.[4]

이에 대한 解決方法으로 그동안 여러가지 方法이 提示 되었으나 그중에서 가장 유용하게 使用되는 方法은 可能한 한 시스템의 特性은 維持하면서 그 시스템모델의 次數를 줄이는 簡略法을 생각하게 되었다.

이러한 시스템모델 簡略法은 크게 時間領域 簡略法과 周波數領域 簡略法으로 나눌 수가 있다.[5]

時間領域 簡略法으로는 代表的으로 完全集成法(exact aggregation method),[7] Modal集成法 攝動法(perturbation method), 描寫變數法(descriptive variable method) 등이 있으며 周法數領域 簡略法으로는 連分法(continued fraction method), 모맨트 整合法, padē 簡略法,[6] Routh 簡略法 등을 들 수 있으며 이 가운데 padē에 依해 소개되고 Y. Shamash(1975) 등에 의해서 發展해온 級數展開方法의 一種인 padē 簡略法과 C. F. Chen과 L. S. Shieh, S. S. Lamba 등에 의해서 發表된 連分法[13] 등은 간략화모델이 원 시스템에 대단히 가까운 應答을 얻을 수 있는 長點이 있으나 원 시스템을 簡略化 시키는 過程에서 不安定한 간략화모델을 만드는 경우가 있는 短點을 지니고 있다.

이에 비하여 M. F. Hutton과 B. Friedland가 提示한 周波數領域에서의 Routh 簡略法은 시스템모델의 고유치(eigenvalue), 고유벡타를 計算 함이 없이 원 시스템이 安定하면 간략화모델 또한 반드시 安定하다는 重要한 長點을 지니고 있어 매우 有用한 簡略法으로 컴퓨터 시뮬레이션, 多變數 制御系의 應用 등에서 그 우수성이 널리 인정되고 있다.

이 方法은 원 시스템 모델의 係數를 利用하여 alpha-beta 테이블을 만든 후, 이 테이블에 의하여 alpha-beta 展開式을 만들고 簡略化 시키기 원하는 次數 이하의 項을 除去시킨 다음 이를 다시 有理化하여 簡略化모델을 얻는 方法이다.

그러나 이 方法은 두번에 걸친 逆數變換과 連分數形態의 alpha-beta 展開式을 有理化 시켜야 하는 複雜한 計算過程을 거쳐야 하는 不便함이 있다.[10]

本 論文은 周波數領域에서 높은 次數의 單一入出力(SISO) 시스템의 簡略化모델은 간편하게 구하는 새로운 알고리즘을 提示 하였다.

本 論文에서는 간략화모델의 分母多項式과 分子多項式을 別途로 구하는 方法을 使用 하였는데 간략화모델의 分母多項式은 Routh의 alpha(α) 테이블을 變形시킨 새로운 形態의 D-table을 만들어 그들의 係數를 구함으로써 고유치를 計算하지 않고, 安定한 시스템에 대한 간략화 모델의 安定性을 유지하면서 Routh 簡略法의 短點으로 指適되는 두번에 걸친 逆數變換과 連分數 形態로 表示된 $\alpha-\beta$展開式을 다시 有理化 시키는 複雜한 計算過程을 省略할 수 있는 매우 간편한 方法이다.

또한 簡略化모델의 分子多項式[9]은 원시스템과 새로운 方法에 의해서 구해진 簡略化모델의 分母多項式을 이용하여 멱급수로 展開한 후 時間 모멘트를 一致시키는 方法으로 이는 모멘트 整合法을 分子係數를 구하는데만 적용함으로써 安定한 시스템에 대하여 간략화모델이 不安定 해지는 경우를 防止 하였다.

II. 시스템 簡略法의 槪要[5]

임의의 線型 時不變 制御系가 다음 식(1),(2)와 같이 表示된다고 하자.

$$\dot{x}=A_x+B_u \tag{1}$$

$$y=D_x \tag{2}$$

여기서 x는 n次 狀態벡타, u와 y는 스칼라量이고 A는 n×n係數行列, B와 D는 適當한 次數의 係數行列이다.

이 시스템이 可制御性을 갖는다고 하고 식(1),(2) 에 表示된 시스템에 대한 k차 簡略化모델의 動態方程式을 식(3),(4)와 같이 表示 해보자.

$$\dot{z}=Fz+Gu \tag{3}$$

$$y_k=Mz \tag{4}$$

식(1),(2)와 같이 表示되는 시스템을 周波數領域에서 취급하기 위하여 初期値가 0인 원 시스템의 傳達函數로 表示하면 식(5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$Y(S)=G(S)\cdot U(S) \tag{5}$$

이에 대하여 k次로 簡略化된 모델의 傳達函數 $G_k(S)$는 식(6)과 같이 表示할 수 있다.

$$Y_k(S)=G_k(S)\cdot U(S) \tag{6}$$

1. 周波數領域에서 Routh 簡略法

M. F. Hutton과 B. Friedland가 提示한 Routh 簡略法은 安定한 시스템에 대한 安定한 간략화모델을 얻기 위하여 Rotuh-Hurwitz의 安定度 判別에 使用하는 Routh 테이블을 利用하여 원하는 바의 간략화모델의 Routh 테이블과 원 시스템 모델의 값이 一致하도록 하는 것이다.

식(7)과 같은 傳達函數를 갖는 n次 安定한 時不變 制御系를 生覺해보자

$$G(S)=\frac{b_1S^{n-1}+b_2S^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1}S+b_n}{a_0S^n+a_1S^{n-1}+\cdots\cdots\cdots+a_{n-1}S+a_n} \tag{7}$$

이 시스템의 傳達函數 G(S)는 식(8)과 같이 變形시킬 수 있다.

$$G(S)=\beta_1F_1(S)+\beta_2F_1(S)F_2(S)+\cdots+\beta_nF_1(S)\cdots$$
$$\cdots F_n(S)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\prod_{j=1}^{i}F_j(S) \tag{8}$$

이때 $F_i(S)$는 식(9)와 같다.

$$F_i(S) = \cfrac{1}{\alpha_i S + \cfrac{1}{\alpha_{i+1} S + \cfrac{1}{\begin{matrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{matrix} \; \alpha_{n-1} S + \cfrac{1}{\alpha_n S}}}} \tag{9}$$

단 $F_1(S)$, 즉 $i=1$인 경우에 한해서 $\alpha_1 S$ 대신 $1+\alpha_1 S$를 使用한다.

식(8),(9)를 $\alpha-\beta$展開式이라 부르며 여기에서 α_i, β_i 값은 표1, 표2의 Routh 테이블에 의해서 구한다.

표 1. Routh 알파테이블
Table 1. Alpha (Routh) Table.

	$a_0^0 = a_0$ $a_2^0 = a_2$ $a_4^0 = a_4$ $a_6^0 = a_6 \cdots\cdots$ $a_0^1 = a_1$ $a_2^1 = a_3$ $a_4^1 = a_5 \cdots\cdots$
$\alpha_1 = a_0^0 / a_0^1$	$a_0^2 = a_2^0 - \alpha_1 a_2^1$ $a_2^2 = a_4^0 - \alpha_1 a_4^1$ $a_4^2 = a_6^0 - \alpha_1 a_6^1$
$\alpha_2 = a_0^1 / a_0^2$	$a_0^3 = a_2^1 - \alpha_2 a_2^2$ $a_2^3 = a_4^1 - \alpha_2 a_4^2$ $\cdots\cdots$
$\alpha_3 = a_0^2 / a_0^3$	$a_0^4 = a_2^2 - \alpha_3 a_2^3$ $a_2^4 = a_4^2 - \alpha_3 a_4^3 \cdots\cdots$
$\alpha_4 = a_0^3 / a_0^4$	$a_0^5 = a_2^3 - \alpha_4 a_2^4$
$\alpha_5 = a_0^4 / a_0^5$	$a_0^6 = a_2^4 - \alpha_5 a_2^5$
$\cdots\cdots\cdots\cdots$	$\cdots\cdots\cdots\cdots$

표 2. Routh 베타테이블
Table 2. Beta (Routh) Table.

	$b_0^1 = b_1$ $b_2^1 = b_3$ $b_4^1 = b_5 \cdots\cdots$ $b_0^2 = b_2$ $b_2^2 = b_4$ $b_4^2 = b_6 \cdots\cdots$
$\beta_1 = b_0^1 / a_0^1$	$b_0^3 = b_2^1 - \beta_1 a_2^1$ $b_2^3 = b_4^1 - \beta_1 a_4^1 \cdots\cdots$
$\beta_2 = b_0^2 / a_0^2$	$b_0^4 = b_2^2 - \beta_2 a_2^2$ $b_2^4 = b_4^2 - \beta_2 a_4^2 \cdots\cdots$
$\beta_3 = b_0^3 / a_0^3$	$b_0^5 = b_2^3 - \beta_3 a_2^3 \cdots\cdots$
$\beta_4 = b_0^4 / a_0^4$	$b_0^6 = b_2^4 - \beta_4 a_2^4 \cdots\cdots$
$\beta_5 = b_0^5 / a_0^5$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

식(7)에 나타낸 n次 傳達函數 G(S)에 대한 k次 간략화모델 $G_k(S)$는 식(8), (9)의 $\alpha-\beta$展開式에서 식(10)과 같이 k次 以下의 項을 除去시키고 이를 다시 S의 有理式 形態로 還元시켜 구한다.

$$G_k(S) = \beta_1 G_{k1}(S) + B_2 G_{k1}(S)\, G_{k2}(S) + \cdots\cdots$$
$$+ \beta_k G_{k1}(S) \cdots G_{kk}(S) = \sum_{l=1}^{k} \beta_l \prod_{i=1}^{l} G_{ki}(S) \tag{10}$$

이때 $G_{ki}(S)$는 식(11)과 같이 구한다.

$$G_{ki}(S) = \cfrac{1}{\alpha_i S + \cfrac{1}{\alpha_{i+1} S + \cfrac{1}{\begin{matrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{matrix} \; \alpha_{k-1} S + \cfrac{1}{\alpha_k S}}}} \tag{11}$$

단, $G_{k1}(S)$, 즉 $i=1$인 경우에 한해서 $\alpha_1 s$ 대신에 $1+\alpha_1 s$를 대입한다.

2. 逆數變換 (reciprocal transformation)[5]

前述한 方法에 의하여 얻어진 식(10)의 簡略化모델은 高周波에 대한 것으로 一般的으로 制御系에서는 低周波에 대한 간략화모델이 요구되므로 低周波에 대한 Routh 簡略式을 얻기 위하여 우선 G(S)를 식(12)와 같이 逆數變換式으로 놓는다.

$$\hat{G}(S) = \frac{1}{S} G\left(\frac{1}{S}\right) = \frac{b_n s^{n-1} + b_{n-1} s^{n-2} + \cdots\cdots\cdots\cdots + b_1}{a_n s^n + a^{n-1} s^{n-1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_0} \tag{12}$$

$\hat{G}(s)$는 G(s)의 分子, 分母多項式에서 그 係數들의 順序를 바꾸어 놓은 것 뿐으로서 $\hat{G}(s)$로의 逆數變換은 다시 G(S)로 돌아갈 것임을 알 수 있다.

여기서 특기할 사항은 $\hat{G}(S)$의 極點은 G(S)의 極點의 逆數라는 점이다.

즉, G(S)의 極點들을 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$이라하면 $\hat{G}(S)$의 極들은 $1/\lambda_1$, $1/\lambda_2 \cdots 1/\lambda_n$이라는 것이다.

따라서 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$가 陰數이면 $1/\lambda_1$, $1/\lambda_2, \cdots 1/\lambda_n$도 陰數로서 G(S)가 安定하면 $\hat{G}(S)$도 安定하게 된다.

G(S)의 k次 Routh 簡略式은 $\hat{G}(S)$의 k次 Routh簡略式 $\hat{G}_k(S)$의 逆數變換式이라 할 수 있다.

G(S)의 k次 Routh 簡略式을 $G_k(S)$, 또한 $\hat{G}(S)$의 k次 Routh 簡略式을 $\hat{G}_k(S)$라 하면 이들 사이에는 식(13)이 성립한다.

$$G_k(S) = \frac{1}{S} \hat{G}_k\left(\frac{1}{S}\right) \tag{13}$$

지금까지의 說明을 綜合하여 理解하기 쉽게 그림으로 圖示하면 그림1과 같이 4단계로 이루어짐을 알 수 있다.

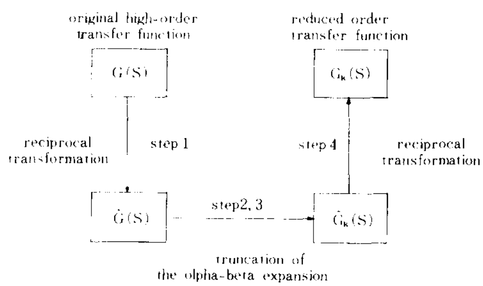

그림 1. Routh 간략법의 4단계 블럭선도
Fig. 1. The Block Diagram of the 4 Steps Routh Apprroximation.

III. 새로운 시스템 모델 簡略法

1. 새로운 모델 간략법의 分母多項式 決定 알고리즘

II장에서 說明한 Routh 簡略法은 簡略化 過程에서 두번에 걸친 逆數變換과 또한 連分數 形態로 表示되

는 $\alpha-\beta$展開式[5]을 有理化 시킬때 傳達函數의 次數가 높을수록 計算이 複雜해지는 短點을 포함하고 있다.

本 論文에서는 이러한 단점을 改善하기 위하여 시스템 모델 簡略化를 위한 새로운 알고리즘을 提案하였는데 本 節에서는 먼저 간략화 모델 傳達函數 分母多項式의 係數를 구하는 方法을 說明하기로 한다.

임의의 線型 時不變 制御系의 n次 傳達函數 H(S)를 식(14)와 같이 表示하고 本 論文에서 提示한 새로운 모델 簡略法에 의해 구해진 k次 간략화모델 傳達函數의 一般式을 식(15)와 같이 정의하자.

$$H(S)=\frac{B(S)}{A(S)}=\frac{b_{1,n}S^{n-1}+b_{1,n-1}S^{n-2}+\cdots+b_{1,2}S+b_{1,1}}{a_{1,n+1}S^{n}+a_{1,n+2}S^{n-1}+\cdots+a_{1,2}S+a_{1,1}} \quad (14)$$

$$H_k(S)=\frac{B_{k-1}(S)}{A_k(S)}$$

$$=\frac{b'_{1,k}S^{k-1}+b'_{1,k-1}S^{k-2}+\cdots+b'_{1,2}S+b'_{1,1}}{a'_{\ell,k+1}S^{k}+a'_{\ell,k}S^{k-1}+\cdots+a'_{\ell,2}S+a'_{\ell,1}} \quad (15)$$

$$(\text{단 } k=n-1,\ \ell=n-k+1)$$

n次 원 시스템 傳達函數 H(S)의 分母多項式 A(S)의 次數를 k次 또는 (k−1)次로 簡略化시킬 경우 간략화모델 傳達函數 $H_k(S)$, $H_{(k-1)}(S)$의 分母多項式 $A_k(S)$, $A_{(k-1)}(S)$의 係數를 구할 수 있으며 이를 利用하여 별도의 計算過程없이 식(16), (17)과 같이 간략화모델의 分母多項式을 구할 수 있다.

$$A_k(S)=A_{(n-1)}(S)=$$
$$a_{2,n}S^{n-1}+a_{2,n-1}S^{n-2}+\cdots+a_{2,2}S+a_{2,1}$$
$$=a_{2,k+1}S^{k}+a_{2,k}S^{k-1}+\cdots+a_{2,2}S+a_{2,1} \quad (16)$$

$$A_{(k-1)}(S)=A_{(n-2)}(S)$$
$$=a_{3,n-1}S^{n-2}+a_{3,n-2}S^{n-3}+\cdots+a_{3,2}S+a_{3,1}$$
$$=a_{3,k}S^{k-1}+a_{3,k-1}S^{k-2}+\cdots+a_{3,2}S+a_{3,1}$$
$$(\text{단 } k=n-1) \quad (17)$$

표 3에서 0가 포함된 行과 列을 제거하면 Routh簡略法의 分母多項式과 관계있는 alpha(α) 테이블과 유

표 3. 분모(D)테이블

Table 3. Demominator (D) Table.

$\delta_1=a_{1,n+1}/a_{1,n}$	$a_{1,n+1}$	$a_{1,n}$	$a_{1,n-1}\cdots\cdots a_{1,2}$	$a_{1,1}$
	$a_{1,n}$	0	$a_{1,n-2}\cdots\cdots$	
$\delta_2=a_{2,n}/a_{2,n-1}$	$a_{2,n}$	$a_{2,n-1}$	$a_{2,n-2}\cdots\cdots a_{2,1}$	
	$a_{2,n-1}$	0	$a_{2,n-3}\cdots\cdots$	
$\delta_3=a_{3,n-1}/a_{3,n-2}$	$a_{3,n-1}$	$a_{3,n-2}$	$a_{3,n-3}\cdots\cdots a_{3,1}$	
	$a_{3,n-2}$	0	$a_{3,n-4}\cdots\cdots$	
$\delta_4=a_{4,n-2}/a_{4,n-3}$	$a_{4,n-2}$	$a_{4,n-3}$	$a_{4,n-4}\cdots\cdots a_{4,1}$	
	$a_{4,n-3}$	0		
⋮	⋮	⋮		

$a_{i,j}=a_{i-1,j+1}$ (i는 2 이상이며 j가 홀수인 경우)

$a_{i,j}=a_{i-1,j+1}-\delta_{i-1}a_{i-1,j+2}$ (i는 2 이상이며 j가 짝수인 경우)

사함을 알 수 있다.

그러나 Routh, 간략법에서는 $\alpha-\beta$테이블에 의해서 α_i, β_i값을 구하여 $\alpha-\beta$展開式에 代入한 후 逆으로 有理化 시키는 반면에 本 論文에서는 두번에 걸친 逆數變換과 連分數를 有理化 시키는 複雜한 計算過程을 별도로 거치지 않고 간략화 시키기 원하는 次數모델의 分母多項式 係數를 표 3에서 바로 읽어 分母多項式 $A_k(S)$, $A_{k-1}(S)$를 구할 수 있도록 하였다.

2. 새로운 모델 簡略法의 分子多項式 決定 알고리즘

本 論文에서 提示한 새로운 모델 簡略法에 의해 구해진 간략화모델 傳達函數 $H_k(S)$의 分母多項式 $A_k(S)$는 1節에서 이미 구했다.

한편 새로운 方法에 의한 간략화모델 分子多項式 $B_{k-1}(S)$는 원 시스템의 定常狀態 應答과 간략화모델의 定常狀態 應答이 一致하도록 하기 위하여 각각을 級數展開한 후 時間 모멘트[6,12]를 갖게하는 方法을 利用 하였다.

원 시스템 傳達函數 H(S)의 時間函數를 h(t)라 하자.

$$H(S)=\int_0^\infty h(t)\,e^{-st}dt=\int_0^\infty h(t)\{1-St$$
$$+\frac{(st)^2}{2!}-\frac{(st)^3}{3!}+\cdots\}dt$$
$$=\int_0^\infty h(t)-S\int_0^\infty th(t)\,dt+\frac{S^2}{2!}\int_0^\infty t^2h(t)dt-$$
$$\frac{S^3}{3!}\int_0^\infty t^3h(t)\,dt+\cdots \quad (18)$$

$$H(S)=C_0+C_1S+C_2S^2+C_3S^3+\cdots C_iS^i+\cdots \quad (19)$$

$$\text{단, } C_i=\frac{(-1)^i}{i!}\int_0^\infty t^ih(t)\,dt$$

원 시스템 모델과 식(19)가 一致하기 위해서는 식(20)의 관계가 成立해야 한다.[9]

$$\left.\begin{aligned}&b_{1,1}=a_{1,1}C_0\\&b_{1,2}=a_{1,2}C_0+a_{1,1}C_1\\&\ \vdots\qquad\ \vdots\\&b_{1,n}=a_{1,n}C_0+a_{1,n-1}C_1+\cdots a_{1,1}C_{n-1}\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

이미 얻어진 간략화모델의 分母多項式을 利用 하여 간략화모델 傳達函數 $H_k(S)$를 식(15)와 같이 정의하고 이를 멱급수로 展開하여 식(21)과 같다고 생각해보자.

$$H_k(S)=C'_0+C'_1S+C'_2S^2+C'_3S^3+\cdots+C'_iS^i\cdots \quad (21)$$

식(19)의 원 시스템 傳達函數 H(S)의 멱급수 展開式 모멘트 값을 簡略化 시키기 원하는 모델 次數의 項까지 ($C_0=C'_0$, $C_1=C'_1$, $\cdots C_i=C'_i$) 一致시킴으로 간략화모델 分子多項式의 係數를 구할 수 있다.

간략화모델 傳達函數 $H_k(S)$와 식(21)이 같기 위해서는 원 시스템에서와 같이 식(22)가 成立 해야 한다.

$$\left.\begin{aligned} b_{1,1}' &= a_{1,1}' C_0' \\ b_{1,2}' &= a_{1,2}' C_0' + a_{1,1}' C_1' \\ &\vdots \qquad \vdots \\ b_{1,k}' &= a_{1,k}' C_0' + a_{1,k-1}' C_1' + \cdots + a_{1,1}' C_{k-1}' \end{aligned}\right| \qquad (22)$$

식(20)에서 후치대입법(back substitution)에 의해서 원 시스템의 모멘트 값($C_0, C_1, \cdots C_k$)을 구하고 이를 식(22)에 代入하여 간략화 모델의 分子係數($b_{1,1}', b_{1,2}', \cdots b_{1,k}'$) $b_{1,k}'$)를 구할 수 있으며 이 分子係數를 $b_{1,k}' S^{k-1}, b_{1,k-1}' S^{k-2} \cdots b_{1,2}' S, b_{1,1}'$ 순으로 일차결합하여 分子多項式$B_{k-1}(S)$를 決定한다.

따라서 1에서 구한 간략화모델 傳達函數 $H_k(S)$의 分母多項式$A_k(S)$와 원 시스템모델 傳達函數의 멱급수 展開式과 간략화모델 傳達函數의 멱급수 展開式의 모멘트 값을 一致시켜 얻은 간략화모델 分子多項式 $B_k(S)$를 $H_k(S) = B_{k-1}(S)/A_k(S)$ 形態로 結合하여 새로운 簡略化모델을 구할 수 있다.

Ⅳ. 시뮬레이션 및 結果考察

本 장에서는 새로운 線型 時不變 시스템 簡略法을 利用한 수치예를 들고 Routh 簡略法에 의한 計算過程과 각각에 의한 應答結果를 比較 함으로써 本 論文에서 提示한 새로운 簡略法의 우수성을 입증하였고 過度狀態의 特性을 알기 위하여 원 시스템과 간략화모델에 의한 過度應答結果를 그림으로 圖示하였다.

1. Routh 簡略法에 의한 簡略化 모델 수치예[5]

임으로 選定한 線型 時不變 制御系의 傳達函數 $H(S)$가 식(23)과 같다고 가정하고 이 시스템을 Routh 簡略法에 의한 3次 및 2次 간략화모델을 구해보자.

$$G(S) = \frac{28S^3 + 496S^2 + 1800S + 2400}{2S^4 + 36S^3 + 204S^2 + 360S + 240} \qquad (23)$$

우선 傳達函數 $G(S)$를 逆數變換한 $\hat{G}(S)$를 구해보면 식(24)와 같다.

$$\hat{G}(S) = \frac{2400S^3 + 1800S^2 + 496S + 28}{240S^4 + 360S^3 + 204S^2 + 36S + 2} \qquad (24)$$

식(24)를 $\alpha - \beta$ 테이블로 作成하면 표4, 표5와 같이 計算할 수 있다.

표 4. Alpha(Routh) 테이블

Table 4. Alpha(Routh) Table.

$\hat{\alpha}_1 = 2/3$	240 204 2 360 36
$\hat{\alpha}_2 = 2$	180 2
$\hat{\alpha}_3 = 45/8$	32
$\hat{\alpha}_4 = 16$	2

표 5. Beta(Routh) 테이블

Table 5. Beta(Routh) Table.

$\hat{\beta}_1 = 20/3$	2400 496 1800 28
$\hat{\beta}_2 = 10$	256
$\hat{\beta}_3 = 8$	
$\hat{\beta}_4 = 4$	8

표4, 표5에 의해서 $\alpha - \beta$ 展開式의 $F_1(S)$를 구하면 식(25)와 같다.

$$F_1(S) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{3}S + \cfrac{1}{2S + \cfrac{1}{\cfrac{45}{8}S + \cfrac{1}{16S}}}} \qquad (25)$$

식(25)와 β_i의 係數를 $\alpha - \beta$ 展開式에 代入한 후 원하는 次數만큼 취하여 다시 有理化시켜 Routh 收斂式 $\hat{G}_3(S)$를 구하면 식(26)과 같다.

$$\hat{G}_3(S) = \frac{1800S^2 + 1350S + 352}{180S^3 + 270S^2 + 151S + 24} \qquad (26)$$

식(26)을 逆數變換하면 식(27)과 같이 간략화모델 傳達函數 $G_3(S)$를 구할 수 있다.

$$G_3(S) = \frac{352S^2 + 1350S + 1800}{24S^3 + 151S^2 + 270S + 180} \qquad (27)$$

같은 方法으로 2次 簡略化모델을 구하면 식(28)과 같다.

$$G_2(S) = \frac{30S + 40}{3S^2 + 6S + 4} \qquad (28)$$

2. 새로운 簡略法에 의한 簡略化모델 수치예

本 論文에서 提示한 새로운 簡略法에 의하여 Routh 簡略法에서 使用한 수치예를 선정하여 간략화모델을 구해보자.

먼저 傳達函數 $H(S)$의 分母多項式 $A(S)$를 簡略化시키기 위하여 표3에 의해 테이블을 作成하면 표6과 같다.

표 6. D-Table을 利用한 수치예

Table 6. Illvstrative Example Using D-Table.

$\delta_1 = 0.0556$	2 36 204 360 240 36 0 360 360
$\delta_2 = 0.1957$	36 183.984 360 240 ←K=3인 경우 183.984 0 240
$\delta_3 = 0.5877$	183.984 313.032 240 ←K=2인 경우 313.032 0
$\delta_4 = 1.3043$	313.032 240 240

표6에 의해서 3次 및 2次 간략화모델 傳達函數 $H_3(S)$, $H_2(S)$의 分母多項式 $A_3(S)$, $A_2(S)$는 식(16), (17)에 의하여 식(29)와 같이 구할 수 있다.

$$\left.\begin{aligned} A_3(S) &= 36S^3 + 183.984S^2 + 360S + 240 \\ A_2(S) &= 183.984S^2 + 313.032S + 240 \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

한편 간략화모델 傳達函數 分子多項式 $B_2(S)$, $B_1(S)$

를 구하기 위하여 식(23)으로 表示된 원 시스템 傳達函數를 멱급수로 展開하면 식(30)과 같다(S=0).

$$H(S)=10-7.5S+4.8167S^2-2.2335S^3+\cdots \quad (30)$$

식(30)과 식(20), (22)에 의하여 간략화모델 分子多項式의 係數를 구하면 다음과 같다. 이때 간략화모델 分母多項式 $A_3(S)$, $A_2(S)$는 식(29)에 이미 구했으므로 a'_{ik}의 값은 알 수 있다.

〈k=3인 경우〉

$$b'_{1,1}=a'_{1,1}C'_0=2400$$

$$b'_{1,2}=a'_{1,2}C'_0+a'_{1,1}C'_1=1800$$

$$b'_{1,3}=a'_{1,3}C_0+a'_{1,2}C_1+a'_{1,1}C'_2=295.848$$

〈k=2인 경우〉

$$b'_{1,1}=a'_{1,1}C'_0=2400$$

$$b'_{1,2}=a'_{1,2}C'_0+a'_{1,1}C_1=1330.32$$

따라서 간략화모델 分子多項式 $B_2(S)$, $B_1(S)$는 식(31)과 같이 구할 수 있다.

$$\left.\begin{aligned} B_2(S)&=295.848S^2+1800S+2400 \\ B_1(S)&=1330.32S+2400 \end{aligned}\right| \quad (31)$$

지금까지 구한 分母多項式 $A_3(S)$, $A_2(S)$와 分子多項式 $B_2(S)$, $B_1(S)$를 결합하여 식(32), (33)과 같은 새로운 3次 및 2次 간략화모델의 傳達函數 $H_3(S)$, $H_2(S)$를 구할 수 있다.

$$H_3(S)=\frac{B_2(S)}{A_3(S)}=\frac{8.218S^2+50S+66.6667}{S^3+6.1328S^2+10S+6.6667} \quad (32)$$

$$H_2(S)=\frac{B_1(S)}{A_2(S)}=\frac{7.2306S+13.0446}{S^2+1.7014S+1.30446} \quad (33)$$

3. 應答結果 公析

표 7에서 알 수 있듯이 本 論文에서 提示한 새로운 簡略法에 의한 간략화모델 $H_3(S)$, $H_2(S)$의 極點들이 원 시스템모델 傳達函數 $H(S)$와 마찬가지로 複素平面의 左半面에 存在함을 보여 간략화모델이 安定함을 알 수 있다.

표 7. 원 시스템과 간략화모델의 극점과 오점
Table 7. Poles and Zeros of the Original System and Simplified Model.

구분 / 종류	Point of Poles	Point of Zeros
H(S)	−1.197 ±j0.693 −7.803 ±j1.358	−2.161 ±j1.315 −13.392
$H_3(S)$	−1.0245+j0.7635 −4.0839	−4.1108 −1.9734
$H_2(S)$	−0.8507±j0.7621	−1.8041
$G_3(S)$	−1.196 ±j0.702 −3.900	−1.918 ±j1.315
$G_2(S)$	−1.000 ±j0.577	−1.333

Routh 簡略法과 本 論文에서 提示한 새로운 簡略法에 의하여 원 시스템모델 傳達函數 $H(S)$와 간략화모델 傳達函數 $H_3(S)$, $G_3(S)$에 대한 임펄스응답 에너지(impulse response energy)는 표 8에 比較하여 나타내었다.

표 8. 원 시스템과 간략화 모델의 임펄스응답에너지
Table 8. Impulse Response Energies of the Original System and Simplified System.

	H(S)	$H_3(S)$	$H_2(S)$	$G_3(S)$	$G_2(S)$
Impulse Response energy	64.529	64.032	58.4919	64.016	58.339

또한 過度狀態 應答特性을 알기 위하여 원 시스템모델 傳達函數 $H(S)$, 簡略化모델 傳達函數 $H_3(S)$와 Routh 簡略法에 의한 간략화모델 $G_3(S)$의 계단응답을 그림 2에 나타냈으며 또한 周波數 特性을 알기 위하여 그림 3에 Bode 선도로 比較 하였다.

그림 2, 3에서 알 수 있듯이 새로운 簡略法에 의한 간략화모델의 特性이 M. F. Hutton과 B. Friedland가 발표한 Routh 簡略法에 비하여 결코 뒤떨어지지 않음을 보여준다.

V. 結 論

M. F. Hutton과 B. Friedland가 發表한 周波數領域 Routh 簡略法은 시스템의 고유치를 計算함이 없이 원

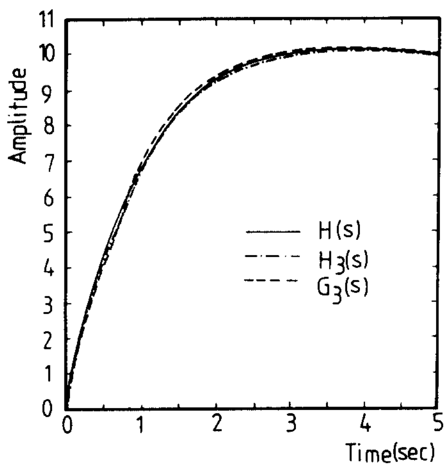

그림 2. 원 시스템과 간략화 모델에 대한 단위계단응답
Fig. 2. Unit Step Responses of the Original and Reduced Models.

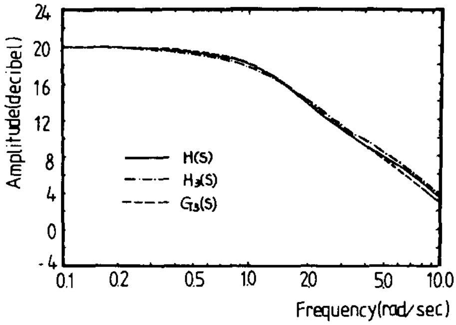

그림 3. 원 시스템과 간략화 모델에 대한 주파수응답
Fig. 3. Frequency Respon of the Original and Reduced Models.

시스템이 安定하면 간략화모델 또한 安定하다는 장점을 지니고 있다.

그러나 展開過程에서 두번에 걸친 逆數變換과 連分數 形態로 表示되는 $\alpha-\beta$ 展開式에 대한 有理化등 計算過程이 複雜한 단점을 내포하고 있다.

本 論文에서 提示한 周波數領域에 있어서 새로운 簡略化는 Routh 簡略法의 短點으로 지적되는 逆數變換과 連分數 展開式을 利用하지 않고 Routh의 alpha (d) 테이블을 變形시킨 새로운 테이블을 作成하여 그 테이블에서 직접 簡略式의 分母多項式을 구할 수 있는 計算이 매우 간편한 새로운 簡略化 方法을 提示하였다.

한편 分子多項式은 원 시스템과 簡略化모델의 멱급수수를 展開시켜 簡略化 시키기 원하는 次數 項까지 時間 모멘트를 一致시키는 方法을 使用 하였다.

本 論文의 특징은 원 시스템이 安定하면 간략화모델 또한 반드시 安定하며 簡略化 過程에서 Routh 簡略法에 比하여 計算이 간편함을 들 수 있겠고 멱급수 展開에 의한 時間 모멘트를 一致시키는 方法은 간략화모델의 分子係數를 구하는 경우로 제한 함으로써 시스템이 不安定해지는 경우를 防止 하였다.

參 考 文 獻

[1] M. Jamshidi, "An overview on the aggregation of large-scale system", *IFAC Proc. of the 8-th Triennial Congress,* vol.2, pp.1304-1314, 1981.

[2] M.G. Singh and A. Titli, "Handbook of Large Scale Systems Engineering Applications," North-Holland, pp. 72-73, 1979.

[3] 권욱현, 이종수, "大規模시스템 硏究動向" 전기학회지, vol. 33, no. 3, March 1984.

[4] S.S. Lamba and S.V. Rao, "Oh suboptimal control via the simplified model of davison", *IEEE Trans. Automat. Control* vol. AC-19, pp.448-450, 1974.

[5] M.F. Hutton and B. Friedland, "Routh approximation for reducing order linear, timeinvariant systems", *IEEE trans. on automat. Control,* vol. AC-20, pp.329-337, 1975.

[6] Y. Shamash, "Model reduction using routh stability criterion and the pade approximation technique", *Int. J. Control,* vol.21, no. 3, pp.475-484, 1975.

[7] M. Aoki, "Some approximation for estimation and control of large scale systems", *IEEE trans. on automat. Control.* vol. AC-23, pp.173-181, 1978.

[8] M. Arumugam and M. Remamoorth, "A method of simplifying large dynamical system", *Int. J. Control,* vol.17, pp.1129-1135, 1973.

[9] M. Jamshid, "Large-scale system.: modeling and control", North-Holland, pp.67-82, 1983.

[10] V. Krishnamurthy and V. Seshadri, "A simple and direct method of reducing order linear system using Routh Approximations in the Frequency Domain," *IEEE Trans. on Automat.* Control, vol. AC-21, pp. 797-799, 1976.

[11] Y. Shamash, "Routh approximation using the schwarz canonical form", *IEEE trans. on Automat. Control,* vol. AC-23, pp.940-941, 1979.

[12] G.B. Mahapatra, "A further note on selecting a low order system using the dominant eigenvalue concept", *IEEE trans. on Automat. Control,* vol.AC-24, pp.135-136, 1979.

[13] T.C. Chen, "A formula and an algorithm for continued fraction inversion", *Proc. IEEE,* vol.57, pp.1780-1781, 1969.

[14] K.J. Astrom, "Introduction to stochastic control theory", *New York: Academic,* 1970.