

I. 새로운 직교변환군 : 매개변수형 삼각함수 행렬에 의한 유도

(I. A New Family of Orthogonal Transforms : Derivation based on the Parametric Sinusoidal Matrix)

崔 太 永*

(Tae-Young Choi)

要 約

새로운 직교변환군을 소개하였다.

이들은 기본적으로 기존의 DCT나 SCT같은 삼각함수형 직교변환에서 유추하여, FFT연산법을 이용할 수도 있을 매개변수형 삼각함수 행렬을 모델화하여 직교 조건을 계산하였다.

직교조건을 만족하는 매개변수들을 시행오차 과정을 거쳐, 어떤 의미로는 특별해에 의하여 구하였지만 10여 가지의 새로운 변화행렬을 구할 수 있었다. 또한 이들의 직교변환은 DFT에 의해 계산될 수 있음을 보였다.

Abstract

A new family of sinusoidal orthogonal transform is introduced. For a derivation, a parametric sinusoidal matrix whose transform might be implemented by a suitable FFT algorithm is modeled basically on the analogy of well-known sinusoidal transform such as DCT, SCT, etc., and its orthogonality condition is calculated.

The parameters satisfying orthogonality condition are determined, in a sense, by particular solution after trial and error. However more than then transform matrices not yet known are obtained. It is also shown that these transforms can be computed by a DFT of an image.

I. 서 론

직교변환이 데이터 압축의 한 방법으로 신호처리에 자주 사용되고 있으나 직접적인 직교변환에는 다량의 계산량이 필요하여, 실제 응용에는 FFT(fast Fourier Transform : 고속 DFT(Discrete Fourier Transform))와 같은 고속 계산법이 필요하다.

이미 알려진 각종 삼각함수형 직교변환행렬¹⁾은 DFT행렬의 조합으로 나타낼 수 있어 FFT계산법을 사용할 수 있다(IV장 참조).

삼각함수형 직교행렬은 삼각함수의 기본 성질상($\cos x = \text{Re}(e^{jx})$) DFT와 연관성이 있을 것이라 보고 또한 DFT와 연관성이 있게되면 고속계산이 가능하다는 데 착안하여, 새로운 삼각함수형 직교행렬의 유도가 본 논문의 주요 목적이다.

우선 표. 1의 직교행렬의 유도과정을 살펴보면 제각기 다르다. DCT(Discrete Cosine Transform)는 직교 다항식인 Chebyshev 다항식으로부터 유도했으며¹⁾,

*正會員, 亞洲大學校 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Ajou Univ.)
接受日字 : 1986年 2月 21日

DST(Discrete Sine Transform)는 1차 stationary Gauss-markov sequence의 고속 KL변환(FKLT : Fast Karhunen Loeve Transform) 과정에서 유도되었으며, 이것은 처음과 마지막 원소를 수정한 sequence의 KLT이기도 하다. [2, 6, 7]

SCT(Symmetric Cosine Transform)는 위 두가지 유도과정과 유사한 방법으로 유도 되었으며[3], OCT(Odd Cosine Transform)는 data sequence $x(n)$ ($n=0, 1, \dots, N-1$)을대칭으로 배열한 sequence $x_s(n)$ ($=x(-n), 1-N \leq n \leq -1; =x(n), 0 \leq n \leq N-1$)을 $(2N-1)$ 점 DFT변환하여 유도하였[4], 이와 유사하게 $x_s(n)$ ($=x(-n-1), -N \leq n \leq -1; =x(n), 0 \leq n \leq N-1$)을 $2N$ 점 DFT변환으로 DCT도 유도된다[4].

CDFT(Composite-Discrete Fourier Transform)는 DFT 행렬의 실수와 허수부분의 합으로 된 것으로 실수이고 대칭인 circulant 행렬을 대각선화 한다[5]. 그리고 A. K. Jain은 Jacobi 행렬의 eigen vector set 를 구함으로써 10여가지의 직교행렬을 산출해냈다([6], 표. 1의 1, 2, 6번).

표 1. 직교행렬 $Y(N \times N)$
Table 1. Orthogonal matrices $Y(N \times N)$.

명 칭	$y(m, n), m, n=0, 1, \dots, N-1$
DCT [1, 4, 6]	$A(m) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{\pi}{N} m \left(n + \frac{1}{2} \right), A(m) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & m=0 \\ 1, & m \neq 0 \end{cases}$
DST [2, 6]	$\sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{\pi(m+1/2)(n+1/2)}{N+1}$
SCT [3]	$B(m) = \sqrt{\frac{2}{N-1}} \cos \frac{\pi mn}{N-1}, B(m) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & m=0 \text{ 또는 } m=N-1 \\ 1, & \text{기타} \end{cases}$
OCT [4]	$A(m) = \sqrt{\frac{4}{2N-1}} \cos \frac{2\pi mn}{2N-1}, A(m) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & m=0 \\ 1, & m \neq 0 \end{cases}$
CDFT [5]	$\sqrt{\frac{2}{N}} \cos \left(\frac{2\pi mn}{N} \pm \frac{\pi}{4} \right)$
EDCT-2 EDST-3 [6]	$\sqrt{\frac{2}{N}} \cos \left\{ \frac{\pi}{N} \left(m + \frac{1}{2} \right) \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\}$

위와같이 각기 유도된 변환행렬들은 한두가지 행이 나 열을 제외한 나머지 원소들은 삼각함수로 나타낼 수 있어 FFT계산법을 이용할 수 있다. 그러나 OCT의 경우는 홀수점 $(2N-1)$ DFT와 연관이 있으므로 N 에 따라 계산시간 면에서는 불리하다. 한편 광학적으

로 2차원 신호를 상각화우 대칭으로 배열하여 Fourier 변환 영역에서 OCT변환결과를 얻는 방법도 알려지고 있다[8].

본 논문에서는 앞서 언급한 표. 1의 기존 직교행렬의 유도법과는 달리, 기존의 삼각함수형 직교행렬의 형태에서 유추하여 삼각함수형 직교행렬의 일반형을 매개변수 함수로 가정한 다음, 직교 조건을 만족하는 매개변수를 구하는 과정에 역점을 두었고, 이렇게 얻어진 삼각함수형 직교행렬에 의한 신호변환이 고속 계산이 가능한지를 즉, DFT와 연관성이 있는지를 검토하였다.

논문구성은, II장에서는 삼각함수형 직교행렬의 일반형을 매개변수 함수로 모델화하고 직교조건에 대해서 분석하였으며, III장에서는 직교행렬의 유도 과정을 상세히 기술하였고 IV장에서는 유도한 직교 행렬과 DFT와의 관계를 나타냈으며, 마지막으로 V장 결론 순으로 되어있다.

II. 삼각함수형 직교행렬의 일반형

1. 일반형 및 직교조건

표1의 기존 직교행렬들의 구성 형태에서 유추하여, 일반적인 삼각함수형 변환행렬 $Y(y(m, n); m, n=0, 1, \dots, N-1)$ 의 형태를 식(1)처럼 매개변수 $(\lambda, a, b, c, \theta, A(m), B(n))$ 함수로 가정하겠다. 그리고 Y 가 직교행렬이 되기 위한 직교조건(식(2))을 만족시킬 수 있는 관계식을 계산하기로 한다.

$$y(m, n) = \lambda A(m) B(n) \cos \{ a\pi(m+b)(n+c) + \theta \} \tag{1}$$

여기서, λ, a, b, c : 실수상수,
 θ : 위상 (radian)

$$A(m) \text{ 또는 } B(m) = \begin{cases} 1, & m \neq m' \\ \beta, & m = m' \end{cases} \quad (\beta \neq 0 \text{인 실수상수})$$

그리고 $A(m) = \beta$ 인 경우가 한두가지 m 에서만 존재한다고 가정한다(표. 1에서 유추).

식(1)의 Y 가 직교행렬이 되기 위해서는 식(2)를 만족하여야 된다.

$$\left. \begin{aligned} Y^t Y &= I \text{ (unit matrix),} \\ \text{또는 } \sum_{m=0}^{N-1} y(m, l) y(m, n) &= \delta(l-n) \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

한편, $Y^t Y$ 를 D 라 놓으면,

$D = Y^t Y$
 D 의 원소 $d(l, n)$ 은 식(1) 및 식(3)에 의하여 식(4)로 계산된다.

$$\begin{aligned}
 d(l, n) &= \lambda^2 B(l) B(n) \sum_{m=0}^{N-1} A(m)^2 \cos \{ a\pi(m+b)(l+c) \\
 &\quad + \theta \} \cos \{ a\pi(m+b)(n+c) + \theta \} \\
 &= \frac{\lambda^2 B(l) B(n)}{2} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} \cos 2(m+b)p + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{m=0}^{N-1} \cos (2(m+b)q + 2\theta) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=m'}^{N-1} (A(m)^2 - 1) (\cos 2(m+b)p \right. \\
 &\quad \left. + \cos (2(m+b)q + 2\theta)) \right\} \\
 &= \lambda^2 B(l) B(n) \{ f_p(l, n) + f_q(l, n) \\
 &\quad + g_p(l, n) + g_q(l, n) \} \tag{4}
 \end{aligned}$$

여기서, $p = \frac{a\pi}{2}(l-n)$

$q = \frac{a\pi}{2}(l+n+2c)$

$$f_p(l, n) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \cos 2(m+b)p$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ e^{i2bp} \sum_{m=0}^{N-1} e^{i2mp} \right\}$$

$$= \frac{\sin Np \cos (N+2b-1)p}{2 \sin p}$$

$$f_q(l, n) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \cos (2(m+b)q + 2\theta)$$

$$= \frac{\sin Nq \cos [(N+2b-1)q + 2\theta]}{2 \sin q}$$

$$g_p(l, n) = \sum_{m=m'}^{N-1} \frac{A(m)^2 - 1}{2} \cos 2(m+b)p$$

$$g_q(l, n) = \sum_{m=m'}^{N-1} \frac{A(m)^2 - 1}{2} \cos [2(m+b)q + 2\theta]$$

식(2)와 (4)에서, Y가 직교행렬이 되려면 식(4)의 {}내의 항이 l=n에서만 값을 가져야 된다. 즉, {}내의 항을 z(l, n) 이라하면 식(5)가 성립되어야 한다.

$$\begin{aligned}
 z(l, n) &\leq f_p(l, n) + f_q(l, n) + g_p(l, n) + g_q(l, n) \\
 &= \alpha(l) \delta(l-n) \tag{5}
 \end{aligned}$$

이때 식(4)는 식(6)으로 된다.

$$d(l, n) = \lambda^2 B(l)^2 \alpha(l) \delta(l-n) \tag{6}$$

따라서 Y가 직교행렬이 되기 위해서는 식(2)와 식(6)이 동일하여야 된다. 즉, $\alpha(l)$ 의 값을 안다면 λ 와 B(l)의 값을 구할 수 있다. 예를 들면, 모든 l에 대하여 $\alpha(l) = M$ 이라면 B(l)=1, $\lambda = 1/\sqrt{M}$ 이다. 그리고 $\alpha(0) = 2M$ 이고 그 외의 l에 대해서 $\alpha(l) = M$ 인 경우에는 B(0)= $1/\sqrt{2}$, B(l)= $1(l \neq 0)$ 이고 ($\beta = 1/\sqrt{2}$, $m' = 0$) $\lambda = 1/\sqrt{M}$ 이다.

그런데 식(5)의 z(l, n)은 a, b, c, θ , A(m)의 매개변수를 포함하고 있으므로 일반해를 간단히 구하기가 어렵다. 이를 위해 Z의 구성행렬 F_p, F_q, G_p, G_q의 특성을 알아보고 이에 따라 식(5)의 해를 구할 수 있는 방법을 찾아보기로 한다.

2. Z행렬의 특성

식(4)에서 F_p, G_p의 원소는 |p|의 함수, 즉 |l-n|의 함수이고 F_q, G_q는 q의 함수, 즉 (l+n)의 함수이므로, 전자의 경우는 Toeplitz 행렬형이고 후자는 대각선에 직교하는 모든 원소끼리는 동일하다(그림 1).

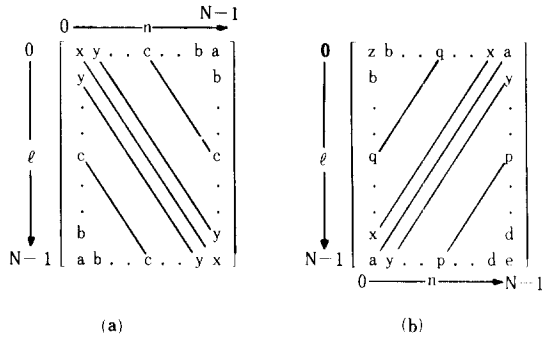


그림 1. 행렬구조 (A) F_p 및 G_p, (B) F_q 및 G_q

Fig. 1. structures of matrices: (A) F_p and G_p, (B) F_q+G_q

식(5)에서 Z행렬은 대각선 행렬이 되어야 하므로, 그림 1의 행렬구조 특성에 미루어 보아 F_p+G_p와 F_q+G_q의 대각선 바깥 원소들은, 각각 일정하되 극성이 틀리든지(식(7)), (l±n)은 ev 또는 od의 성질이 동일하므로 원소 좌표를 합한 것의 ev 및 od에 따라 일정하되 극성이 틀리면(식(8)), 식(5)의 조건은 성립됨을 알 수 있다.

$$\left. \begin{aligned}
 f_p(l, n) + g_p(l, n) &= C_1 \\
 f_q(l, n) + g_q(l, n) &= -C_1 \quad l \neq n \quad \left\} \tag{7}
 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 f_p(l, n) + g_p(l, n) &= \begin{cases} c_2, l+n=ev (l \neq n) \\ c_3, l+n=od \end{cases} \\
 f_q(l, n) + g_q(l, n) &= \begin{cases} -c_2, l+n=ev (l \neq n) \\ -c_3, l+n=od \end{cases} \tag{8}
 \end{aligned}$$

그리고 식(4)의 g_p(l, n)과 g_q(l, n)은 각각 cos(A(l-n)) 및 cos(A(l+n)+2A_c+2 θ) 함수이다(A= $a\pi(m'+b)$). |l-n|과 (l+n)은 각각 0~N-1, 0~2N-2인 정수이므로 A $\neq k\pi(k=in)$ 이면 l, n의 값에 따라 이들 cosine항이 일정하지 않다.

또한 어느 한(l, n)을 제외한 나머지(l, n)의 값에 대한 cosine값이 일정할 수도 없다. 즉, 그림 1에서 G_p행렬의 원소 값이 x=y=b=a이고 x $\neq c$ 일 수가 없고, G_q행렬의 원소 z=b=x=d=e이고 z $\neq y$ 일 수도 없다. 다시 말하면, G_p 및 G_q행렬의 원소가 어느 한두줄의 원소를 제외한 나머지 줄의 원소가 일정할 수가 없다.

한편 p 나 q 가 $k\pi(k=in)$ 일 때의 $f_p(l, n)$ 과 $f_q(l, n)$ 의 값은 식(9)로 계산된다.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{p \rightarrow k\pi} f_p(l, n) &= \frac{N}{2} \cos 2bk\pi \\ \lim_{q \rightarrow k\pi} f_q(l, n) &= \frac{N}{2} \cos (2bk\pi + 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

III. 직교행렬의 유도

식(7), (8)에서 $F_p + G_p$ 와 $F_q + G_q$ 가 $(l+n)$ 의 모든 값 $(l \neq n)$ 또는 ev, od 에 따라 일정한 값을 갖도록 해를 구하여야 하는데 $F_p + G_p$ 와 $F_q + G_q$ 는 2개의 행렬의 합이므로 서로 연관해서 풀어야 되는 어려운 점이 있다. 본 연구에서는 특별한 경우로, 식(1)의 주어진 가정처럼 $A(m) = \beta$ 가 되는 경우가 한두가지로 볼때에 식(7) 및 (8)의 G_p 나 G_q 를 하나의 경계조건으로 간주하고 우선적으로 F_p 나 F_q 의 거의 모든 원소가 일정한 값을 갖도록 매개변수들을 구하고 이때 G_p 와 G_q 의 경계조건과 더불어 식(7) 및 (8)이 완전히 성립되는 경우를 찾아보기로 한다.

그러면 식(4)의 $f_q(l, n)$ 을 다음과 같이 몇 가지로 변형하여 $f_q(l, n)$ 이 일정한 값을 갖는 경우를 찾아 식(7) 및 (8)이 성립되는 경우를 찾아보자.

$$f_q(l, n) = \frac{\sin Nq \cos [(N+2b-1)q+2\theta]}{2 \sin q} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin [(2N-1)q+2bq+2\theta]}{4 \sin q} \\ &= \frac{\sin [(2b-1)q+2\theta]}{4 \sin q} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \{ \cos (2bq+2\theta) - \cos [(2N+2b)q+2\theta] \} \\ &+ \frac{\cot q}{4} \{ \sin [(2N+2b)q+2\theta] - \sin (2bq+2\theta) \} \end{aligned} \quad (12)$$

$$= \frac{\cos 2bq \{ \sin (2N-1)q + \sin q \} + \sin 2bq \{ \cos (2N-1)q - \cos q \}}{4 \sin q} \quad (13)$$

여기서, 식(13)은 식(4)에서 $\theta=0$ 일때 얻은 수식이다.

1. $\sin Nq=0$ 인 경우

식(10)에서, $\sin Nq=0$ 이면,

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{\alpha}{2} \pi (l+n+2c) = \frac{r}{N} \pi (r=in) \\ f_q(l, n) &= \begin{cases} 0, & q \neq k\pi \\ \frac{N}{2} \cos (2bk\pi + 2\theta), & q = k\pi (k=in) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

이 된다. 모든 l, n 에 대해 식(14)가 성립될려면,

$$a = \frac{J}{N} (J=ev), c \cdot J=in \quad (15)$$

인 경우로 가정할 수 있다. 그러면, J 의 값에 따라 풀어보자.

(A) $J=2$ 인 경우: 식(4) 및 (15)에서,

$$2c=in, p = \frac{l-n}{N} \pi, q = \frac{(l+n+2c)\pi}{N} \quad (16)$$

이 되며, $q=k\pi(k=in)$ 가 되는 경우는 $(l+n)$ 의 값에 따라 반드시 한두가지의 k 의 값이 존재함을 알 수 있고, p 는 $0(l+n)$ 을 제외하고는 $in\pi$ 가 되는 경우가 없다. 따라서 식(4) 및 (9)에서,

$$f_p(l, n) = \frac{N}{2} \delta(l-n) \quad (17)$$

임을 알 수 있다.

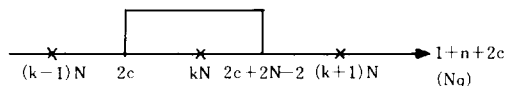
식(14)에서 $q=k\pi$ 일 때의 $f_q(l, n)$ 의 값이 0이 아니고 대각선상의 원소가 아니라면 F_q 는 대각선에 직교하는 어느 한두 줄의 원소를 제외하고는 모두 0인 행렬이다. 이 경우, 식(14), (17), (5)에서 Z 가 대각선 행렬이 될려면 $G_p + G_q = -F_q$ 가 되어야 되는데 즉, $G_p + G_q$ 는 대각선에 직교하는 한두줄의 원소를 제외한 나머지 원소는 0이 되어야 하는데 이것은 II. 2절의 논리에 모순된다.

따라서, $q=k\pi$ 일 때의 $f_q(l, n)$ 의 값이 모두 0이든지 아니면 대각선상의 원소이어야 된다($l=n=0$ 또는 $l=n=N-1$).

그러면 $q=k\pi$ 가 되는 k 의 값이 한 가지만 경우부터 살펴보자.

1) $q=k\pi$ 가 존재할 경우

$2c=(k-1)N+1$ 이고 $l+n=N-1$ 인 경우에 $q=k\pi$ 가 됨을 다음 그림 설명에서 알 수 있다.



$$(k-1)N < 2c \leq kN, kN \leq 2c+2N-2 < (k+1)N$$

공통영역은 $2c=(k-1)N+1$ 이다 ($2c$ 는 in 이므로).

그리고 $q=k\pi$ 가 되는 경우는 $l+n=N-1$ 인 경우 뿐이 위에서 언급한 바와 같이, $q=k\pi$ 일 때가 $l+n=N-1$ 이므로 대각선상의 원소가 아니므로 $f_q(l, n) | l+n=N-1$ 은 0이어야 한다.

이것은 식(14)에서 $4(bk\pi + \theta) = od\pi$ 가 되어야 됨을 뜻한다. 이때 $F_p + F_q = NI/2$ 가 됨으로 $G_p + G_q = 0$ 이 된다. 즉 $A(m) = 1$ 이 된다.

따라서 식(5), (6)에서, $Z=NI/2, a(l)=N/2, B(l)=1, \lambda = \sqrt{2/N}$ 임을 알 수 있다. 따라서 구하고자 하는 직교행렬 Y 의 원소는 식(18)로 나타낼 수 있다.

$$y(m, n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \left\{ \frac{2\pi}{N} (m+b) \left(n + \frac{(k-1)N+1}{2} \right) + \theta \right\}$$

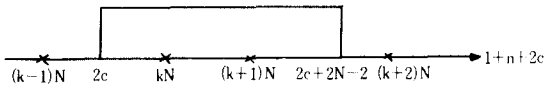
단, $4(bk\pi + \theta) = od\pi, k=in \quad (18)$

식 (18)의 특수형으로, $2\theta = in\pi$ 인 경우에는 $4bk = od$ ($k \neq 0$) 이어야 되고, 이때 $y(m, n)$ 은 \cos 인 또는 \sin 겸용 함수가 된다(표 2의 1번: $\theta = 0$ 또는 $\pi/2$ 인 경우). 그리고 $4\theta = od\pi$ 이면, $2bk = in$ 가 되어 표 2의 2번 직교행렬을 얻는다($k=0$ 이면 b 는 임의의 실수라도 된다). 그런데 표 2의 2번에서, 위상 $\theta = od\pi/4$ 로 $\pm\pi/4, \pm 3\pi/4, \dots$ 등 여러가지 값을 가질 수 있으나, 직교행렬의 성질상 임의의 행이나 열의 부호를 바꾸어도 직교행렬이 되므로 $\theta = \pm\pi/4$ 만 고려하면 된다.

2) $q = k\pi$ 및 $(k+1)\pi$ 가 존재할 경우

1)의 과정처럼 다음 그림에서, $2c = (k-1)N + r$, ($2 \leq r \leq N$ 인 in)일 때에 $q = k\pi$ 및 $(k+1)\pi$ 가 된다. 식(14)에서 식(19)를 얻는다.

$$q = k\pi, \quad l+n = N-r : q = (k+1)\pi, \quad l+n = 2N-r \quad (19)$$



여기서 $q = k\pi$ 및 $q = (k+1)\pi$ 일 때의 $f_q(l, n)$ 의 값이 모두 0이라면, 식(9)에서,

$$4(bk\pi + \theta) \text{od}\pi, \quad 4\{(k+1)\pi + \theta\} \text{od}\pi \quad (20)$$

가 되어야 한다. 식(20)의 공통조건은 $2b = in, 4\theta = od\pi$ 이다. 이때, $F_p + F_q = NI/2$ 이므로 $G_p + G_q = 0$ 이면 된다 ($A(m) = 1$).

식(5), (6)에서, $B(l) = 1, \lambda = \sqrt{2/N}$ 이므로 구하고자 하는 Y 는 식(21)로 계산된다.

$$y(m, n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \left\{ \frac{2\pi}{N} (m+b) \left(n + \frac{kN+r}{2} \right) + \frac{\text{od}\pi}{4} \right\} \quad (21)$$

단, $2b$ 및 $k = in, 2 \leq r \leq N$ 인 in .

그런데 (21)의 $\cos \{ \}$ 내의 항을 X 라 하면 X 는 다음과 같이 전개된다.

$$X = \frac{2\pi}{N} (m+b) \left(n + \frac{r}{2} \right) + mk\pi + \left(bk + \frac{\text{od}}{4} \right) \pi$$

X 의 세째항은 식(21)의 조건에 의해 결국 $\text{od}\pi/4$ 이고, 둘째항은 $in\pi$ 이므로 Y 의 행의 부호에 관계될 뿐이다.

마찬가지로 첫째항의 $r = N$ 일 때는 $r = 0$ 으로 계산하여도 직교행렬이 되는 데는 아무런 상관이 없다. 따라서 표 2의 2번 행렬에서 $k=1$ 일 때와 위의 결과를 동시에 나타낸 직교행렬이 표 2의 5번이다.

한편 식(19)에서, $r=2$ 일 때는 $l+n = N-1$ 일 때에 $q = (k+1)\pi$ 가 되고, $r=N$ 이면 $l+n=0$ 일 때에 $q=k\pi$ 가 된다. 이 두가지의 경우는 대각선상의 원소에 해당되므로 나머지 대각선 바깥의 원소의 값이 0이면 된다.

우선 $r=2$ 이면 식(9)에서 $4(bk\pi + \theta) = \text{od}\pi$ 이어야 되

고, $A(m) = 1$ 일 때에 ($G_p + G_q = 0$ 으로 간주) 식(5)는 다음과 같이 대각선 행렬이 된다.

$$\alpha(l) = \begin{cases} \frac{N}{2} \{1 + \cos(2b(k+1)\pi + 2\theta)\}, & l = N-1 \\ \frac{N}{2}, & l \neq N-1 \end{cases}$$

따라서 구하고자 하는 Y 는 식(22)로 된다.

$$y(m, n) = B(n) \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \left\{ \frac{2\pi}{N} (m+b) (n+1) + \frac{(k-1)N}{2} + \theta \right\} \quad (22)$$

$$\text{단, } B(N-1) = \frac{1}{\sqrt{Q}}, \quad Q = 1 + \cos(2b(k+1)\pi + 2\theta) \neq 0,$$

단 $4(bk\pi + \theta) = \text{od}\pi, k = in$

식(22)의 특수형으로 $k=1, \theta = -\pi/2$ 이면, $b = \text{od}/4, Q=2$ 가 된다(표 2의 3번행렬).

다음 $r=N$ 이면 식(9)에서, $4\{(k+1)\pi + \theta\} = \text{od}\pi$ 이어야 되고 $A(m) = 1$ 일 때에 식(5)의 $\alpha(l)$ 은 다음과 같이 된다.

$$\alpha(l) = \begin{cases} \frac{N}{2} \{1 + \cos(2bk\pi + 2\theta)\}, & l = 0 \\ \frac{N}{2}, & l \neq 0 \end{cases}$$

따라서 구하고자 하는 Y 는 식(23)으로 나타낼 수 있다.

$$y(m, n) = B(n) \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \left(\frac{2\pi}{N} (m+b) \left(n + \frac{kN}{2} \right) + \theta \right) \quad (23)$$

$$\text{단, } B(0) = \frac{1}{\sqrt{Q}}, \quad Q = 1 + \cos(2bk\pi + 2\theta) \neq 0$$

$$4\{(k+1)\pi + \theta\} = \text{od}\pi, \quad k = in$$

식(23)의 특수한 경우로, $k = \theta = 0$ 이면, $4b = \text{od}, Q = 2$ 가 된다(표 2의 4번행렬).

(B) $J=4$ 인 경우

식(4), (15)에서,

$$4c = in, \quad p = \frac{2(l-n)}{N} \pi, \quad q = \frac{2(l+n)+4c}{N} \pi$$

가 되므로 N (ev 또는 od)에 따라 $q = k\pi$ 가 되는 $4c$ 의 값이 ev 또는 od 로 달라지므로 일반적인 N 의 값에 대해서 해를 구할 수 없다. 다만 N 의 한 종류의 값(ev 또는 od)만 고려한다면 구할 수가 있다. 예를 들어 N 이 ev 이고 $4c = od$ 이면, $q \neq k\pi$ 이다. 따라서 $F_q = 0$ 이다(식(14)). 그리고 이 때에 $p=0, p = \pm\pi$ 인 경우가 존재하는데 F_p 의 대각선 바깥원소($p = \pm\pi$ 가 0이면 된다. 즉 식(9)에 $k = \pm 1$ 을 대입한 것이 0이면 된다. 이 조건은 $4b = od$ 가 되어 구하고자 하는 Y 는 표 2의 6번행렬과 같다.

표 2. 직교행렬 Y(N×N)

Table 2. Orthogonal matrices Y(N×N).

순서	y(m, n), m, n=0, 1, ..., N-1, k, r=in
1	$\sqrt{\frac{2}{N}} \cos \left\{ \frac{2\pi}{N} \left(m + \frac{od}{4k} \right) \left(n + \frac{(k-1)N+1}{2} \right) \right\}, k \neq 0$
2	$\sqrt{\frac{2}{N}} \cos \left\{ \frac{2\pi}{N} \left(m + b \right) \left(n + \frac{(k-1)N+1}{2} + \frac{od}{4} \pi \right) \right\}, 2bk=in$
3	$B^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin \frac{2\pi}{N} \left(m + \frac{od}{4} \right) (n+1), B^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, n=N-1 \\ 1, n \neq N-1 \end{cases}$
4	$B^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{2\pi}{N} \left(m + \frac{od}{4} \right) n, B^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, n=0 \\ 1, n \neq 0 \end{cases}$
5	$\sqrt{\frac{2}{N}} \cos \left\{ \frac{2\pi}{N} \left(m + \frac{in}{2} \right) \left(n + \frac{r}{2} + \frac{od}{4} \pi \right) \right\}, 0 \leq r \leq N-1$
6	$\sqrt{\frac{2}{N}} \cos \left\{ \frac{4\pi}{N} \left(m + \frac{od}{4} \right) \left(n + \frac{od}{4} \right) + \theta \right\}, \begin{matrix} N=ev \\ \theta = \text{실수상수} \end{matrix}$

2. (2N-1)q=inπ인 경우

식(4)에서 (2N-1)q=inπ이면,

$$q = \frac{k\pi}{2N-1} = \frac{a}{2}\pi(1+n+c), k=in$$

이므로, a=2J/2N-1, 2Jc=in, J=1 또는 2로 가정할 수 있다.

이러한 가정과 식(4), (11)에서,

$$p = \frac{\beta\pi}{2N-1}, q = \frac{\alpha\pi}{2N-1}, \beta = J(1-n), \alpha = J(1+n+2c)$$

$$f_q(l, n) = \frac{(-1)^a \sin(2bq+2\theta) - \sin((2b-1)q+2\theta)}{4 \sin q}$$

$$f_p(l, n) = \frac{(-1)^a \sin 2bp - \sin(2b-1)p+2\theta)}{4 \sin p} \tag{24}$$

된다.

f_q(l, n)이 일정하게 되는 경우는 b=0 또는 1/2, 2θ=rπ(r=in)일때이다. 이 경우에 q=kπ일 때의 f_q(l, n)의 값은 식(9)에 의하여 ±N/2의 값을 갖게 되어 이 극한치가 대각선에 직교하게 되면 직교행렬을 얻을 수 없다.

따라서 직교행렬이 되기 위해서는 q=kπ일 때의 F_q의 원소들이 대각선 상에 있어야 된다(l=n=0 또는 l=n=N-1).

이런 조건을 성립하는 경우는 식(25)와 같고, p=0을 제외하고는(l=n) inπ가 되는 경우는 없다.

$$\left. \begin{aligned} q=0, l=n=0, c=0 \\ q=J\pi, l=n=N-1, c=\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \tag{25}$$

이상의 b, c, θ와 f₀(l, n)과 f_q(l, n)의 관계는 표. 3으로 집약할 수 있다.

표 3. b, c, θ에 대한 f₀(l, n) 및 f_q(l, n)

Table 3. f₀(l, n) and f_q(l, n) with respect to b, c and θ.

b	f ₀ (l, n)		f _p (l, n)
	c=0	c=1/2	c=0 또는 c=1/2
0	N/2 (-1) ^r , l=n=0 (-1) ^r /4, 기타	N/2 (-1) ^r , l=n=N-1 (-1) ^r /4, 기타	N/2, l=n 1/4, l≠n
	N/2 (-1) ^r , l=n=0 (-1) ^{a+r} /4, 기타	N/2 (-1) ^r , l=n=N-1 (-1) ^{a+r} /4, 기타	N/2, l=n (-1) ^a /4, l≠n

$$\alpha = J(1+n+2c), \beta = J(1-n), 2\theta = r\pi, r=in$$

$$J=1 \text{ 또는 } 2, 2Jc=in$$

그러면 표 3을 참고로 J=1일 때와 J=2일 때를 분리하여 직교행렬을 구하여 보기로 한다.

(A). J=2인 경우

α, β는 모두 ev이므로 표 3은 b=0일 때와 b=1/2일 때와 같다.

1) r=ev인 경우 : 표 3에서,

$$f_0(l, n) + f_q(l, n) = \begin{cases} N, & (l=n=0, c=0), (l=n=N-1, c=\frac{1}{2}) \\ \frac{2N+1}{4}, & (l=n, l \neq 0, c=0), (l=n, l \neq N-1, c=\frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}, & \text{기타 (대각선 바깥원소)} \end{cases} \tag{26}$$

의 결과를 얻는다.

여기서 대각선 바깥원소 성분 1/2은 식(4)의 G_p + G_q로서 상쇄해야 된다. 이것은 식(4)의 (b, m', A(m')) = (0, 0, 1/√2) 또는 (1/2, N-1, 1/√2)이면 f₀(l, n) + f_q(l, n) = -1/2이므로 상쇄된다.

따라서 식(26)에 1/2를 제거하면 식(5)의 α(l)은 다음과 같이 계산되므로 구하고자 하는 Y는 표 4의 1~3번 행렬과 같다.

$$\alpha(l) = \begin{cases} \frac{2N-1}{2}, & (l=0, c=0), (l=N-1, c=\frac{1}{2}) \\ \frac{2N-1}{4}, & \text{기타 } l \end{cases}$$

2) r=od일 경우(θ=odπ/2) : 표 3에서, 식(27)를 얻는다.

$$f_0(l, n) + f_q(l, n) = \begin{cases} \frac{2N-1}{4}, & (l=n, l \neq 0, c=0), (l=n, l \neq N-1, c=\frac{1}{2}) \\ 0, & \text{기타} \end{cases} \tag{27}$$

이 경우는 식(5)를 만족시키지만, α(0) 또는 α(N-1)이 0이므로 식(2)를 만족시키지 못한다. 그런데 식

(1)의 cosine항 만을 $g(m, n)$ 이라 하면, $\theta = r\pi/2$ 이므로,

$$g(m, n) = \sin \frac{4\pi}{2N-1} (m+b)(n+c), \quad b, c=0 \text{ 또는 } \frac{1}{2}$$

이 되는데, $b=c=0$ 인 경우에는 G의 첫행과 첫열의 원소값이 모두 0이고, $b=c=1/2$ 인 경우에는 G의 마지막 행과 마지막열의 원소값이 모두 0이다. 따라서 위 두가지의 경우는 G^*G 가 각각 첫행과 첫열, 마지막행과 마지막열이 모두 0이 된다. 식(27)에서, G의 어느 한행과 열이 모두 0인 것을 제외한 $(N-1) \times (N-1)$ 크기의 행렬은 직교행렬이 되고, 이것을 $N \times N$ 크기의 행렬로 크게 하면 된다.

예를 들면, $b=1/2, c=0$ 이면 G의 마지막행과 첫행이 모두 0이므로 G^*G 는 첫행과 첫열이 모두 0이 된다. 이것은 식(5)의 $\alpha(0)=0, \alpha(1)=(2N-1)/4(1 \neq 0)$ 가 되므로 G의 첫열을 제거하고(n 을 $n+1$ 로 치환), N 을 $N+1$ 로 치환하면 $N \times N$ 크기의 직교 행렬을 얻을 수 있다(표4의 5번째행렬).

마찬가지 방법으로 $(b, c) = (0, 0), (1/2, 1/2)$ 인 경우 각각 표4의 4번, 6번째행렬을 얻을 수 있다.

(B) $J=1$ 인 경우

1) $r=ev$ 인 경우

(A)의 풀이 과정과 같이 표3을 참고로 $(b, c) = (0, 0), (0, 1/2), (1/2, 0), (1/2, 1/2)$ 의 값에 대한 직교행렬은 각각 표1의 OCT, 표4의 7번째행렬, 표4의 7번째행렬의 transpose, 참고문헌 6의 표1의 8번째행렬과 같다.

2) $r=od$ 인 경우

위와 같은 방법으로 $(b, c) = (0, 0), (0, 1/2), (1/2, 0), (1/2, 1/2)$ 에 대한 직교행렬을 구하면 각각 참고문헌 6의 표1의 7, 9, 6번째행렬, 표4의 8번째 직교행렬을 얻을 수 있다.

3. 기존 직교행렬의 유도

식(12)에서 $\cot q$ 의 {}의 {}내의 항이 0가 되도록 물어보면 DST, DCT 및 참고문헌 6의 표1의 5, 10, 11번의 직교행렬을 구할 수 있고 식(13)에서 $\sin(2N-1)q + \sin q = 0$ 또는 $\cos(2N-1)q - \cos q = 0$ 이라는 가정에서 SCT 직교행렬을 얻을 수 있다.

IV. DFT와의 관계

N 점 data $x(n) (n=0, 1, \dots, N-1)$ 을 N 점 DFT 변환한 것을 $f(m) (m=0, 1, \dots, N-1)$ 이라하면 식(28)로 정의되고 이것을 식(29)의 기호로 표시하기로 한다.

$$f(m) \triangleq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j \cdot 2\pi mn/N} x(n) \quad (28)$$

$$= f(m|N, x) \quad (29)$$

표 4. 직교행렬 Y(N×N)

Table 4. Orthogonal matrices Y(N×N),

순서	$y(m, n) \quad m, n=0, 1, \dots, N-1$
1	$A^{(m)} B^{(n)} \sqrt{\frac{4}{2N-1}} \cos \frac{4\pi mn}{2N-1}, A^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, m=0, n=0 \\ 1, \text{기타} \end{cases}$
2	$A^{(m)} B^{(n)} \sqrt{\frac{4}{2N-1}} \cos \frac{(m+\frac{1}{2})n}{2N-1}, A^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, m=n-1, n=0 \\ 1, \text{기타} \end{cases}$
3	$A^{(m)} B^{(n)} \sqrt{\frac{4}{2N-1}} \cos \frac{4\pi(m+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})}{2N-1}, A^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, m=N-1, n=N-1 \\ 1, \text{기타} \end{cases}$
4	$\sqrt{\frac{4}{2N+1}} \sin \frac{4\pi(m+1)(n+1)}{2N+1}$
5	$\sqrt{\frac{4}{2N+1}} \sin \frac{4\pi}{2N+1} (m+\frac{1}{2})(n+1)$
6	$\sqrt{\frac{4}{2N+1}} \sin \frac{4\pi}{2N+1} (m+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})$
7	$A^{(m)} B^{(n)} \sqrt{\frac{4}{2N-1}} \cos \frac{2\pi n(n+\frac{1}{2})}{2N-1}, A^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, m=0, n=N-1 \\ 1, \text{기타} \end{cases}$
8	$A^{(m)} B^{(n)} \sqrt{\frac{4}{2N-1}} \sin \frac{2\pi}{2N-1} (m+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})$ $A^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, m=N-1, n=N-1 \\ 1, \text{기타} \end{cases}$

III장에서 유도한 직교행렬들의 a의 값(식(1)의 a)은 $2/M$ 형으로, $M=N, 2N-1, N/2$ 및 $2N \pm 1/2$ 이었다(표2와 표4 참조).

식(1)에 $a=2/M$ 를 대입하고 지수함수로 나타내면,

$$y(m, n) = R_c \{ A_0(m) \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j \cdot 2\pi mn/M} B_0(n) \}$$

$$\text{단, } \begin{cases} A_0(m) = \lambda \sqrt{M} e^{-j \cdot 2\pi bc \cdot M \cdot \theta} A(m) e^{-j \cdot 2\pi cn/M} \\ B_0(n) = B(n) e^{-j \cdot 2\pi bn/M} \end{cases}$$

이 된다.

III장에서 유도한 직교행렬 Y(N×N)로 N점 실수 data $x(n) (n=0, 1, \dots, N-1)$ 을 변환한 것을 $t(m) (m=0, 1, \dots, N-1)$ 이라하면,

$$t(m) = R_c \{ A_0(m) t_1(m) \} \quad (30)$$

$$\text{단, } t_1(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j \cdot 2\pi mn/M} x(n) B_0(n)$$

이 된다(여기서 $t_1(m)$ 의 \sum 의 n 의 범위가 0에서 $N-1$ 임을 유의).

그러면 M의값에 따라, DFT변환으로 $t_1(m)$ 을 구할 수 있는지를 살펴보자.

(A) $M \geq N$ 인 in인 경우

식(30)의 $t_1(m)$ 은 $f(m|M, z)$ 이므로, $t(m)$ 은,

$$t(m) = R_0 \{A_0(m) f(m|M, z)\}$$

$$\text{단, } z(n) = \begin{cases} x(n) B_0(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq M-1 \end{cases}$$

으로 되어 M점 DFT변환으로 얻을 수 있다.

(B) $M=N/2$ 인 경우(표2의 6번).

식(30)의 $t_1(m)$ 의 지수함수, $e^{-j \cdot 4\pi mn/N}$ 은 m 과 n 에 대해 주기함수(주기= $N/2$)이므로, $t_1(m)$ 은,

$$t_1(m) = \begin{cases} Q(m), & 0 \leq m \leq \frac{N}{2}-1 \\ Q(m-\frac{N}{2}), & \frac{N}{2} \leq m \leq N-1 \end{cases}$$

$$\text{단, } \begin{cases} Q(m) = f(m|\frac{N}{2}, z) \\ z(n) = x(n) B_0(n) + x(n+\frac{N}{2}) B_0(n+\frac{N}{2}) \end{cases}$$

으로 되어 $t(m)$ 은 $N/2$ 점 DFT변환으로 계산할 수 있

(C) $M=\frac{2N \pm 1}{2}$ 인 경우(표4의 1~6번).

식(30)의 $t_1(m)$ 은,

$$t_1(m) = \sqrt{\frac{2}{2N \pm 1}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j \cdot 4\pi mn / 2N \pm 1} x(n) B_0(n)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{2N \pm 1}} \sum_{n=0}^{2M-1} e^{-j \cdot 4\pi mn / 2N \pm 1} z(n)$$

$$= \sqrt{2} f(2m|2M, z)$$

$$\text{단, } z(n) = \begin{cases} x(n) B_0(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq 2M-1 \end{cases}$$

으로 되어 $t(m)$ 은 $2N \pm 1$ 점 DFT 변환으로 계산할 수 있다.

이상 (A) (B) (C)에서 III장에서 구한 삼각 함수형 직교행렬($N \times N$)에 의한 N 점 실수 data 변환은 M 점 또는 $2M$ 점 DFT변환으로 얻을 수 있음을 알 수 있다.

V. 결 론

새로운 삼각함수형 직교행렬을 구하기 위하여, 기존 직교행렬의 유도방법과는 달리, 일반적인 삼각함수형 행렬을 매개변수 함수로 모델화하여 직교조건을 만족하는 매개변수를 구하는 방법을 사용하였다.

이 직교조건 계산결과 나온 Z행렬의 대각선 행렬이 되어야 만이 직교행렬을 구할 수 있다는 것을 알았다. Z가 대각선 행렬이 되는 매개변수를 구하는 방법의 하나로, F_0 의 원소가 거의 일정하게 하는 과정을 거쳐 삼각함수형 직교행렬군을 구하였고 이들의 실수 신호 변환은 DFT 변환으로 계산될 수 있음을 보였다.

Z가 대각선행렬이 되기 위한 해를 구하는 과정을 본 연구와는 또 다른 측면에서 찾아보면 또다른 직교행렬을 산출할 수 있으리라 보고, 또한 컴퓨터에 의해서도 가능하리라 본다.

(기호설명)

Y, F_q (대문자) : 행렬명칭

$y(m, n), f_q(m, n)$ (소문자) : Y, F_q 행렬의 원소 m, n 은 각각 행(row), 열(column) 번호

$Y(N \times N), Y'$: 행렬 크기가 $N \times N$ 인 행렬 Y 및 Y 의 transpose.

$j : \sqrt{-1}$

$\text{Re}(x)$: x 의 실수부분.

$\delta(l-n)$: Kronecker delta 함수, $l=n$ 이면 1, 그외는 0.

ev, od, in : 각각 짝수, 홀수, 정수.

$\cos |x|$: $\cos(x)$ 또는 $\sin(x)$

$f_q(l, n) | l+n=N-1 : l+n=N-1$ 일 때의 $f_q(l, n)$ 의 값.

(a, b, c) = (1, 1, 2), (3, 4, 5) : a, b, c의 값이 각각 1, 1, 2 및 3, 4, 5를 뜻함.

參 考 文 獻

- [1] N. Ahmed et al., "Discrete cosine transform", *IEEE Trans. Comput.*, vol. c-23, pp. 90-93, Jan. 1974.
- [2] A.K. Jain", "A fast Karhunen-Loeve transform for a class of random Processes", *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-24, pp. 1023-1029, sept. 1976.
- [3] H. Kitajima", "A symmetric cosine transform", *IEEE Trans. comput.*, vol. c-29, 4, pp. 317-323, april 1980.
- [4] W.K. Pratt, *Digital image Processing (Wiley-interscience, 1978)*, pp. 242-247.
- [5] 崔太永, "DFT와 CDFT의 분산분포" 대한전자 공학회지 제21권 제 4 호, pp. 7-12, 1984년 7 월.
- [6] A.K. Jain, "A sinusoidal family of unitary Gransforms", *IEEE Trans. pattern Anal. and mach. intell.*, vol. PAMI-1, no. 4, pp. 356-365, oct. 1979.
- [7] A.K. Jain, "Image data compression: A review", *Proc. IEEE* vol. 69, no. 3, pp. 349-389, march 1981.
- [8] Zu-Han Gu et al., "Optical computation of cosine transforms", *Optics Comm.*, vol. 39, no. 3, pp. 137-142, oct. 1981. *