論文 87-24-1-19

Digital楕圓필터의 Computer-Aided Design

(Computer-Aided Design of Digital Elliptic Filters)

李 鍾 寅,* 金 東 龍*

(Chong In Lee and Dong Yong Kim)

要 約

本 論文에서는 bilinear z變換法을 利用한 楕圓 digital 필터 設計에 對하여 硏究 했으며, 미리 주어진 設計明細條件을 滿足할 수 있는 設計法을 提示하였다. Computer simulation에 依하여 analog필터 크기特性과 digital필터 크기特性을 比較하였다.

마지막으로, digital필터의 量子化 影響에 對하여 考察했다. Dynamic range 條件 下에 固定小數點 digital 필터의 實現에 있어서, IIR digital필터의 出力雜音은 pole-zero pairing과 2次函數 부분의 ordering에 따라 매우 다르게 된다. 그러므로 良好한 ordering과 pairing을 求하는 방법이 바람직하다. 따라서, 本 論文에서는 거의 最適한 ordering과 pairing을 決定하기 爲한 準 最的 方法을 提示하였다.

Abstract

In this paper, we studied on the design of elliptic digital filters using the bilinear z transformation method, and proposed a design procedure satisfying prescribed specifications. The magnitude characteristics of digital filters are compared with its of analog filiters by computer simulation.

Finaly we considered the quantization effects of digital filters. In cascader realization of fixed-point digital filters under dynamic range constraints, the output noise for IIR digital filters depends on the pole-zero pairing and ordering of the second order sections. Therfore an optimization procedure to finding a good ordering and pairing is very desirable.

Thus, we proposed a sub-optimization procedure for finding "near optimal" solution.

I. 序 論

Digital 信號處理는 최근 PCM通信, 人工衛星通信등에 있어서 필수적인 分野이다. 특히 digital 필터는 音聲處理, 畵像處理, 水中音波探知機와 레이더시스템, digital 制御系統등 여러분야에 널리 使用되고 있으며, analog 필터에 比해 安定度, 信頼度, 正確度, 適應度등의 장점을 가지고 있다.[1]

Digital필터 設計時 利用되는 函數는 Butterworth, Chebyshev, Bessel, 楕圓(Elliptic)函數등[2-4]이 있으나, 通過域(pass band)과 沮止域(stop band)에서 等波狀(equal ripple) 特性을 가지고 遷移域(transition band)이 가장 좁은 楕圓函數를 利用한 필터設計法이 최근 많이 연구 되어지고 있다.[5-7]

本 論文에서는 他 函數에 比해 周波數 應答特性이 가장 優秀한 楕圓函數를 利用하여 IIR digital 필터를 cascade연결법으로 合成할 수 있도록, digital 필터의 設計明細條件(specification)이 周波數 領域에서 주파

*正會員, 全北大學校 電氣工學科

(Dept. of Electrical Eng., Chonbuk Nat'l Univ.)

接受日字 : 1986年 11月 24日

(※本 硏究는 1986年度 전반기 한국과학재단 차관연구비지원의 一部로 이루어진것임)

수函數로 주어질 때, digital楕圓函數를 求하기 爲한 computer program을 作成 하였다.

IIR digital 필터를 dynamic range 條件[8,9] 下에 固定 小數點(fixed point) register를 使用하여 cascade 連結法으로 構成할 경우, register의 有限語長(finite word length) 影響에 起因하는 出力雜音은 各 2次因子(quardratic factor)의 pole-zero pairing과 pairing된 各 2次函數 block의 sequantial ordering에 따라 매우 다르게 된다. 그러므로 本 論文에서는 出力 雜音利得(noise gain)[8,9] E^2/N_0을 거의 最小로할 수 있는 computer program을 作成하여 high-pass, band-pass 필터의 경우 出力 雜音利得을 調査 하였다.

Ⅱ. 楕圓(Elliptic)函數

1. Analog 필터의 傳達函數

Cauer에 依하여 처음 提案된 타원함수는 式(1)과 같이 次數 N이 偶數이면 分母와 分子의 次數가 同一하고, 奇數이면 分母의 次數가 分子의 次數보다 하나 높은 有理函數이다.[2-4]

$$H(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{r}(s^2+C_i)}{A_0+A_1s+\cdots+A_{N-1}s^{N-1}+A_Ns^N} \qquad (1)$$

여기서 $r=\begin{cases}(N-1)/2, & N: 기수(odd)\\ N/2, & N: 우수(even)\end{cases}$

式(1)을 cascade 連結法으로 필터를 合成하기 爲하여 저역통과(low-pass) 함수의 규준화된 형태(normalized form)로 나타내면, 式(2)와 같다.

$$H_N(s)=\frac{H_C}{D_0(s)}\prod_{i=1}^{r}H_i(s)=\frac{H_0}{D_0(s)}\prod_{i=1}^{r}\frac{s^2+A_{0i}}{s^2+B_{1i}s+B_{0i}} \qquad (2)$$

여기서 $D_0(s)=s+\sigma_0$(N: 기수), 또는 1 (N: 우수)이며, $H_N(s)$의 誘導는 Grossman의 형식[10]에 근거를 두었다. 式(2)에서 次數가 기수, 우수일 때의 損失特性(loss charpcteristic)을 그림 1에 나타 내었다.

그림 1에서 parameter A_P와 A_a는 各各 dB로 表示된 최대 통과역파상(maximum passband ripple)과 최소 저지역손실(minimum stopband loss)이며, rad/sec로 표시된 통과역 edge ω_P와 저지역edge ω_a는 다음과 같다.

$$\omega_P=\sqrt{k}, \quad \omega_a=1/\sqrt{k} \qquad (3)$$

여기서 $k=\omega_P/\omega_a$는 選擇度(selectivity factor)이다.

非規準化(nonnormalize)된 저역통과($H_{LP}(\bar{s})$), 고역통과($H_{HP}(\bar{s})$), …函數등은 표 1에 나타낸 주파수變換法[2-4]을 利用하여 式(4)로 부터 求할 수 있다.

$$H_x(\bar{s})=H_N(s)\Big|_{s=f_x(\bar{s})}=\frac{H_0'}{D_0'(s)}\prod_{i=1}^{r}\frac{\bar{s}^2+A_{0i}'}{\bar{s}^2+B_{1i}'\bar{s}+B_{0i}'} \qquad (4)$$

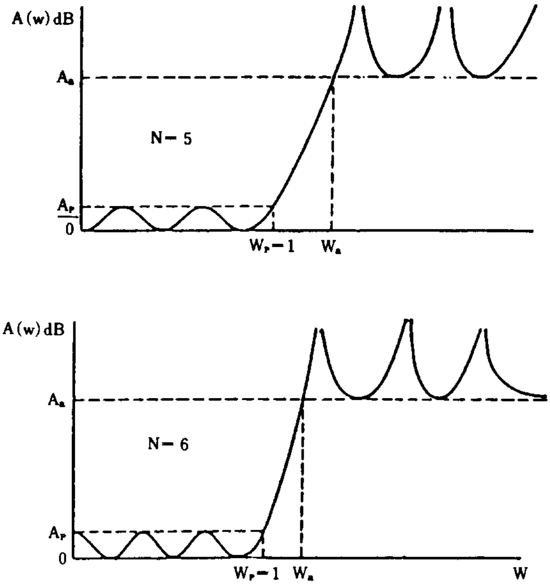


그림 1. 기수, 우수 차수의 타원필터에 대한 손실특성
Fig. 1. Loss characteristics for Elliptic filters of odd and even order.

표 1. Analog함수의 주파수 변환
Table 1. Frequency transformation of analog functions.

$H_x(\bar{s})$	$f_x(\bar{s})$	λ : Scaling factor
$H_{LP}(\bar{s})$	$s=\lambda\bar{s}$	B : Band width
$H_{HP}(\bar{s})$	$s=\lambda/\bar{s}$	$(\omega_{P2}-\omega_{P1})$ $(\omega_{a2}-\omega_{a1})$
$H_{BP}(\bar{s})$	$s=\frac{1}{B}\left(\bar{s}+\frac{\omega_0^2}{\bar{s}}\right)$	ω_0: Center freq, $\sqrt{\omega_{P1}\cdot\omega_{P2}}$
$H_{BS}(\bar{s})$	$s=\frac{B\bar{s}}{\bar{s}^2+\omega_0^2}$	$\sqrt{\omega_{a1}\cdot\omega_{a2}}$

여기서 $D_0(\bar{s})=\bar{s}+\sigma_0'$(N: 기수), 또는 1 (N: 우수)이다.

2. Digital 필터의 傳達函數

Digital 필터의 傳達函數 $H(z)$는 $H_N(s)$로부터 求하며, 그림 2처럼 2가지의 방법이 있으나 前節에서 analog函數의 주파수 변환법을 論했으므로 No.1의 방법을 利用한다.

式(4)의 $H_x(\bar{s})$로부터 $H(z)$를 求하는 방법에는 여러방법[2-4]이 있으나, 本 論文에서는 aliasing effect[11,12]를 除去할 수 있고 analog函數로부터 直接 digital 函數로 連續的으로 one-to-one mapping이 可能한 bilinear z變換法을 利用한다. 즉

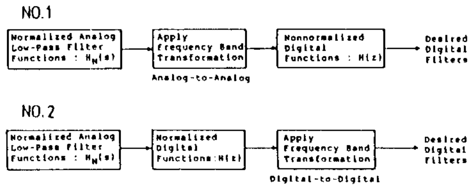


그림 2. H(s)로 부터 비규준화된 digital함수 H(z)의 근사법

Fig. 2. Approximation of the nonnormalized digital functions H(z) by H(s).

$$H(z) = H_X(\bar{s})\Big|_{\bar{s}=2(z-1)/T(z+1)}$$

$$= \frac{H_0'(1+z^{-1})}{(C+\sigma_0')-(C-\sigma_0')z^{-1}} \prod_{i=1}^{r} \cdot \frac{(C^2+A_{0i}')-2(C^2-A_{0i}')z^{-1}+(C^2+A_{0i}')z^{-2}}{(C^2+B_{0i}'+B_{1i}'C)-2(C^2-B_{0i}')z^{-1}+(C^2+B_{0i}'-B_{1i}'C)z^{-2}}$$

$$= \frac{c_2(1+z^{-1})}{1+c_1z^{-1}} \prod_{i=1}^{r} \frac{a_{0i}+a_{1i}z^{-1}+a_{2i}z^{-2}}{1+b_{1i}z^{-1}+b_{2i}z^{-2}} \qquad (5)$$

여기서 T= sampling 주기, C=2/T

$$c_1 = \frac{C-\sigma_0'}{C+\sigma_0'} \quad c_2 = \frac{H_0'}{C+\sigma_0'}$$

$$a_{0i} = a_{2i} = \frac{C^2+A_{0i}'}{C^2+B_{0i}'+B_{1i}'C}, \quad a_{1i} = -\frac{2(C^2-A_{0i}')}{C^2+B_{0i}'+B_{1i}'C}$$

$$b_{1i} = -\frac{2(C^2-B_{0i}')}{C^2+B_{0i}'+B_{1i}'C} \quad b_{2i} = \frac{C^2+B_{0i}'-B_{1i}'C}{C^2+B_{0i}'+B_{1i}'C}$$

式(2),(5)로부터 analog周波數 $\omega_i(i=1,2,\cdots)$와 digital周波數 $\Omega_i(i=1,2,\cdots)$의 관계는 式(6)으로 나타낼 수 있으며, 그림 3과 같다.

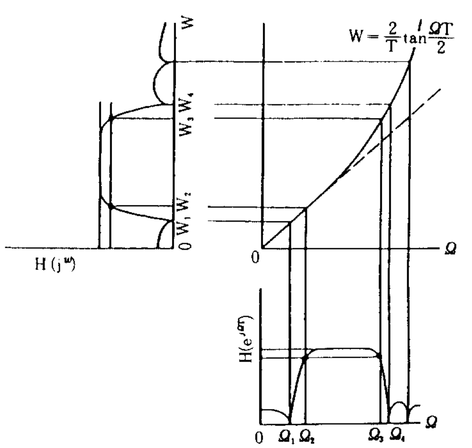


그림 3. Ω와 ω, $|H(j\omega)|$와 $|H(e^{j\Omega T})|$의 관계

Fig. 3. Relation ship Ω and ω, $|H(j\omega)|$ and $|H(e^{j\Omega T})|$.

$$\Omega_i = \frac{2}{T}\tan^{-1}\frac{\omega_i T}{2} \qquad (6)$$

그러므로 ω_i를 Ω_i로 直接 one-to-one mapping 시킬 경우 크기(magnitude)特性은 同一하나 warping effect[13,14] (周波數歪曲現象)가 發生하므로 prewarping을 해 주어야 한다.

Prewarping法에는 傳達函數 自體를 prewarping 시키는法[13]과 傳達函數의 極點(pole)과 零點(zero)을 個別的으로 prewarping시키는法[14]이 있으나, 本 論文에서는 後者를 택하여 楕圓函數에 適用한다.

一般的으로 IIR digital 필터의 設計明細條件(specification)은 周波數 領域에서 주어지는데, 이 設計條件의 Ω_i로부터 직접 analog函數 $H_N(s)$를 求하기 前에 다음과 같은 順序에 依하여 H(z)를 求해야 한다.

① 設計條件의 Ω_i로부터 式(6)을 利用하여 새로운 analog 周波數 ω_i를 구하고

② 이 ω_i로부터 $H_N(s)$를 求한 다음

③ 표 1로부터 $H_X(\bar{s})$를 求한다.

④ 式(5)를 利用하여 H(z)를 求한다.

그러나 設計條件으로부터 표 1의 λ, B, ω_0와 $H_N(s)$의 ω_P를 결정해야 한다. 그 결과를 표 2에 나타내었다.

표 2. Digital 설계명세조건으로부터 구해진 analog 함수의 λB, W_0와 W_P의 변환표

Table 2. λ, B, W_0 and W_P transtormation table of analog function obtained from digital specifications.

LP	$\omega_P=\sqrt{K_0}$	$\lambda=\omega_P T/[2\tan(\Omega_P T/2)$
HP	$\omega_P=1/\sqrt{K_0}$	$\lambda=2\omega_P\tan(\Omega_P T/2)/T$
BP	$\omega_P=\begin{cases}\sqrt{K_1}, & (K_C \ge K_B)\\ \sqrt{K_2}, & (K_C<K_B)\end{cases}$	$W_0=2\sqrt{K_B}/T$ $L=2K_A/T\ W_P$
BS	$\omega_P=\begin{cases}1/\sqrt{K_1}, & (K_C \ge K_B)\\ 1/\sqrt{K_2}, & (K_C<K_B)\end{cases}$	$W_0=2\sqrt{K_B}/T$ $B=2K_A\omega_P/T$
$K_0=\frac{\tan(\Omega_P T/2)}{\tan(\Omega_a T/2)}$		$K_A=\tan\frac{\Omega_{P2}T}{2}-\tan\frac{\Omega_{P1}T}{2}$
$K_1=\frac{K_A\tan(\Omega_{a1}T/2)}{K_B-\tan^2(\Omega_{a1}T/2)}$		$K_B=\tan\frac{\Omega_{P1}T}{2}\tan\frac{\Omega_{P2}T}{2}$
$K_2=\frac{K_A\tan(\Omega_{a2}T/2)}{\tan^2(\Omega_{a2}T/2)-K_B}$		$K_C=\tan\frac{\Omega_{a1}T}{2}\tan\frac{\Omega_{a2}T}{2}$

3. Computer program 및 Simulation

(1) Program

IIR digital 필터의 設計明細條件이 周波數 領域에서 $\{A_P, A_a, \Omega_{Pi}, \Omega_{ai}, T\}$로 주어질 때 cascade 連結法으로 digital 필터를 合成할 수 있도록 式(5)의 各 係數값을 求하는 program을 作成했으며 structured program을 그림 4에 나타내었다.

```
PROCEDURE Design
  READ Type$,Ap,Aa,T
  IF Type$ = Lp or Hp
  THEN BEGIN
         READ Wp,Wa
         calculate Lamda
       END
  ELSE BEGIN
         READ Wp1,Wp2,Wa1,Wa2
         caculate Wo,Bw
       END
  call routine of normalized equation        : Hn(s)
  call routine of frequency transformation   : Hx(s)
  call routine of bilinear z transformation  : H(z)
  WRITE coefficient of digital filters
  WRITE poles & zeros
END PROCEDURE
```

그림 4. IIR digital 타원필터 설계를 위한 구조화프로그램

Fig. 4. structured program for IIR digital Elliptic filters design.

표 3. High-pass 필터의 계수

Table 3. High-pass filter coefficients.

ELLIPTIC HIGHPASS FILTER

INPUT DATA:		Ou UTPUT DATA:	
SAMPLING FREQ:	10000 (Hz)	Lamda	: 24989. 5885225
A_p (dB)	: , 5	Selectivity	: . 824100732787
A_a (dB)	: 90	ORDER	: 10
W_p	: 3000 (Hz)		
W_a	: 2700 (Hz)	ACTUAL A_a	: 93. 95708232

```
*******************************************
* H(Z)=H *H1(Z) *H2(Z) *···                *
* H1(Z)=(A0i+A1iZ^(-1)+A2iZ^(-2))/(B0i+B1iZ^(-1)+B2iZ^(-2)) *
*******************************************
```

SECTION # : 1

A(0, 1) :	. 0385801820078	B(0, 1) :	1
A(1, 1) :	−. 0694478938898	B(1, 1) :	1. 37682786336
A(2, 1) :	. 0385801820078	B(2, 1) :	. 52343612127

SECTION # : 2

A(0, 2) :	. 184646013718	B(0, 2) :	1
A(1, 2) :	−. 159078153268	B(1, 2) :	1. 125677867786768
A(2, 2) :	. 184646013718	B(2, 2) :	. 654048048381

SECTION # : 3

A(0, 3) :	. 431680073234	B(0, 3) :	1
A(1, 3) :	−. 0847308231003	B(1, 3) :	. 852080221967
A(2, 3) :	. 431680073234	B(2, 3) :	. 800171191536

SECTION # : 4

A(0, 4) :	. 651481246828	B(0, 4) :	1
A(1, 4) :	. 0766417641219	B(1, 4) :	. 677467165088
A(2, 4) :	. 651481246828	B(2, 4) :	. 903787894622

SECTION # : 5

A(0, 5) :	. 775189486915	B(0, 5) :	1
A(1, 5) :	. 183939168044	B(1, 5) :	. 605294057638
A(2, 5) :	. 775189486915	B(2, 5) :	. 971733863423

H : . 944060876286

(2) Simulation

本 論文에서 제시한 program에 依하여 다음과 같은 high-pass 필터와 band-pass 필터를 simulation하였다.

① High-pass 필터

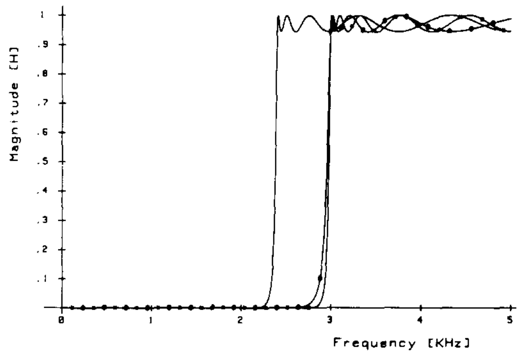
$A_p=0.5$dB, $A_a=90$dB, $\Omega_p=3$KHz, $\Omega_a \leq 2.7$KHz, $T=10^{-4}$sec인 경우 式(5)의 各 係數는 표 3 과 같고, 크기特性과 損失特性을 그림 5 의 (a), (b)에 各各 나타내었다.

② Band-pass 필터

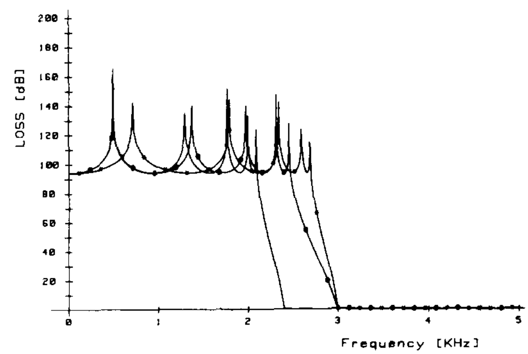
$A_p=0.2$dB, $A_a=40$dB, $\Omega_{p1}=2$KHz, $\Omega_{p2}=3$KHz, $\Omega_{a1} \geq 1.9$KHz, $\Omega_{a2} \leq 3.1$KHz, $T=10^{-4}$sec인 경우 式(5)의 各 係數는 표 4 에 나타내었고, 크기特性과 損失特性을 그림 6 (a), (b)에 各各 나타내었다.

(3) 檢討

그림5, 6의 크기特性과 損失特性에 나타난 것처럼 prewarping前의 特性들은 設計條件에 어긋나지만, prewarping後의 特性들은 設計條件을 만족 할 뿐만 아니라 analog 特性에 比해 천이역(transition band)



(a)



(b)

그림 5. High-pass 필터의 (a) 크기특성 (b) 손실특성

Fig. 5. High-pass characteristics of .
(a) magnitude and (b) los
——— digital (before prewarping)
—●—●— analog
—+—+— digital (after prewarping)

표 4. Band-pass 필터의 계수
Table 4. Band-pass filter coefficients.

ELLIPTIC BANDPASS FILTER

INPUT DATA :	OUTPUT DATA :
SAMPLING FREO : 10000 [Hz]	W_0 : 20000
A_p[dB] : .2	BW : 14346.8356566
A_a[dB] : 40	Selectivity : .820633474907
W_p1 : 2000[Hz]	ORDER : 6
W_p2 : 3000[Hz]	ACTUAL A_a : 44.1716376224
W_a1 : 1900[Hz]	
W_a2 : 3100[Hz]	

```
**********************************************
* H(Z)=H * H1(Z) * H2(Z) *···                *
* H1(Z)=[A0i+A1iZ^(-1)+A2iZ^(-2)]/[B0i+B1iZ^(-1)+B2iZ^(-2)] *
**********************************************
```

SECTION # : 1

A(0,1) : 3.28804048478	B(0,1) : 1
A(1,1) : 5.05694796214	B(1,1) : .224201447476
A(2,1) : 3.28804048478	B(2,1) : .743334454886

SECTION # : 2

A(0,2) : .55611807898	B(0,2) : 1
A(1,2) : −.855299744402	B(1,2) : −.224201447476
A(2,2) : .55611807898	B(2,2) : .743334454886

SECTION # : 3

A(0,3) : 1.22898878906	B(0,3) : 1
A(1,3) : 1.09279819887	B(1,3) : .515377097592
A(2,3) : 1.22898878906	B(2,3) : .880556476811

SECTION # : 4

A(0,4) : .8292766672	B(0,4) : 1
A(1,4) : −.737380240037	B(1,4) : −.515377097592
A(2,4) : .8292766672	B(2,4) : .880556476844

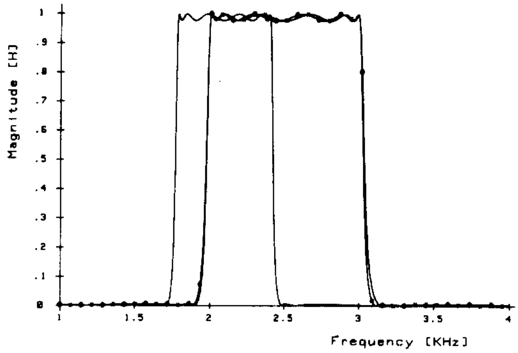
SECTION # : 5

A(0,5) : 1.07834308529	B(0,5) : 1
A(1,5) : .807356256566	B(1,5) : .621224902758
A(2,5) : 1.07834308529	B(2,5) : .97055481678

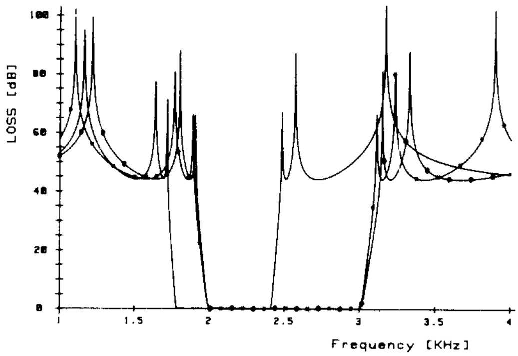
SECTION # : 6

A(0,6) : .94291084148	B(0,6) : 1
A(1,6) : −.705958036579	B(1,6) : −.621224902758
A(2,6) : .94291084148	B(2,6) : .970554816798

H : .00618524833689



(a)



(b)

그림 6. Band-pass 필터의
(a) 크기특성 (b) 손실특성

Fig. 6. Band-pass characteristics of. (a) magnitude and (b) loss.
——— digital(before prewarping)
—●—●— analog
—*—*— digital(after prewarping)

이 약간 좁아졌음을 알 수 있다. 그러나 이 特性들은 hardware 構成時 register의 有限語長을 고려하지 않는 상태이다.

Ⅲ. IIR digital 필터의 合成

式(5)의 digital필터函數는 多樣한 방법으로 合成 시킬 수 있으나, 入力信號의 量子化(quantization)에 起因하는 雜音(noise)과 誤差(error)들은 合成法에 따라 hardware 構成時 매우 다르게 된다.[3,4]

本 論文에서는 式(5)의 各 2次函數에 對하여 digital 필터素子를 最小로 할 수 있는 canonic形으로 合成한 後, 高次函數에 有用한 cascade連結法으로 合成시킨다. 그 結果를 그림 7, 8에 各各 나타내었다.

그러나 cascade 構成에 있어서 문제점은 pole-zero pairing과 pairing된 2次函數의 ordering이다. 例를 들어 H(z)가 式(7)처럼 나타내어 졌다면

$$H(z)=\frac{\prod_{i=1}^{5}(a_{0i}+a_{1i}z^{-1}+a_{2i}z^{-2})}{\prod_{i=1}^{5}(1+b_{0i}z^{-1}+b_{2i}z^{-2})}=\prod_{i=1}^{5}\frac{N_i(z)}{D_i(z)} \qquad Ⅱ(7)$$

式(7)의 可能한 pole-zero pairing과 ordering은 다음과 같다.

$$H(z)=\frac{N_1(z)}{D_2(z)}\times\frac{N_3(z)}{D_5(z)}\times\frac{N_4(z)}{D_1(z)}\times\frac{N_5(z)}{D_4(z)}\times\frac{N_2(z)}{D_3(z)} \qquad (8)$$

여기서 pariing은 $N_1(z)$와 $D_2(z)$, $N_3(z)$와 $D_5(z)$…이

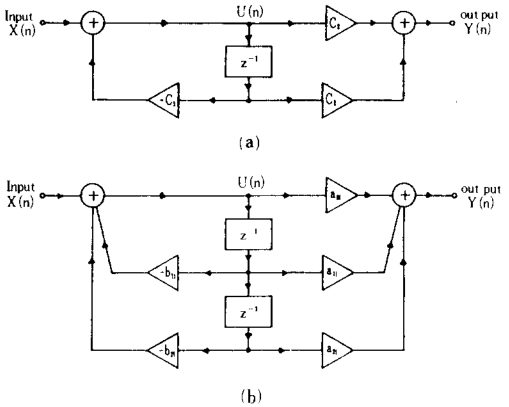


그림 7. Canonic형 digital필터 구성
(a) N=1 (b) N=2
Fig. 7. Canonic form digital filter structures
(a) N=1 (b) N=2.

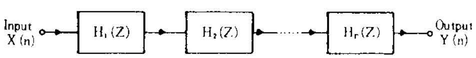


그림 8. 그림 7의 cascade실현
Fig. 8. Cascade realization of Fig. 7.

며, ordering은 $N_1(z)/D_2(z)$, $N_3(z)/D_5(z)$, …의 順序이다. 물론 모든 變數들을 無限語長(infinite word length)로 나타낼 수만 있다면 pairing과 ordering은 無意味 하게 된다. 그러나 實際的인 狀態에서는 매우 重要한 문제이다.[8,9] 그리고 cascade 連結時 다른 문제는 필터의 各 變數들이 너무 크거나 작게 되는 것을 방지하기 爲해 그림 8의 各 block 사이에 scaling 乘算器(multiplier)를 插入시켜 주어야 한다.[8,9] 그러므로 digital 필터를 hardware로 構成하기 前에 量子化에 起因하는 雜音과 誤差들이 充分히 考察 되어져야 한다.

Ⅳ. Pole-zero pairing과 ordering

1. 量子化에 依한 誤差分析

Digital필터의 hardware 實現에 있어서 모든 變數들은 rounding이나 truncation에 依해 量子化 되기때문에 入力, 係數양자화 오차와 乘算器에서의 roun-off 오차를 發生 시킨다. 係數 양자화 오차는 傳達函數의 零點과 極點의 位置를 變動시키기 때문에 크기 特性에 영향을 주며,[5] 乘算器의 積算에 依한 양자화오차는 出力雜音을 增加시키는 雜音源으로 간주된다.[8,9] 그러나 加算器(adder)의 合算의 경우 overflow가 發生하지 않으면 出力측의 잡음은 발생되지 않기 때문에 信號의 크기(signal level)를 적당히 scaling하면overflow를 방지할 수 있다.[8,9] 그러므로 出力측에서 발생되는 잡음은 승산기에서의 round-off 오차에만 起因한다. 特히 hardware 實現時 固定小數點 register를 使用하여 digital 필터를 dynamic range 條件下에 cascade 연결법으로 構成할 경우 round-off 오차는 pole-zero pairing과 pairing된 2次함수의 ordering에 따라 매우 다르게 되므로[8,9] scaling 因子 S와 出力 平均自乘 誤差 E^2에 對하여 고찰하면 다음과 같다.

式(5)로부터 다음과 같이 2次項으로 다시 나타낼 수 있다.

$$H(z)=C_0\frac{\prod_{k=1}^{K}(a_{0i}+a_{1i}z^{-1}+a_{2i}z^{-2})}{\prod_{k=1}^{K}(1+b_{1i}z^{-1}+b_{2i}z^{-2})} \tag{9}$$

여기서 C_0는 상수이며 k는 2次項의 數이다. 그리고 $a_{2i}=b_{2i}=0$이면 1次函數가 된다. 式(5)에서 $a_{0i}=a_{2i}$이므로 式(9)를 다시 나타내면

$$\begin{aligned}H(z)&=C_0\frac{\prod_{k=1}^{K}C_k(1+a_{k1}z^{-1}+z^{-2})}{\prod_{k=1}^{K}(1+b_{k1}z^{-1}+b_{k2}z^{-2})}\\&=A_0\frac{\prod_{k=1}^{K}(1+a_{k1}z^{-1}+z^{-2})}{\prod_{k=1}^{K}(1+b_{k1}z^{-1}+b_{k2}z^{-2})}\end{aligned} \tag{10}$$

여기서 $A_0=C_0\cdot C_1\cdot C_2\cdot\cdots\cdot C_K$

$C_k\ (k=1,2,\cdots,K)=a_{0i}=a_{2i}\ (i=1,2,\cdots,r)$

$a_{k1}\ (k=1,2,\cdots,K)=a_{1i}/a_{0i}\ (i=1,2,\cdots,r)$

$b_{k1}\ (k=1,2,\cdots,K)=b_{1i}\ (i=1,2,\cdots,r)$

式(10)으로부터 分母의 k번째 2次인자 (quardratic factor)가 分子의 n번째 2次인자와 pairing되어 i번째 2次函數의 block을 이루었다고 하면, 즉

$$H(z)=A_0\prod_{i=1}^{K}H_i(z) \tag{11}$$

여기서

$$H_i(z)=\frac{N_i(z)}{D_i(z)}=\frac{1+a_{n1}z^{-1}+z^{-2}}{1+b_{k1}z^{-1}+b_{k2}z^{-2})}$$

이러한 서로 다른방법의 總數는 $(K!)^2$이다.

任意의 가지點(Fig. 7의 u(n)點)에서 overflow를 방지하기 爲해 各 2次函數 block에 관련된 scaling 因子 $\{S_i\}$ $(i=0,1,\cdots,K)$를 고려하여 式(11)을 다시 나타내면

$$H(z)=S_0\prod_{i=1}^{K}S_iH_i(z)=S_0\prod_{i=1}^{K}S_i\frac{N_i(z)}{D_i(z)} \tag{12}$$

여기서 $S_0\cdot S_1\cdot S_2\cdot\cdots\cdot S_K=A_0$이다.

式(12)의 合成을 그림 9에 나타내었다 그림9에서 S_0는 $1/D_1(z)$의 出力에서, S_1는 $1/D_2(z)$의 出力에서, … overflow를 방지키 위한 scaling因子이며 다음과 같다.[15]

$$S_0^2=\frac{1}{\frac{1}{2\pi j}\oint\frac{z^{-1}}{D_1(z)D_1(z^{-1})}dz}$$

$$S_1^2 = \frac{1}{\dfrac{S_0^2}{2\pi j}\displaystyle\oint \frac{N_1(z)N_1(z^{-1})z^{-1}}{D_1(z)D_1(z^{-1})D_2(z)D_2(z^{-1})}dz}$$

$$\vdots$$

$$S_i^2 = \frac{1}{\dfrac{S_0^2 \cdot S_1^2 \cdots S_{i-1}^2}{2\pi j}\displaystyle\oint \frac{N_1(z)N_1(z^{-1})\cdots N_i(z)N_i(z^{-1})z^{-1}}{D_1(z)D_1(z^{-1})\cdots D_{i+1}(z)D_{i+1}(z^{-1})}dz} \tag{13}$$

그리고 $\{\delta_0(n)\}$은 S_0와 $D_1(z)$의 b_{k1}, b_{k2}의 乘算에 起因하는 誤差이며, $\{\delta_1(n)\}$은 總 5개의 乘算器를 갖는 $N_1(z)$와 $D_2(z)$에 起因하는 誤差이다. 그림 9의 경우 出力 平均自乘 誤差(output mean-squared error) E^2은 다음과 같다.[8,9,15]

$$E^2 = N_0 A_0 \left\{ \sum_{i=1}^{K} M_{i-1} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint \prod_{k=1}^{i} \frac{N_{k-1}(z)N_{k-1}(z^{-1})}{D_k(z)D_k(z^{-1})} S_{k-1}^2 \frac{dz}{z} \right] \cdot \left[\frac{1}{2\pi j} \oint \prod_{k=1}^{K} \frac{N_k(z)N_k(z^{-1})}{D_k(z)D_k(z^{-1})} S_k^2 \frac{dz}{z} \right] + M_K \right\} \tag{14}$$

여기서 $k \le 0$이면 $N_k(z) = D_k(z) = 1$이고, M_i는 i번째 2次函數 block에서 整數(integer)가 아닌 乘數의 箇數이며, $M_0 = 3$, $M_K = 2$이다. 그리고 $N_0 = 2^{-2B}/12$이며 B는 固定小數點 表現에 있어서 負號 bit를 포함한 bit數이다.

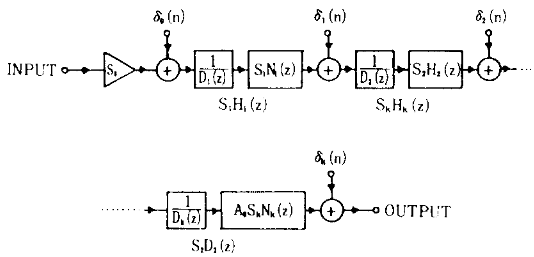


그림 9. Overflow를 방지하기 위한 cascade 실현의 scaling

Fig. 9. Scaling of a casdcaed realization to prevent overflow.

2. Pairing과 ordering을 爲한 program 및 simulation

(1) Program

Jackon[8]은 2次項으로 된 傳達函數의 서로 다른 ordering에 對하여 出力雜音의 變化를 調査하고 良好한 ordering의 規則을 提示 하였으며, Hwang[9]과 leuder[16]는 最適 pole-zero pairing과 ordering을 결정해 주는 dynamic program을 提示 하였으나 高次函數의 경우 computer의 많은 計算時間이 要求된다.

本 論文에서는 式(13)을 利用하여 scaling 因子를 求하고 式(14)로부터 雜音利得(noise gain) E^2/N_0을 거의 最小로 할 수 있고 computer의 計算時間이 훨씬 단축된 program을 作成 하였다. K個의 2次函數 block이 cascade 연결 되었을 時, E^2/N_0을 計算하기 爲해서 dynamic program은 式(14)를 대략 $\frac{1}{2}\binom{2K+2}{K+1} - 1$번 계산하는 반면에 本 program을 利用하면 $M[K(K-1)/2+1]$번 계산 한다. 여기서 M은 任意의 整數이다. 式(14)의 複素函數 積分(complex integral)은 Angstrom[17]의 algorithm을 利用하였으며, 本 program의 structured program을 그림10에 나타내었다.

```
PROCEDURE Optimal
  READ K,M
  FOR I := 1 TO K  DO
    FOR J := 1 TO 3  DO
      READ Aij,Bij
  J := 1
  Mim := 1.E+15
  REPEAT
    call random generating routine
      Poles := Mp(*)
      Zeros := Mz(*)
    Min := 1.E+15
    I := 1
    REPEAT
      L := I + 1
      REPEAT
        call err computing routine
        IF Err < Min
        THEN BEGIN
               MiN := Err
               Mloc(*) := Mz(*)
             END
        S := Mz(I)
        Mz(I) := Mz(L)
        Mz(L) := S
        L := L + 1
      UNTIL L=K
      I := I + 1
      Q := K - 1
    UNTIL I=Q
    IF Min < Mim
    THEN BEGIN
           Mim := Min
           Mzloc(*) := Mz(*)
           Mploc(*) := Mloc(*)
         END
    J := J + 1
  UNTIL J=M
  WRITE optimal zero ordering Mzloc(*)
  WRITE optimal pole ordering Mploc(*)
  WRITE error for this ording Mim
end procedure
```

그림10. 준최적 할당을 위한 구조화프로그램

Fig. 10. Structured program for sub-optimal assignment.

(2) Simulation

本 論文의 Ⅱ-3-2에서 提示한 digital 楕圓필터 設計例의 경우 E^2/N_0를 거의 最小로 할 수 있는 準最適 pole-zero pairing과 ordering을 求하기 爲해 使用된 computer는 HP-1000이며, 任意의 整數 M은 5로 하였다. 設計例의 各 係數 값은 式(10)으로 나타내기 爲해 다시 求했으며, A_0값은 크기特性의 最大값이1이 되도록 規準化 시켰다. 그리고 overflow의 방지를 위한 scaling因子 S는 雜音利得이 가장 적은 경우에 限하여 求하였다.

以上의 結果들을 high-pass, band-pass 順으로 표 5, 6에 各各 나타내었다.

(3) 比較 및 檢討

High-pass필터의 경우 표5에 雜音利得 E^2/N_0을 거의 최소로 할 수 있는 서로 다른 pairing과 ordering을 15번 나타내었다. 各 경우 式(14)를 $5\times[(5\times4/2)+1]=55$번 계산하는 반면 dynamic program은 $\frac{1}{2}\binom{2\times5+2}{5+1}-1=461$번 계산하게 된다. 이 필터의 경우 準最適 割當(assignment)은 $\binom{N:12435}{D:31524}$이며, 雜音利得은 43.42dB이다. 표5에서 최소치와 최대치의 差는 0.81dB이므로 各 경우 모두가 거의 最適하다. 그러나 이 필터의 경우 가장 나쁜 割當을 本 program으로 求해보면 $\binom{N:21543}{D:54312}$이며, 잡음이득은 64.30dB이다. 結果的으로 6dB

표 5. High-pass 필터의 pole-zero pairing과 ordering

Table 5. Pole-zero pairing and ordering of high-pass filter.

ELLIPTIC HIGHPASS FILTER
SAMPLING FREQ. : 10000 (Hz)
A_p(dB) : .5
A_a(dB) : 90
W_p : 3000(Hz)
W_a : 2700(Hz)

ORDER : 10
ACTUAL A_a : 93.9570708232
Lamda : 24989.5885225
(Selectivity) : .824100732787

H(Z)=A0*H1(Z)*H2(Z)*…
H1(Z)=(Ai0+Ai1(Z^-1)+Ai2(Z^-2))/(Bi0+Bi1(Z^-1)+Bi1(Z^-2)) 2

RECURSIVE FILTER OF ORDER 10

SECTION # : 1

A(1,0) : 1	B(1,0) : 1
A(1,1) : -1.80009243803	B(1,1) : 1.37682786336
A(1,2) : 1	B(1,2) : .52343612127

SECTION # : 2

A(2,0) : 1	B(2,0) : 1
A(2,1) : -.861530395728	B(2,1) : 1.12567786768
A(2,2) : 1	B(2,2) : .654048048381

SECTION # : 3

A(3,0) : 1	B(3,0) : 1
A(3,1) : -.1962815255032	B(3,1) : .852080221967
A(3,2) : 1	B(3,2) : .800171191536

SECTION # : 4

A(4,0) : 1	B(4,0) : 1
A(4,1) : .117642318171	B(4,1) : .677467165088
A(4,2) : 1	B(4,2) : .903787894622

SECTION # : 5

A(5,0) : 1	B(5,0) : 1
A(5,1) : .237282846515	B(5,1) : .605294057638
A(5,2) : 1	B(5,2) : .971733863423

A0 : .00146614189235

	BEST ASSIGNMENT					NOISE GAIN	DB
1	2 3	5 1	1 5	4 2	3 4	24477.22	43.89
2	2 2	5 3	1 5	4 1	3 4	26307.24	44.20
3	5 2	4 5	3 4 3	2 1	1 4	24498.67	43.89
4	3 2	1 5	4 1	5 4	2 3	24034.38	43.81
5	3 2	2 4	1 1	4 5	5 3	22362.85	43.50
6	4 2	2 5	3 1	1 4	5 3	25125.20	44.00
7	3 3	1 1	5 5	2 2	4 4	22266.53	43.48
8	4 2	5 5	3 3	2 1	1 4	24412.61	43.88
9	2 2	5 3	4 5	3 1	1 4	26562.48	44.24
10	5 3	1 1	2 5	4 2	3 4	24434.25	43.88
11	1 3	4 1	5 5	3 4	2 2	24524.29	43.90
12	1 3	2 1	4 5	3 2	5 4	22002.87	43.42
13	1 3	4 1	5 5	3 4	2 2	24524.29	43.90
14	2 2	3 4	5 1	4 5	1 3	24366.41	43.87
15	5 3	2 1	4 5	3 4	1 2	26458.66	44.23

HP FILTER NEAR OPTIMAL ASSIGNMENT
&
SCALING COEFFICIENTS

OPTIMAL ASSIGNMENT					NOISE GAIN	dB
1 3	2 1	4 5	3 2	5 4	22002.87	43.42

S(1)=.279131591003	S(2)=.003488423972	S(3)=.294369716936
S(4)=.064965416033	S(5)=.272074558381	S(6)= 289.787864856

가 1bit에 해당하므로, $\binom{N:21543}{D:54312}$順으로 digital필터를 構成 했다면 4bit가 더 많은 register를 사용해야 잡음이득을 最小로 할 수 있다.

Band-pass 필터의 경우 각각의 계산량은 80번 이지만, dynamic program은 1715번 이다. 이처럼 필터의 次數가 增加하면 할 수록 계산량의 差는 대단히 크게 된다. 이 필터의 경우 準 最適 割當은 $\binom{N:463521}{D:261543}$ 이며, 31.77dB이다. 가장 나쁜 割當은 $\binom{N:462351}{D:513246}$이며, 91.18dB이다.

本 論文에서 提示한 program의 타당성을 調査하기

위해 Hwang[9]의 論文에서 說明된 8次 low-pass 필터 函數에 對하여 고찰해 보았다. 이 필터의 경우 Hwang은 最適 割當인 $\binom{N:1234}{D:2431}$을 求하기 위해 $\frac{1}{2}\binom{2\times 4+2}{4+1}$ =125번을 계산하였으나 本 論文의 program에 依하면 5×(4×3/2+1)=35번 계산하게 되며, 本 program

表 6. Band-pass 필터의 pole-zero pairing과 ordering

Table 6. Pole-zero pairing and ordering of Band-pass filter.

ELLIPTIC BANDPASS FILTER
SAMPLING FREQ. 10000 (Hz)
A_p(dB) : .2
A_s(dB) : 40
W_p1 : 2000(Hz)
W_p2 : 3000(Hz)
W_s1 : 1900(Hz)
W_s2 : 3100(Hz)
ORDER : 6
ACTUAL A_s : 44.1716376224
W_0 : 20000
BW : 14346.8356566
(Selectivity) : .820653474907
H(Z)=A0*H1(Z)*H2(Z)*…
H1(Z)=(Ai0+Ai1(Z^-1)+Ai2(Z^-2))/(Bi0+Bi1(Z^-1)+Bi2(Z^-2))

RECURSIVE FILTER OF ORDER 12

SECTION # : 1

A(1,0) : 1	B(1,0) : 1
A(1,1) : 1.53798226803	B(1,1) : .224201447476
A(1,2) : 1	B(1,2) : .743334454886

SECTION # : 2

A(2,0) : 1	B(2,0) : 1
A(2,1) : -1,53798226803	B(2,1) : -.224201447476
A(2,2) : 1	B(2,2) : .743334454886

SECTION # : 3

A(3,0) : 1	B(3,0) 1
A(3,1) : .889184839273	B(3,1) : .515377097592
A(3,2) : 1	B(3,2) : .880556476844

SECTION # : 4

A(4,0) : 1	B(4,0) : 1
A(4,1) : -.889184839273	B(4,1) : -.515377097592
A(4,2) : 1	B(4,2) : .880556476844

SECTION # : 5

A(5,0) : 1	B(5,0) : 1
A(5,1) : .7487000731313	B(5,1) : .621224902758
A(5,2) : 1	B(5,2) : .97055481678

SECTION # : 6

A(6,0) : 1	B(6,0) : 1
A(6,1) : -.74.8700731313	B(6,1) : -.621224902758
A(6,2) : 1	B(6,2) : .97055481678

A0 : .011720233543

	BEST ASSIGNMENT	NOISE GAIN	DB
1	6 5 4 1 2 3 2 1 4 5 6 3	2990.63	34.76
2	3 6 4 2 5 1 3 2 6 4 1 5	1962.77	3 32.93
3	6 4 3 2 5 1 4 1 6 5 2 3	1986.85	32.98
4	6 5 3 2 1 4 4 1 5 6 3 2	2192.66	33.41
5	1 6 5 2 3 4 3 2 6 1 5 4	2353.07	33. 72
6	5 2 4 3 1 6 2 5 4 1 3 6	2519.70	34.01
7	6 2 5 1 3 4 2 6 5 1 3 4	2100.13	33.22
8	6 5 1 2 4 3 4 3 5 2 6 1	2475.02	33.94
9	1 6 4 3 5 2 4 3 6 1 5 2	2245.80	33.51
10	1 3 6 5 4 2 1 3 6 5 4 2	2505.19	33.99
11	4 2 5 6 3 1 2 4 3 6 1 5	2600.34	34.15
12	6 2 3 1 5 4 2 6 3 1 5 4	1921.02	32.84
13	6 3 5 4 1 2 4 2 5 3 6 1	2268.99	33.56
14	5 6 3 4 2 1 2 5 4 1 6 3	2766.32	32.424
15	4 6 3 5 2 1 2 6 1 5 4 3	1572.95	31.97

BP FILTER NEAR OPTIMAL ASSIGNMENT
&
SCALING COEFFIENTS

OPTIMAL ASSIGNMENT	NOISE GAIN	dB
4 6 3 5 2 1 2 6 1 5 4 3	1572.95	31.97

S(1)=.440053343525 S(2)=.241802530609 S(3)=.713053848929
S(4)=.213413823968 S(5)=.493640440918 S(6)=.16501204705
S(7)=8.88584716846

으로 求한 15경우의 準 最適割當 中에서 最小는 $\binom{N:1243}{D:2431}$로 32.04dB이고 最大는 $\binom{N:4213}{D:3421}$로 32.37dB이었다. 즉 각 경우 0.5dB를 초과하지 않음을 확인하였다. 그러므로 本 program을 利用하면 高次函數의 경우 dynamic program에 比하여 보다 빠른 시간에 거의 最適한 pole-zero pairing과 ordering을 求할 수 있다.

V. 結 論

Digital 필터의 設計明細條件이 周波數 領域에서 {A_p,

A_a, Ω_{P1}, Ω_{a1}, T가 로 주어질 때, 周波數 크기 應答特性이 他 函數에 比해 가장 優秀한 楕圓函數를 求하기 위한 program을 提示하였으며, 高次의 IIR digital 필터函數를 1次 또는 2次函數로 分解하여 digital필터 素子를 最小로 하는 直接 canonic形으로 合成 한後 cascade 連結法으로 合成하는 方法을 보였다. 그리고 hardware構成 時 有限語長 register 使用에 起因하는 量子化 誤差를 分析하여, dynamic range條件 下에 固定小數點 ꞏegister를 使用하여 cascade 連結法으로 digital필터를 實現할 경우 出力 雜音利得을 거의 最小로 할 수 있는 pole-zero pairing과 ordering 를 決定하는 program을 提示하였다.

그러므로 어떤 分野의 digital필터 設計者라도 本論文에서 提示한 program을 利用하면 bit數가 적은 register를 使用하여 양호한 周波數 應答特性을 얻을 수 있는 digital필터를 設計할 수 있을 것이다.

參 考 文 獻

[1] K. Hirano, S. Nishimura, and S.K. Mitra, "Design of Digital Notch Filter", *IEEE Trans. Circuits and Syst.,* vol. CAS-21, pp. 540-546, July 1974.

[2] L.R. Rabiner and B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing,* N.Y., Prentice-Hall, 1975.

[3] A. Antoniou, *Ditigtal Filters Analysis and Design,* N.Y., McGraw-Hill Co., 1979.

[4] F.J. Taylor, *Digital Filter Design Hand Book,* N.Y., Marcel Dekker Inc., 1983.

[5] A. Antoniou et al., "Two methods for the reduction of quantization effects in Recursive digital filters", *IEEE Trans. Circuits and Syst.,* vol. CAS-30, pp. 260-167, Mar. 1983.

[6] H.K. Kwan, "On the problem of designing IIR digital filters with short coefficient word lengths" *IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Processing,* vol. ASSP-27, pp. 620-624, Dec. 1979.

[7] P. Amstutz, "Elliptic approximation and elliptic filter design on small computers", *IEEE Trans. Circuits and Syst.,* vol. CAS-25, pp. 1001-1011, Dec. 1978.

]8[L.B. Jackson, "Roundoff-Noise analysis for fixed-point digital filters realized in cascade or parallel form", *IEEE Trans. Audio and Electroacoust.,* vol. AU-18, June 1970.

[9] S.Y. Hwang, "On optimization of cascade fixed-point digital filters", *IEEE Trans. Circuits and Syst. (Letters),* vol. CAS-21, pp. 163-166, Jan. 1974.

[10] A.J. Grossman, "Synthesis of Tchebyscheff parametter symetrical filters", *Proc. IRE,* vol. 45, pp. 454-473, Apr. 1957.

[11] A.V. Oppenheim and R.W. Schafer, *Digital Signal Processing,* N. J., Prentice-Hall, 1975.

[12] L.R. Rabiner and R.W. Schafer, *Digital Signal Processing of Speech Signals,* N.J., Prentice-Hall, 1978.

[13] G.F. Franklin and J.D. Powell, *Digital Control Dynamic Systems,* Addison Wesley Publ. Comp. Inc., 1980.

[14] C.R.W. Compbell and K.M. Reineck, "A Pole/Zero prewarping procedure in SCF design", *IEEE Trans. Circuits and Syst.,* vol. CAS-31, pp. 821-824, Sep. 1984.

[15] A. Peled and B. Liu, *Digital Signal Processing: Theory, Design, and Application,* N.Y., John Wiley & Sons. Inc., 1976.

[16] E. Leuder, "Minimizing the roundoff noise of digital filters by dynamic program", Preseted at the 1974 *Arden House Workshop on Digital Signal Processing,* Harriman, Ny.Y., Jan. 1974.

[17] K.J. Astrom et al., "A numerical method for the evaluation of complex integrals", *IEEE Trans. Automat. Contr. (Shor papers),* vol. AC-13, pp. 468-471, Aug. 1970.