論文 87-24-1-7

컴퓨터 發生 Lyapunov함수에 의한 대규모 시스템의 安定度 解析

(Stability Analysis of Large Scale Dynamical Systems Using Computer Generated Lyapunov Functions)

南 副 熙*

(Boo Hee Nam)

要 約

Brayton-Tong이 개발한 컴퓨터發生 Lyapunov 함수를 이용하여, 本 硏究에서는 漸近安定한 2階의 연속시간 시스템의 安定領域을 구하고, 이를 확장하여 分割-合成法에 의하여 대규모 시스템의 안정영역을 구한다. 또한 이산시간 대규모 시스템에 적용하여 기존의 방법보다 개선된 安定度 결과를 얻는다.

Abstract

Using the computer-generated Lyapunov functions due to Brayton-Tong's constructive algorithm, we estimate the domains of attraction of dynamical systems of the second order, and analyze the asymptotic stability of large scale contincous-time and discrete-time systems by the decomposition and aggregation method. With this approach we get the less conservative stability results than the existing methods.

I. 序 論

Brayton-Tong[1] [2]은 動特性시스템 (dynamic system)의 完全漸近 安定度(global asymptotic stability)를 解析하는데 필요한 Lyapunov함수를 컴퓨터發生시키는 알고리즘을 개발하였다. [3]에서는 이 Brayton-Tong에 의한 컴퓨터發生 Lyapunov함수를 이용하여 漸近安定한 시스템의 安定領域(domain of attraction)을 구하는 방법을 제시하였다.

본 연구에서는 높은 次數의 연속시간 대규모 시스템을 2階의 subsystem으로 分割하여, 상호연결함수를 제거한 自由시스템(isolated or free subsystem)의 安定尺度와 안정영역을 구하는데 Brayton-Tong의 컴퓨터發生 Lyapunov함수를 이용한다. 自由시스템의 Lyapunov함수로 상호연결함수의 안정도 매개변수를 추정한 후, 全體시스템의 安定度를 판별하기 위하여 시험行列을 만들어 이 行列이 M-行列[4] (Minkowski 行列)이면, 全體시스템의 漸近安定은 보장되며, 이를 全體시스템의 安定領域을 구하는데 이용한다. 이산시간 대규모 시스템의 경우에도 연속시간의 경우처럼 分割-合成法으로 完全漸近安定度를 컴퓨터發生 Lyapunov 함수를 이용하여 판별한다.

*正會員, 江原大學校 制御計測工學科
(Dept. of Control and Instrumentation Eng., Kangweon National Univ.)
接受日字 : 1986年 7月 22日
(※ 本 硏究는 1984年度 韓國科學財團 硏究費 支援에 依해 이루어진 것임)

II. Brayton-Tong의 컴퓨터發生 Lyapunov 函數와 安定領域

Brayton-Tong [1][2]는 다음 형태의 연속시간 시스템의 안정도를 판별하는 알고리즘을 개발하였다

$$\dot{x} = f(x) \tag{E}$$

시스템(E)를 다음과 같이 바꾸어 표시한다:

$$\dot{x} = M(x)x \qquad (E')$$

여기서 $M(x)$는 모든 $x \in R^n$에 대하여 $M(x)x = f(x)$가 되도록 선택되며, (E′)에 Euler公式을 적용하면 $x_{k+1} = x_k + h_k M(x_k) x_k$가 되고, 여기서 $h_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 0, 1, 2, \cdots$이다. $x_k \in R^n$의 모든 값을 변화시켜 얻은 $M(x_k)$의 행렬집합을 S라 하면, 시스템(E)와 등가인 이산시간 시스템(1)을 얻는다:

$$x_{k+1} = (I_n + h_k M_k) x_k, \quad M_k \in S \qquad (1)$$

여기서 I_n은 $n \times n$단위行列이다.

〔1〕과 〔2〕에서, 만일 시스템(1)의 평형점 $x=0$가 모든 $\{h_k\}$, $o < h_k \le h'$에 대하여 安定(完全漸近安定)하면, 시스템(E)의 평형점 $x=0$도 安定(完全漸近安定)함이 증명되었다. 이것은 行列집합의 安定性을 이용하여 다음과 같이 말할 수 있다. 모든 $x \in R^n$에 대하여 $f(x) = Mx$, $M \in S$가 되는 모든 $n \times n$實數 行列M의 集合을 S라 할 때, 다음 집합

$$A = \{I_n + hS\} \qquad (2)$$

가 어떤 $h > 0$에 대하여 行列安定(行列漸近安定)하면, 시스템(E)의 평형점 $x=0$는 安定(完全漸近安定)하다.

원점 포함한 임의의 영역$U \subset R^n$에 대하여 $MV \subseteq U$가 모든 $M \in A'$ (여기서 A'은 A에 의해 발생되는 multiplicative semigroup)에 대하여 성립할 때, 行列집합A를 行列安定하다라고 한다. A가 行列安定하면 모든 $M \in A$에 대하여 $MW \subseteq W$가 성립하는 원점포함하는 有限영역$W \subset R^n$가 존재하고, W는 원점대칭인 볼록집합(convex set)으로 선택될 수 있으며, 또한, 모든 $M \in A$와 $x \in R^n$에 대하여 $\| Mx \|_w \le \| x \|_w$가 성립하는 vector norm $\| \cdot \|_w$가 존재한다. 따라서 $\|x\|_w = \inf \{\alpha : \alpha \ge 0,\ x \in \alpha W\}$가 되어, $\|x\|_w$는 行列集合A의 Lyapunov함수가 된다. 즉, 모든 $M \in A$, $x \in R^n$에 대하여 $v(Mx) \le v(x)$의 성질을 갖는 Lyapunov함수 $v(x) = \|x\|_w$가 된다.

$\rho > 1$에 대하여 ρA가 行列安定하면, A를 行列漸近安定하다고 定義한다. 따라서 A가 安定하면, $0 < r < 1$에서 rA는 漸近安定하다. 또한, 行列A가 漸近安定하면, 모든 $M \in A'$에 대하여 고유치 절대값 $|\lambda(M)| \le k < 1$되는 k가 존재한다.

$n \times n$實數의 行列集合 $A = \{M_0, \cdots, M_{m-1}\}$의 安定 如否를 판별하기 위하여, 原點포함한 초기의 대칭 볼록영역W_0에서부터 W_{k+1}을 다음과 같이 구한다.

$$W_{k+1} = H\left[\bigcup_{j=0}^{\infty} M_k^j W_k\right], \quad k' = (k-1) \bmod m,$$

여기서 $H[W]$는 W의 convex hull이다. 이 때 行列A가 安定하기 위한 필요충분조건은

$$W^* \triangleq \bigcup_{k=0}^{\infty} W_k$$

가 有限한 것이다.

위의 컴퓨터發生 Lyapunov함수를 이용하여 〔3〕에서와 같이 漸近安定시스템의 安定領域을 구한다. 즉, 非線型 시스템(E): $\dot{x} = f(x)$를 평형점 $x=0$에서 線型化하면 $\dot{x} = Jx + f_1(x)$의 형태가 되고, 여기서$J = [\partial f/\partial x]_{x=0}$는 Jacobi 行列이며, $\lim_{\|x\| \to 0} \| f_1(x) \| / \|x\| = 0$이다. 만일 J의 고유치의 實數部分이 陰이면, 線型시

$$\dot{x} = Jx \qquad (L)$$

스템은 完全漸近安定하며, (E)의 평형점$x=0$는 적어도 漸近安定하다. 시스템(L)에 Euler公式을 적용하면

$$x_{k+1} = (I + h_k J) x_k \qquad (3)$$

의 差分方程式이 되며, 無限의 行列집합 $A = \{I + h_k J : 0 < h_k \le h\}$에 대하여, 하나의 外殼行列(extreme matrix) $E[A] = \{I + hJ\}$를 얻는다. 여기서 $h > 0$는 $|\lambda(I + hJ)| < 1$에 의하여 구해진다.

위의 行列A에 Brayton-Tong의 알고리즘을 적용하여, 초기의 對稱W_0로부터 최종의 볼록영역W^*를 얻는다.

線型시스템(L)의Lyapunov함수 $v(x) = \|x\|_{w^*}$를 (E)의 안정영역을 추정하기 위하여 사용한다. $v(x) = \|x\|_{w^*} = c$, $0 < c < \infty$,로 결정되는 各各의 側面에 수직하게 $v(x)$의 gradient를 구하여, 시스템(E)의 解를 따라 時間t에 대한 Lyapunov함수의 導函數

$$D v_{(E)}(x) \triangleq \nabla v(x)^T f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) f_i(x)$$

를 계산한다. 이 때 W^*를 형성하는 各側面線分L_i上에 균등간격으로 l_i個의 點$x_i^{l}, \cdots, x_i^{l_i}$를 설정한다. 여기서 l_i는 L_i의 길이의 비례한다. 다음 도함수

$$D v_{(E)}(x) = [\nabla v(c_i x^{ik})]_{L_i}^T \cdot f(c_i x^{ik}) < 0 \qquad (4)$$
$$k = 1, \cdots, l_i, \quad i = 1, \cdots, n_l$$

의 조건을 만조시키는 常數 $c_{min} = \min\{c_i\}$를 구한다. 여기서 $[\nabla v(x)]_{L_i}$는 L_i線上에서 계산한 gradient vector이다(그림1, 2참조). 만약에 式(4)를 만족시키는 c_{min}, $0 < c_{min} < \infty$이 존재하면, 시스템(E)의 安定영역Ω는

$$\Omega = c_{min} \cdot W^*$$

가 되고, (E)의 안정영역 全體의 部分집합이 된다. 외각행렬$\{I + hJ\}$로부터 W^*와 Ω를 구하는 알고리즘을 FORTRAN으로 프로그램하였다.

Ⅲ. 연속시간 대규모 시스템의 安定度와 安定領域

Brayton-tong의 알고리즘을 高次의 시스템에 직접 적용하기는 어려우므로 〔4〕의 分割-合成法을 이용하여 다음 형태로 주어지는 대규모 시스템의 安定度를

解析하고 安定영역을 구한다.

$$\dot{z}_i = F_i(z_i) + G_i(x) \qquad (\Sigma_i)$$

여기서 $i=1,\cdots,l$, $z_i \in R^{n_i}$, $x \in R^n$, $n=\sum_{i=1}^{l} n_i$, $x^T = (z_1^T,\cdots,z_l^T)$, $F_i(0)=0$, $G_i(0)=0$ 이다. $F(x)^T=[F_1(z_1)^T,\cdots,F_l^T(z_l)]$, $G(x)^T=[G_1(x),\cdots,G_l(x)^T]$라 놓으면 (Σ_i)는 等價로 다음과 같이 표시된다.

$$\dot{x} = F(x) + G(x) \triangleq H(x). \qquad (S)$$

다음의 自由 시스템 (S_i)에 대하여

$$\dot{z}_i = F_i(z_i) \qquad (S_i)$$

$F_i(z_i) = M_i(z_i)z_i$가 성립하는 行列$M_i(z_i)$가 존재할 때, 여기에 Euler公式을 적용하면

$$z_i(k+1) = [In_i + h_k M_i(z_i(k))]z_i(k) \qquad (5)$$

가 된다. $S_i = \{M_i(z_i) \in R^{n_i \times n_i}, z_i \in R^{n_i}\}$의 行列 집합에 대하여, 집합$A_i = \{In_i + h_i S_i\}$가 行列 漸近安定하게 $h_i > 0$가 선정되면, $\rho_i A_i$가 行列安定한 $\rho_i > 1$가 존재한다. 따라서 行列A_i에 Brayton-Tong의 알고리즘을 적용하여 볼록영역 W_i^*를 구하면, (S_i)에 대한 lyapunov 함수는 $v_i(z_i) \triangleq \|z_i\|_i \triangleq \|z_i\|_{w_i^*}$가 된다. 이 때 W_i^*의 경계集合, ∂W_i^*는 $\partial W_i^* = \{z_i \in R^{n_i}: \|z_i\|_i = 1\}$이 되며, $v_i(z_i) = \|z_i\|_i$는 Lipschitz상수가 1인연속함수임에 유의할 필요가 있다.

정리 1 [5] : 시스템 (E) : $\dot{x} = f(x) = M(x)x$에 대하여, 집합

$$\{\rho(I + h_1 M(x)) : x \in R^n\} \qquad (6)$$

이 안정하도록 $h_1 > 0$와 $\rho > 1$이 존재한다고 가정한다. 집합(6)에 대하여 Brayton-Tong알고리즘에 의해 발생된 볼록 對稱집합을 W^*라 하고, $v(x) = \|x\|_*$를 이에 상응하는 Lyapunov함수라고 하면, (E)의 解를 따라 다음이 성립한다.

$$D\,v_{(E)}(x) = \lim_{h \to 0+} \sup \frac{v[x + hf(x)] - v(x)}{h} \le -\mu v(x),$$

여기서 $\mu = (1 - 1/\rho)\ (1/h_1)$이며, 安定尺度가 된다.

정리 2 [4] : 대규모 시스템

$$\dot{z}_i = F_i(z_i) + G_i(x) \qquad (\Sigma_i)$$

에 대하여, 평형점$x=0$는 다음 조건이 만족될 때 漸近安定하다.

(A-1) 自由시스템 (S_i) : $\dot{z}_i = F_i(z_i)$가 정리 1을 만족시킨다. 즉, (S_i)의 Lyapunov함수 $v_i(z_i) = \|z_i\|_i$에 대하여 $Dv_{i\,(S_i)}(z_i) \le -\mu_i v_i(z_i)$가 되는 $\mu_i > 0$가 존재한다.

(A-2) 연결함수에 대하여, $\|G_i(x)\|_i \le \sum_{j=1}^{l} g_{ij}\|z_j\|_j$, $x \in R^n$, 가 되는 $g_{ij} \ge 0$가 존재한다.

(A-3) $l \times l$行列 $D = [d_{ij}]$가 M-行列이다. 여기서

$$d_{ij} = \begin{cases} \mu_i - g_{ii}, & i = j \\ -g_{ij}, & i \ne j \end{cases}$$

시스템(Σ_i)가 특히 線型구조 $G_i(x) = \sum_{j=1}^{l} A_{ij}z_j$를 가질 경우 $g_{ij} = \|A_{ij}\|_{ij}$가 된다. W_i^*와 W_j^*에 의하여 유도된 norm$\|\cdot\|_i$와 $\|\cdot\|_j$ 그리고 경계집합 ∂W_i^*와 ∂W_j^*에 대하여 $\|A_{ij}\|_{ij}$는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\|A_{ij}\|_{ij} = \sup_{\|z_j\|_j = 1} \|A_{ij}z_j\|_i = \sup_{z_j \in \partial W_j^*} \|A_{ij}z_j\|_i$$

各 自由시스템(S_i)에 대한 Lyapunov함수 $v_i(z_i) = \|z_i\|_i$에 의하여 II節의 알고리즘에 依해 安定영역 D_i를 구한다.

$$D_i = \{z_i \in R^{n_i}: v_i(z_i) = \|z_i\|_i < V_i^o\} \qquad (7)$$

(7)의 $V_i^o > 0$는 가능한 한 큰 값을 택한다.

全體시스템(S)의 안정영역을 구하기 위하여 다음의 Lyapunov함수를 사용한다.

$$v(x) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i v_i(z_i) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \|z_i\|_i \qquad (8)$$

여기서 $\alpha_i > 0$는 加重値이며, 안정영역Ω[6]은 다음으로 구하여진다.

$$\Omega = \{x \in R^n : v(x) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i v_i(z_i) < V^o\} \qquad (9)$$

여기서 $V^o = \min_{1 \le i \le l} \{\alpha_i V_i^o\}$로 주어진다. 따라서 시스템(S)가 정리 2의 조건 (A-1)~(A-3)를 만족시키면, (S)의 평형점$x=0$는 漸近안정하며, 집합Ω는 안정영역의 추정치가 된다. 여기서, α_i는 정리 2의 시험行列 D의 대각선 요소의 加重合 z가 다음과 같이 최소화되도록 최적의 α_i를 선택한다[7]

$$\text{最小化} : z = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \,|\, \mu_i - g_{ii} \,|$$

但, 제한조건 $\alpha_i|\mu_i - g_{ii}| - \sum_{j=1, j \ne i}^{l} \alpha_j g_{ij} > 0$와 $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i = 1$이 만족되어야 한다.

예제 1 : 다음의 3個의 發電機시스템[8]을 생각한다.

$$(\Sigma_1) : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 - 0.4159[\cos(x_1 - 0.0349) - \cos 0.0349] - 12.0289[\sin(x_1 - 0.0349) + \sin 0.0349] + g_1(x) \end{cases}$$

$$(\Sigma_2) : \begin{cases} \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -2x_4 - 0.1911[\cos(x_3 - 0.05236) - \cos 0.05236] - 11.0579[\sin(x_3 - 0.05236) + \sin 0.05236] + g_2(x) \end{cases}$$

여기서 $g_1(x)$와 $g_2(x)$는 (Σ_1)과 (Σ_2)를 연결시키는 함수이다. $z_1^T = (x_1, x_2)$, $z_2^T = (x_3, x_4)$라 놓고, (Σ_1)과 (Σ_2)에서 상호연결함수를 제외한 自由시스템을 各各 (S_1)과 (S_2)라 하면, Jacobi行列은 각각

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12.0292 & -2 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11.0581 & -2 \end{bmatrix}$$

가 되며, 시간 간격을 $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.05$로 선정하면,

漸近安定 行列은 각각

$$M_1=\begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -1.20292 & 0.8 \end{bmatrix},\quad M_2=\begin{bmatrix} 1 & 0.05 \\ -0.552905 & 0.9 \end{bmatrix}$$

가 되고, $\rho_1=1.03$, $\rho_2=1.02$, 따라서 $\mu_1=0.291$, $\mu_2=0.392$로 계산된다(정리 1 참조). 이 M_1과 M_2에 의해 發生된 볼록 집합 W_1^*와 W_2^*, 그리고 自由시스템의 安定領域 D_1과 D_2가 그림 1 및 그림 2에 각각 나타나 있다.

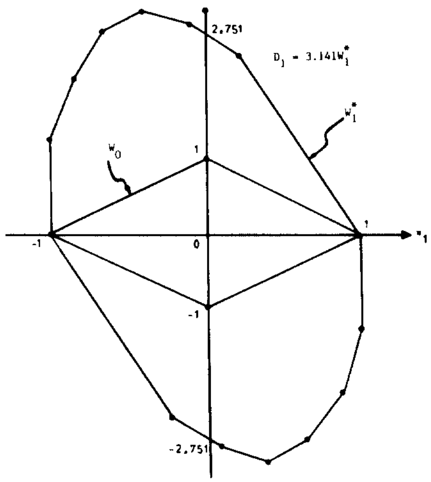

그림 1. 자유시스템 (S_1)의 W_1^*와 D_1
Fig. 1. W_1^* and D_1 of the free subsystem(S_1).

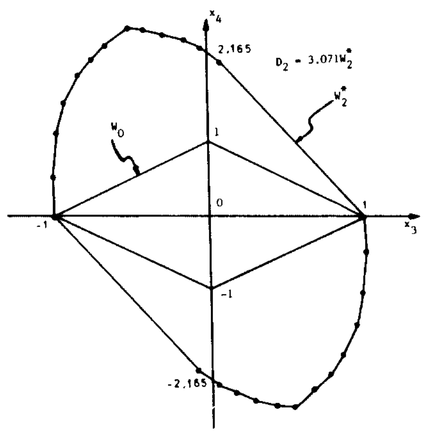

그림 2. 자유시스템 (S_2)의 W_2^*와 D_2
Fig. 2. W_2^* and D_2 of the free subsystem(S_2).

Lyapunov함수 $v_i(z_i)=\|z_i\|_1$에 의해 정리 2의 g_{ij}를 를 계산하기 위하여 다음 不等式[7]을 이용한다.

$$a[\cos(y+\theta)-\cos\theta]\le|a|\cdot|\sin\theta|\cdot|y|$$

$$|y_1\pm y_2|\le|y_1|+|y_2|$$

다음의 연결함수에 대하여

$$g_1(x)=0.055[\cos(x_3+\theta)-\cos\theta]-0.1002[\cos(x_1-x_3-\theta_2)-\cos\theta_2]$$

$$g_2(x)=0.0599[\cos(x_1+\theta_3)-\cos\theta_3]-0.1002[\cos(x_1-x_3+\theta_4)-\cos\theta_4]$$

$\theta_1=86°$, $\theta_2=81°$, $\theta_3=86°$, $\theta_4=91°$,

다음과 같이 계산된다.

$$G_1(x)\triangleq\begin{bmatrix} 0 \\ g_1(x) \end{bmatrix}\le\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.099 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.154 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} |x_3| \\ |x_4| \end{bmatrix}$$

$$G_2(x)\triangleq\begin{bmatrix} 0 \\ g_2(x) \end{bmatrix}\le\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.16 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1002 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} |x_3| \\ |x_4| \end{bmatrix}$$

따라서, W_1^*와 W_2^*로부터 $g_{ij}=\|A_{ij}\|_{ij}$와 시험行列 D가 다음과 같이 계산된다.

$g_{11}=0.036$ $g_{12}=0.056$

$g_{21}=0.0739$ $g_{22}=0.04628$

$$D=\begin{bmatrix} 0.255 & -0.056 \\ -0.0739 & 0.3457 \end{bmatrix}$$

이 行列D는 M－行列이므로, 全體시스템의 평형점 $x=0$는 漸近安定하다.

各 自由시스템의 안정영역은 式(7)에서 $V_1^\circ=3.141$, $V_2^\circ=3.071$로 구해지고, 式(10)의 α_i를 線型프로그래밍으로 구하면 $\alpha_1=0.824$, $\alpha_2=0.176$으로 구하여졌다. 따라서 全體시스템의 안정영역Ω는 다음과 같다.

$$\Omega=\{x\in R^4 : \alpha_1\|z_1\|_1+\alpha_2\|z_2\|_2<c\}$$

여기서 $c=\min\{\alpha_1V_1^\circ,\ \alpha_2V_2^\circ\}=0.54$

위의 예제 1을 [8]에서는 自由시스템의 減衰係數로 100을 사용하였으나 本 硏究에서는 보다 실제값에 가까운 값인 2를 사용하였으며, 감쇄계수를 2로 할때 [8]의 解析方法으로는 결론을 얻을 수 없다.

Ⅳ. 離散時間 大規模 시스템

다음 형태의 差分方程式으로 표시되는 이산시간 시스템을 생각한다.

$$z_i(k+1)=f_i[z_i(k),k]+g_i[x(k),\ k)] \qquad (\Sigma_i)$$

여기서 $k=0,1,2,\cdots$, $i=1,\cdots,l$, $x^T=[z_1^T,\ \cdots,z_l^T]$이고, $f(x,k)^T=[f_1(z_1,k)^T,\cdots,f_l(z_l,k)^T]$와 $g(x,k)^T=[g_1(x,k)^T,\cdots,g_l(x,k)^T]$로 표시하면, 위 (Σ_i)는

$$x(k+1)=f[x(k),k]+g[x(k),k]\triangleq h[x(k),k] \quad (S)$$

가 되며, 다음을 自由시스템(S_i)라 한다.

$$z_i(k+1)=f_i[z_i(k),\ k] \qquad (S_i)$$

自由시스템(S_i)에서 $f_i[z_i(k), k] = M(z_i(k), k)\, z_i(k)$의 형태로 변형하여, Ⅱ節에서와 같이 k와 z_i의 모든 값을 변화시켜 얻은 漸近安定한 行列집합을 M라하면, 이 行列M에 Brayton-Tong의 알고리즘을 적용하여, 自由시스템(S_i)의 Lyapunov함수 $v_i(z_i) = \| z_i \|_i$가 구해진다.

정리 3 [5] : 대규모 시스템(S)의 평형점 x=0는 다음 조건이 만족될 때 均一하게 完全漸近安定하다.

(B-1) 各 自由 시스템(S_i)의 Lapunov함수 $vi(z_i) = \| z_i \|_i$에 대하여 다음을 만족하는 $\sigma_i \in R$가 존재한다.

$$D v_{i(S_i)}(z_i) \triangleq v_i(k+1) - v_i(k) \le \sigma_i \| z_i \|_i \qquad (10)$$

여기서 $\sigma_i = 1/\rho_i - 1$이며, $\rho_i > 1$은 (S_i)가 完全漸近安定함에서 구해진다.

(B-2) Subsystem(Σ_i)의 상호 연결함수 $g_i(x)$에 대하여, 다음을 만족하는 $a_{ij} \ge 0$가 존재한다.

$$| g_i(x, k) | \le \sum_{j=1}^{l} a_{ij} \| z_j \|_j, \quad i = 1, \cdots, l$$

(B-3) l×l시험 行列 $D = [d_{ij}]$가 M-行列이다.

여기서

$$d_{ij} = \begin{cases} -(\sigma_i + a_{ii}), & i = j \\ -a_{ij}, & i \ne j \end{cases}$$

自由시스템이 특히 (S_i) : $z_i(k+1) = A_i z_i(k)$의 형태일 때, 위의 정리 3에서 Lyapunov함수로 사용되는 함수가 보통의 Euclidean norm이면, 行列A_i는 norm $\| A_i \| = [\lambda_M (A_i^T A_i)]^{\frac{1}{2}} < 1$의 조건을 만족시켜야한다 [4] (여기서 $\lambda_M(A)$는 行列A의 최대 固有値이다). 그러나, 例를 들어 $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ -1.5 & 0 \end{bmatrix}$은 $\lambda(A_1) = 0.5 \pm j0.707$, $|\lambda(A_1)| = 0.866 < 1$으로 行列漸近安定이지만, Euclidean norm $\| A_1 \| = 1.825 > 1$가 되어, 정리 3을 Euclidean norm에 의하여 적용시킬 수 없으나, Brayton-Tong의 알고리즘에 의한 컴퓨터發生 Lyapunov함수는 이 경우에도 적용시킬 수 있는 利點이 있다.

예제 3 [9] : 다음 시스템의 安定度를 판별한다.

$$z_i(k+1) = P z_i(k) + h_i[k, z_i(k)], \; i = 1, 2$$

여기서 $z_1^T = (x_1, x_2)$, $z_2^T = (x_3, x_4)$, $x^T = (z_1^T, z_2^T)$,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix}, \quad h_1 = r \begin{bmatrix} (\sin k)\, \mathrm{sat}(x_1 + x_2) \\ (\sin k)\, \mathrm{sat}(x_3 + x_4) \end{bmatrix},$$

$$h_2 = r \begin{bmatrix} (\cos k)\, \mathrm{sat}(x_3 + x_4) \\ (\cos k)\, \mathrm{sat}(x_1 + x_2) \end{bmatrix}, \quad \mathrm{sat}\ t = \begin{cases} t, & |t| \le 1 \\ 1, & |t| \ge 1 \end{cases},$$

$r > 0$.

行列P에 의한 Brayton-Tong의 볼록집합W*는 그림 3과 같다. $\lambda(P) = 0.5 \pm j0.5$, $|\lambda(P)| = 0.707 < 1$, $\rho_i = 1.3$으로 계산되고, $\sigma_i = -0.23$, $i = 1, 2$이다. 연결 함수에 대하여는 다음과 같이 된다.

$$h_1 \le r \begin{bmatrix} |x_1| + |x_2| \\ |x_3| + |x_4| \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |x_3| \\ |x_4| \end{bmatrix}$$

$$h_2 \le r \begin{bmatrix} |x_3| + |x_4| \\ |x_1| + |x_2| \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |x_3| \\ |x_4| \end{bmatrix}$$

따라서, $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = r$로 계산되어, 다음의 시험 行列을 갖는다:

$$D = \begin{bmatrix} 0.23 - r & -r \\ -r & 0.23 - r \end{bmatrix}.$$

이 D가 M-行列이 될 r값의 범위는 $0 < r < 0.115$이다. 그러나, 이 例題 3에 [9]의 方法을 사용하면 $0 < r \le 0.025$의 값을 얻게되어, 컴퓨터 發生 Lyapunov함수에 의한 것이 훨씬 개선된 결과를 낳음을 알 수 있다.

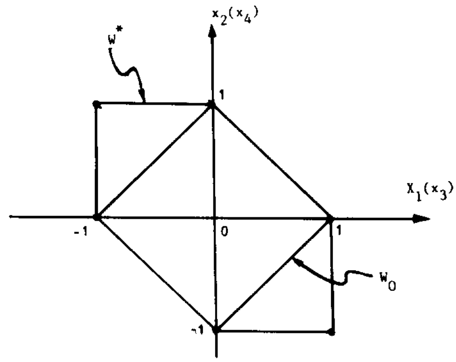

그림 3. 예제 2의 W_0와 W*
Fig. 3. W_0 and W* of example 2.

V. 結　論

Brayton-Tong의 알고리즘에 依한 컴퓨터發生 Lyapunov함수에 의하여 大規模 시스템의 安定度를 分割 및 合成法으로 구하였다. 연속시간 대규모 시스템의 경우, 各 自由 시스템의 安定領域과 全體 시스템의 안정영역을 구하였으며, 이산시간 시스템의 경우는 完全漸近安定度를 解析하여, 기존의 방법보다 개선된 결과를 얻었다.

參 考 文 獻

[1] R.K. Brayton and C.H. Tong, "Stability of dynamical systems: a constructive approach", *IEEE Trans.* on Circuits and Systems, vol. CAS-26, pp. 224-234, 1979.

[2] ______________, "Constructive stability and asymptotic stability of dynamical systems", *IEEE Trans. Circuits Systems,* vol. CAS-27, pp. 1121-1130, 1980.

[3] A.N. Michel, N.R. Sarabudla, and R.K. Miller, "Stability analysis of complex dynamical systems: some computational methods", *Cir. Syst. Signal Processing,* vol. 1, pp. 171-202, 1982.

[4] A.N. Michel and R.K. Miller, *Qualitative analysis of large scale dynamical systems.* N.Y.: Academic Press, 1977.

[5] A.N. Michel, R.K. Miller, and B.H. Nam, 'Stability analysis of interconnected systems using computer-generated Lyapunov functions", *IEEE Trans. on Circuits and Systems,* vol. CAS-29 no. 7, pp. 431-440, July. 1982.

[6] S. Weissen berger, "Stability regions of large scale systems", *Automatika,* vol. 9, pp. 653-663, 1973.

[7] Y.K. Chen and R. Schinzinger, "Lyapunov stability of multimachine power systems using decomposition and aggregation method", *Paper A-80-036-4, IEEE Winter PES Meeting,* New York, Feb. 1980.

[8] L.B. Jocic, M. Ribbens-Pavella, and D.D. Siljak, "Multimachine power systems: stability, decomposition, and aggregation", *IEEE Trans. Automat. Contr.,* vol. AC-23, no. 2, pp. 325-332, Apr. 1978.

[9] L.J.T. Grujic and D.D. Siljak, "Exponential stability of large scale discrete systems", *Int. J. Control,* vol. 19, no. 3, pp. 481-491, 1974.