

論 文

비트주파수 방식을 이용한
주파수 안정도 측정에 관한 연구

正會員 金 榮 範* 正會員 鄭 樂 三**

A Study on the measurement
of frequency stability using beat
frequency method

Young Bum KIM*, Nak Sam CHUNG** *Regular Members*

要 約 본 논문에서는 시간영역(time domain)에서 주파수안정도의 정밀정확한 측정방법중의 하나인 비트주파수방법을 이용한 주파수 안정도 측정시스템의 기본이론과 구성에 관한 사항을 다루었으며 실제 구성된 시스템의 특성을 조사하고 분석하였다.

ABSTRACT This paper describes the basic theory and construction of the frequency stability measurement system by beat frequency method, one kind of the accurate measurement technologies of frequency stability in time domain. The characteristics of the real system is also investigated.

I. 서 론

현대 생활을 통해 볼 때 통신, 항공, 항해 그리고 레이더를 비롯한 군장비 등 여러 분야에서 정밀 주파수 발진기의 필요성은 날로 높아가고 있다. 이에 따라 이들 각 분야를 만족시킬 수 있는

정밀 주파수 발진기의 개발과 이들을 정밀하게 측정할 수 있는 기술에 대해 현재 세계적으로 지속적인 연구가 이루어지고 있는 실정이다. 일반적으로 주파수 안정도를 측정하는 방법으로는 시간영역(time domain)과 주파수영역(frequency domain)에서의 측정방법이 있는데 이들은 어느 방법이 좋다고 말하기 보다는 상호 보완적으로 사용됨으로서 어떤 정밀 발진기의 특성을 보다 정확하게 나타낼 수 있다. 현재 시간영역에서의 주파수 측정방법중 정밀한 측정방법으로는 DMTD(Dual Mixer Time Difference)와 beat frequency 방법 그리고 tight phase lock 방법이 알려

*, **韓國標準研究所

Korea Standards Research Institute Taejón, 300-31
Korea.

論文番號 : 87-37(接受1987. 4. 8)

져 있다.

본 논문에서는 이들 방법 중에서 DMTD 방법에 비하여 측정 정밀도는 다소 떨어지나 시스템이 간단하고 측정하기에 용이한 beat frequency 방법을 이용한 주파수 안정도 측정 시스템을 제작하고 그 특성을 조사하였다.

II. 주파수 안정도

일반적으로 정현파 발진기의 잡음성분(noise component)을 조사하기 위해 출력전압을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$V(t) = V_p \sin[2\pi\nu(t)t] \\ = [V_0 + \epsilon(t)] \cdot \sin[2\pi\nu_0 t + \phi(t)] \quad (1)$$

여기서, V_p : 최대전압

V_0 : 명목 최대 전압진폭

$\epsilon(t)$: 명목으로부터 진폭의 벗어남

ν_0 : 명목 주파수

$\phi(t)$: 명목으로부터의 위상의 벗어남을 나타낸다.

그런데 정밀 발진기에 있어서 $\left| \frac{\epsilon(t)}{V_0} \right| \ll 1$ 이므로 전압변동은 무시하고 위상변동, $\phi(t)$ 의 특성을 조사하는 것이 곧 발진기의 특성을 알아내는 것이라 할 수 있다. 임의의 시간 t 에서 주파수, $\nu(t)$ 를 갖는 발진기가 명목주파수, ν_0 로부터 벗어나있는 정도를 상대 주파수 변동(relative frequency fluctuation), $y(t)$ 라 하는데 다음과 같이 정의된다^{(1), (2)}

$$y(t) = \frac{\nu(t) - \nu_0}{\nu_0} \\ = \frac{\dot{\phi}(t)}{2\pi\nu_0} \quad (2)$$

여기서 $\nu(t) - \nu_0 = \frac{\dot{\phi}(t)}{2\pi}$ 의 관계는 식(1)로부터 $2\pi\nu(t) = 2\pi\nu_0 t + \dot{\phi}(t)$ 를 시간에 대해 미분하여 얻어졌다. 이 $y(t)$ 는 무차원의 양이며 이것을 이용하여 발진기의 t 시간 동안의 시간변동을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(t) = \int_0^t y(t') dt' \quad (3)$$

주파수 측정시 어느 한 순간의 주파수를 측정하는 것은 불가능하고 항상 sample time (τ)이 필요하게 되며 이 sample time은 상대 주파수변동을 나타낼 때 중요한 요소로 작용된다. 따라서 어떤시간 t 에서 $t + \tau$ 까지의 평균 상대주파수변동(average relative frequency fluctuation), $\bar{y}(t, \tau)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{y}(t, \tau) = \frac{x(t + \tau) - x(t)}{\tau} \quad (4)$$

또한 식(2)를 이용하면 y_k 는 다음과 같다.

$$\bar{y}_k \equiv \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k + \tau} y(t) dt \quad (5)$$

$$= \frac{\phi(t_k + \tau) - \phi(t_k)}{2\pi\nu_0\tau}$$

여기서 $t_{k+1} = t_k + T$,

$k = 0, 1, 2, \dots$ 이고 T 는 측정 시간 τ 에 대한 측정주기이다. 그러면 시간영역에서의 주파수 안정도 측정을 위해 Allan에 의하여 정립된 Allan Variance는 다음과 같다^{(3), (4)}

$$\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle \equiv \left\langle \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{y}_k)^2 \right\rangle \quad (6)$$

여기서 N : data의 갯수

T : data의 측정주기

$\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle$; $\sigma_y^2(N, T, \tau)$ 무한시간 평균을 나타낸다. 그런데 일반적으로 발진기에서 $N \rightarrow \infty$ 일때 식(6)이 의미있는 극한값으로 수렴한다고 가정하기 어렵고 실제로 N 을 무한대로 증가시키기 조차 불가능하므로 $N = 2$, $T = \tau$ (측정값 사이에 불감시간(dead time, gate를 닫고 다시 열 때 측정할 수 없는 시간)이 없는 경우 일 때의 Allan Variance($\sigma_y^2(\tau)$)를 시간영역에서의 주파수 안정도로 정의할 것을 국제전기전자공학회 주파수 안정도 분과위원회에서 추천하였다^{(1), (5)} 즉,

$$\sigma_y^2(\tau) \equiv \langle \sigma_y^2(N=2, T=\tau, \tau) \rangle$$

III. 비트주파수법에 의한 주파수 안정도의 측정

비트주파수법은 헤테로라인 방식과 같으나 발진기의 출력주파수, $\nu(t)$ 가 명목주파수, ν_0 로부터 어느 방향으로 차이를 지니고 있는지를 쉽게 구별하기 위해 그림(1)에서 보는 바와 같이 주파수 혼합기의 출력이 임의의 비트주파수를 가지도록 기준주파수를 명목주파수 보다 크거나 작도록 입력시키면 저역통과필터를 거친 출력단에서 발진기 고유의 위상잡음을 포함하고 있는 비트주파수를 얻을 수 있다.

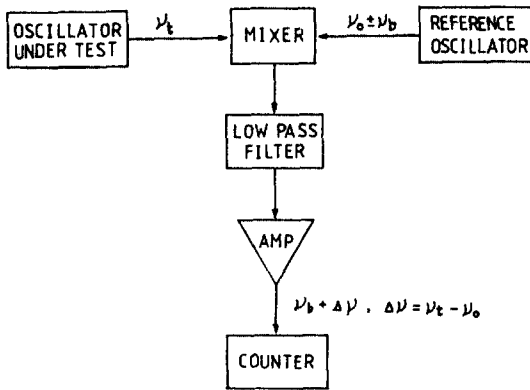


그림 1 비트주파수법의 개략도
Diagram of beat frequency method.

주파수 측정을 위해 일반적으로 전자계수기를 사용하고 있다. 그런데 전자계수기들은 원칙적으로 gate를 열고 닫음에 따라 생기는 gate error 다시 말해서 ± 1 count error를 지낼 수 있으므로 전자계수기의 이러한 오차를 줄이기 위해서 측정하고자 하는 주파수에 따라 전자계수기의 측정 모드(measurement mode)를 선택하여야 한다. 이러한 선택의 분기점이라 할 수 있는 주파수, f_c 는 다음과 같이 구할 수 있다.⁽⁶⁾

$$f_c = \sqrt{f_0} \quad (8)$$

여기서 f_0 는 전자계수기의 time base주파수이다. 따라서 측정하고자 하는 주파수가 f_c 보다 큰 경우는 주파수 측정모드, 작을 경우는 주기측정모드를 선택하여 사용한다. 따라서 본 실험을 위해 사용되고 있는 비트주파수는 100Hz의 낮은 주파수 이므로 주기측정모드를 사용하며 앞서 거론된 바 있는 dead time과 신호레벨을 적절히 선택하지 못함에 의한 trigger error 그리고 gate error의 효과 또한 줄이기 위해 M-주기측정(multiple period measurement)방식을 사용한다.⁽⁷⁾ 이와같은 방식에 의한 비트주파수의 파형은 그림(2)와 같으며 다음과 같은 과정을 통해 주파수 안정도를 측정할 수 있다.⁽⁸⁾

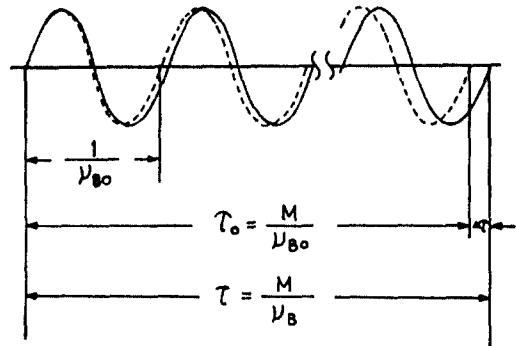


그림 2 M-주기측정
Multiple-period measurement.

비트주파수 신호를 전자계수기로 M주기 측정할 때 τ 초 평균주파수, ν_B 는 다음과 같다.

$$\nu_B = \frac{M}{\tau} \quad (9)$$

$$\Delta\tau = \tau - \tau_0 \quad (10)$$

$$\tau_0 = \frac{M}{\nu_{B0}} \quad (11)$$

식(10)으로부터

$$\frac{\tau_0}{\tau} = 1 - \frac{\Delta\tau}{\tau} \quad (12)$$

식(9)로부터

$$\nu_B = \frac{\tau_0 \cdot \nu_{B0}}{\tau}$$

만일 $\left| \frac{\Delta \tau}{\tau_0} \right| \ll 1$ 이라면

$$\nu_B \approx \nu_{B0} \left(1 - \frac{\Delta \tau}{\tau_0} \right) \quad (13)$$

따라서, τ 초 동안의 평균 상대주파수, \bar{y} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\nu_B - \nu_{B0}}{\nu_0} \\ &= - \frac{\nu_{B0} \cdot \Delta \tau}{\nu_0 \cdot \tau_0} \end{aligned} \quad (14)$$

식 (11)을 대입하면

$$\begin{aligned} \bar{y} &= - \frac{\nu_{B0}^2 \cdot \Delta \tau}{\nu_0 \cdot M} \\ &= - \frac{M \cdot \Delta \tau}{\nu_0 \cdot \tau_0^2} \end{aligned} \quad (15)$$

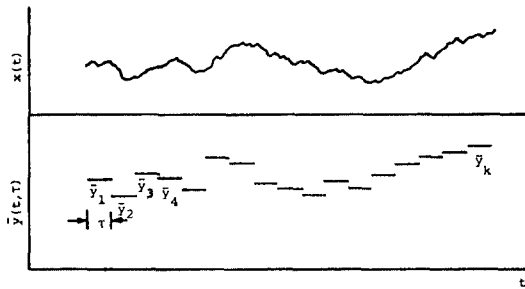


그림 3 시간변동의 시뮬레이션
A simulated plot of the time fluctuations.

또한 그림(3)에서 볼 수 있듯이 dead time을 무시할 때 식 (3)에서 거론된 일정기간동안의 시간 변동은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} X(i) &= \sum_{l=1}^k \bar{y}_i \cdot \tau_0 \\ &= - \frac{\nu_{B0}}{\nu_0} \sum_{l=1}^k \Delta \tau_l \end{aligned}$$

$$= - \frac{\nu_{B0}}{\nu_0} \sum_{l=1}^k (\tau_l - \tau_0) \quad (16)$$

비트주파수법을 사용하여 시간영역에서의 주파수 안정도를 측정하기 위해 식(7)을 $\Delta \tau$ 의 함수로 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_y(N, T, \tau) &= \frac{\nu_{B0}}{\nu_0} \cdot \frac{1}{\tau_0} \sigma_{\Delta \tau}(N, T, \tau) \\ &= \frac{\nu_{B0}^2}{\nu_0} \cdot \frac{1}{M} \sigma_{\Delta \tau}(N, T, \tau) \\ &= \frac{M}{\nu_0} \cdot \frac{1}{\tau_0^2} \sigma_{\Delta \tau}(N, T, \tau) \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 $\sigma_{\Delta \tau}^2(N, T, \tau)$ 를 구하기 위해 N개를 1개 조로하는 τ 초 측정을 k회 행할 때 각회에서 τ 의 분산 $\sigma_i^2 (i=1, 2, \dots, k)$ 의 산술평균을 취한다.

측정구간	측정치 (j=1, 2, ..., N)	평균치	분산
1	τ_{1j}	$\bar{\tau}_1$	σ_1^2
2	τ_{2j}	$\bar{\tau}_2$	σ_2^2
⋮	⋮	⋮	⋮
i	τ_{ij}	$\bar{\tau}_i$	σ_i^2
⋮	⋮	⋮	⋮
k	τ_{kj}	$\bar{\tau}_k$	σ_k^2

그러므로,

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_i &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \tau_{ij} \\ \sigma_i^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (\tau_{ij} - \bar{\tau}_i)^2 \\ \sigma_{\Delta \tau}^2(N, T, \tau) &= \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k \sigma_l^2 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_i^2(N=2, T=\tau, \tau) &= \sum_{j=1}^2 (\tau_{ij} - \frac{1}{2}(\tau_{i1} + \tau_{i2}))^2 \\ &= \frac{1}{2} (\tau_{i2} - \tau_{i1})^2 \end{aligned} \quad (19)$$

따라서 식 (18)을 식 (19)에 대입하면

$$\sigma_{\Delta \tau}^2(2, \tau, \tau) = \frac{1}{2k} \sum_{l=1}^k (\tau_{l2} - \tau_{l1})^2 \quad (20)$$

식 (20)에서는 τ 초 측정의 k pair (τ 초 측정치 총 수는 $2k$)에 대한 평균을 취하고 있으나 측정치 전체를 일괄하고 양단 이외의 측정치를 2 회씩 사용하면 $(2k-1)$ 개의 pair에 대한 평균이 되므로 data의 효율이 증대하게 된다. 따라서 전체를 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ 으로 하면

$$\sigma_{\Delta\tau}^2(2, T, \tau) = \frac{1}{2(m-1)} \sum_{k=1}^m (\tau_{k+1} - \tau_k)^2 \quad (21)$$

$$\sigma_y(2, T, \tau) = \frac{M}{\nu_0} \cdot \frac{1}{\tau_0^2} \cdot \left(\frac{1}{2(m-1)} \sum_{k=1}^m (\tau_{k+1} - \tau_k)^2 \right)^{1/2} \quad (22)$$

IV. 시스템 구성 및 특성조사

비트주파수 시스템은 그림(1)에서 보는바와 같이 두 신호를 혼합시키기 위한 double balanced mixer와 저역통과필터 이외에 zero crossing detector 등으로 구성되어 있다. 저역통과 필터의 출력 신호는 측정하고자하는 발진기의 위상 잡음을 포함하고 있는데 이들을 정확히 측정하기 위하여 비트신호의 파형을 zero crossing detector를 통해 날카롭게 뒤따르고 있는 미분회로와 isolation transformer를 사용하여 그림(4)에서 보는 바와같이 $t_r \approx 20ns$ 의 날카로운 pulse를 만들었다.

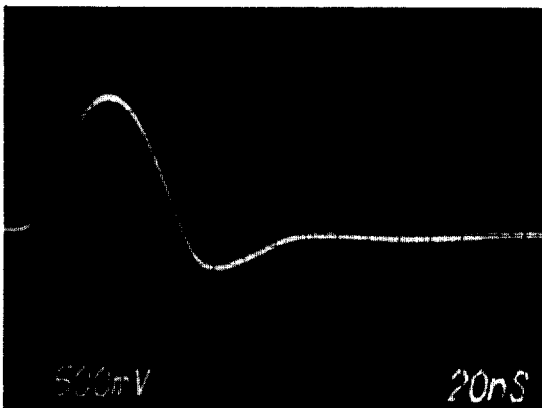


그림 4 출력신호의 파형
Waveform of the system output.

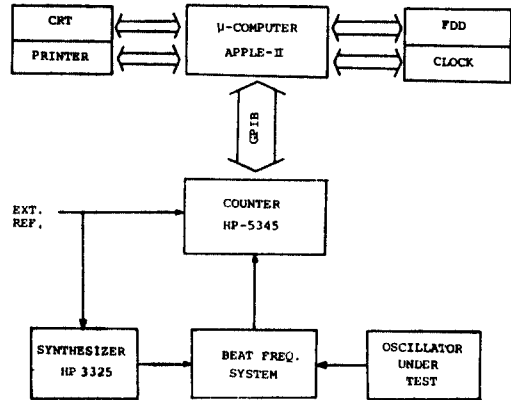


그림 5 비트주파수측정시스템의 전체구성도
Block diagram of the overall system..

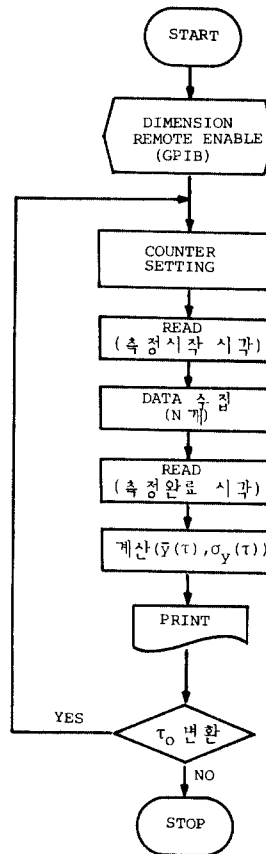


그림 6 주파수자동측정을 위한 프로그램의 전체흐름도
Flow chart of the automatic measurement program

이 신호의 level은 약 1.2V 이므로 counter 입력신호 level을 낮로 하여 잡음성분의 level을 낮추고 될 수 있는 한 counter가 높은 level에서 trigger 되도록 level point를 조절하면 시스템 자체에서 생길 수 있는 미세한 잡음을 피해 더욱더 정확한 측정을 할 수 있다.

본 실험을 위해 synthesizer (HP-3225A)와 counter (HP-5345A) 그리고 μ -computer (Apple-II)를 사용하였으며 그림(5)에서 보는 바와 같은 자동측정을 하기 위하여 그림(6)과 같이 controller로 사용된 μ -computer (Apple-II)가 GPIB cable로 연결된 counter를 제어하고 data를 수집하여 계산하도록 프로그램을 완성하였다.

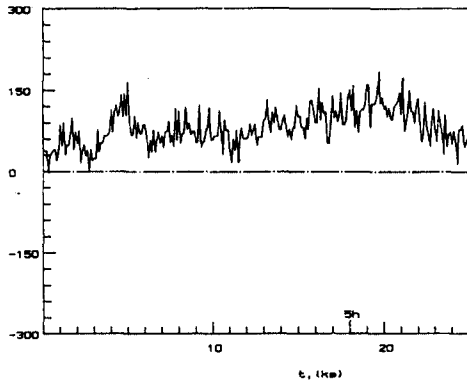


그림 7 비트주파수시스템의 자체위상잡음
Measurement phase noise of the beat frequency system.

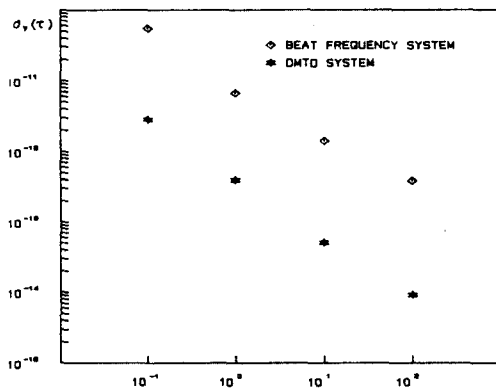


그림 8 비트주파수시스템과 DMTD 시스템의 sample time에 대한 시스템불안정도의 비교
Comparison results of instability versus sample time of the beat frequency system and DMTD system.

본 시스템의 자체잡음을 측정하기 위하여 세슘 원자 주파수표준기 (HP-5061A)의 5MHz를 그림(5)의 EXT. REF.와 oscillator under test로 사용하였다. 그 결과 식(16)에 의하여 얻어진 시스템의 위상잡음은 그림(7)과 같으며 sample time을 0.1 ~ 100초까지 변화시킴에 따른 $\sigma_y(\tau)$ 는 그림(8)에 나타나 있다.

그림(9)는 실험에 의해 알려져 있는 잡음의 모델을 타나낸 것이다.⁽²⁾ 그런데 그림(8)을 통해 볼때 본 시스템은 잡음성 전자회로에 의하여 일반적으로 나타나고 있는 white phase noise 또는 flicker phase noise가 주를 이루고 있음을 알 수 있다. 따라서 저잡음의 부품을 사용함으로써 이리

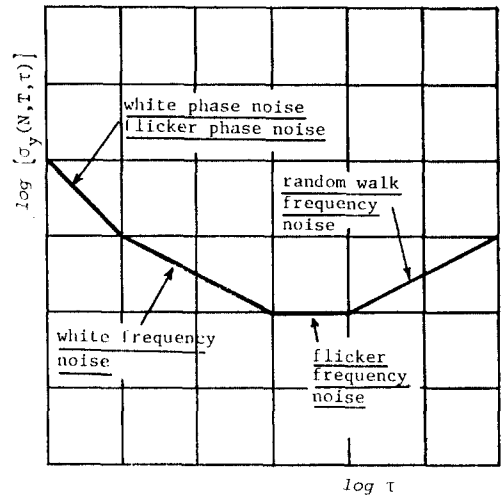


그림 9 시간영역에서의 주파수안정도에 관한 잡음모델
Noise model of time domain frequency stability.

한 noise는 다소 줄어들 것이다. 그림(10)은 현재 표준연구소에서 유지하고 있는 세슘원자시계 중에서 서로다른 2개의 원자시계 사이의 stability와 relative frequency를 각각 측정한 결과이다.

일반적인 1주기 측정법에 의해 어떤 주파수원을 측정할 때 측정하고자 하는 입력신호 주파수에 의해 gate time이 결정된다. 즉, 본 실험과 같이 비트주파수를 100Hz로 할 경우 gate time은 0.01초가 되므로 sample time이 1초 이라면 100개의 주기측정 data각각을 더해야 한다. 그러나

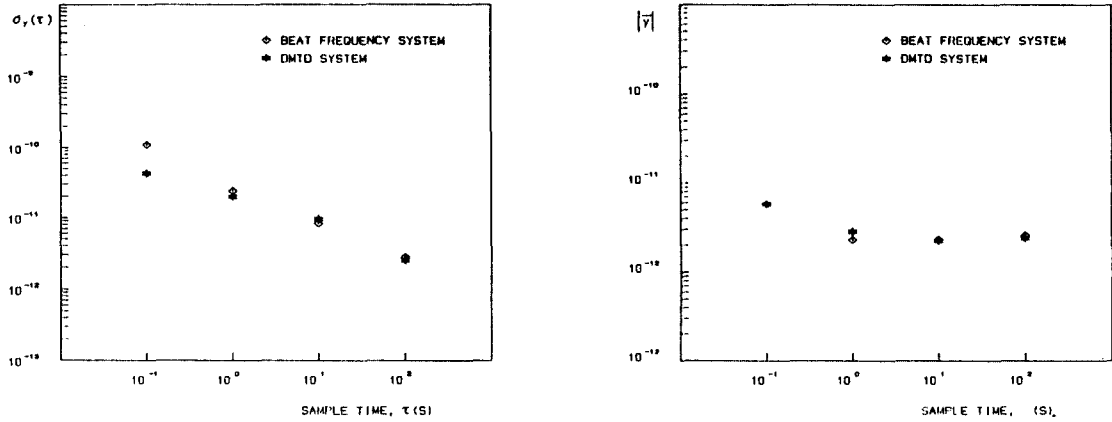


그림10 비트주파수시스템과 DMTD 시스템을 각각 사용하여 2개의 상용세슘원자시계간의 a) 주파수 안정도와 b) 상대주파수를 측정비교한 결과

Comparison results of a) frequency stability and b) relative frequency of two commercial cesium frequency standards using the beat frequency system and DMTD

M-주기 측정법의 경우 100주기만큼 gate time 을 확장하여 단 1번의 측정으로 1주기 측정법에 의한 각 data를 다 포함하기 때문에 gate error를 비롯한 다른 error들이 적게 나타난다.

표(1)은 루비듐 주파수표준기를 M-주기 측정법과 일반적인 1주기 측정법을 각각 사용하여 측정한 결과이다. 비트주파수를 100Hz로 할 경우 일반적인 1주기 측정법을 사용하면 0.01초 마다 data를 얻게되나 이들을 수집하기 위한 GPIB의 data 처리시간이 이보다 길어서 실험을 위해 비트주파수를 10Hz로 하고 sample time을 0.1초, 1초로 변화시킴에 따라 표(1)과 같은 결과를 얻었다. 표(1)에 의하면 sample time이 길어짐(일정한 비트주파수에 대해 M이 증가함)에 따라 1주기 측정법보다 더욱 정밀정확하게 측정할수 있음을 알 수 있다. 그리고 본 비트주파수 시스템

표 1 일반적인 주기측정법과 M-주기측정법 간의 주파수안정도 및 상대주파수 비교

Comparison of frequency stability and relative frequency between normal period measurement and Multiple period measurement.

Sample time, τ (s)		0.1	1
$\sigma_y(\tau)$	M-주기측정법	6×10^{-11}	2×10^{-11}
	1 주기측정법	6×10^{-11}	1×10^{-10}
y	M-주기측정법	3×10^{-10}	2×10^{-10}
	1 주기측정법	3×10^{-10}	2×10^{-9}

은 입력신호로서 약 20 mvp-p 이상의 정현파 신호를 사용할 때 200MHz 까지 주파수 측정이 가능함을 실험을 통해 알았다.

V. 결 론

시간영역에서 발진기의 주파수 안정도를 간단 하면서 정밀, 정확하게 측정하고자 컴퓨터를 이용한 비트주파수 자동측정 시스템을 제작하였다. 시스템 잡음이 그림 (8)에서 보는 바와 같이 $\sigma_y(\tau) \approx 5 \times 10^{-11} \sim 4 \times 10^{-11}$, $10^{-1}s \leq \tau \leq 10^2s$ 이므로 정밀 수정발진기를 비롯하여 루비듐주파수 표준기등의 주파수 안정도를 측정할 수 있다. 본 시스템을 이용한 측정 정밀도는 그림 (10)에서 보는 바와같이 DMTD시스템(9),(10)에 의한 측정과 sample time 1초~100초 사이에서 거의 비슷한 정도를 지니면서도 시스템이 간단하여 제작 및 측정이 매우 용이하다.

감사의 글

본문을 위해 도와주신 한국표준연구소의 송양섭, 이동두 연구원에게 감사드립니다.

參 考 文 獻

(1) D. W. Allan, "The measurement of frequency and frequency stability of precision oscillator," NBS T. N. 669.

May 1975.

- (2) D. A. Howe, "Frequency down stability measurements : A tutorial introduction," NBS T. N. 679, Mar. 1976.
- (3) J. A. Barnes et al., "Characterization of frequency stability," NBS T. N. 394, Oct. 1970.
- (4) L. Cutler and C. Searle, "Some aspects of the theory and measurement of frequency fluctuations in frequency standards," Proc. IEEE, vol. 54, pp. 136-154, Feb. 1966.
- (5) D. W. Allan, J. H. Shoaf and Donald Halford, "Statistics of time and frequency data analysis," Chapter 8 of NBS Monograph 140, pp. 151-204, May 1974.
- (6) William David Cooper, "Electronic Instrumentation and Measurement Techniques," New Jersey, Prentice-Hall, 1978, pp. 393-394.
- (7) George Kamas, Sandra L. Hown, "Time and Frequency User's Manual," NBS sp-559, Colorado, NBS, 1979, pp. 33-47.
- (8) 周波數精密測定回路專門委員會, "周波數安定度とその測定," 日本電氣學會技術報告, (II 部) 第41號, pp. 78-89, Feb. 1976.
- (9) 송양섭, 김진옥, '정낙삼, "시간영역 주파수 안정도 측정을 위한 DMTD 시스템의 제작 및 특성조사," 새물리, vol. 23, Num. 4, pp. 405-411, Dec. 1983.
- (10) 정낙삼, 김진옥, 송양섭, 김영범, 안준석, "주파수 안정도 측정의 자동화," 한국표준연구원, KSRI-IR-58, pp. 265-291, Mar. 1984.



金榮範(Young Bum KIM) 正會員
 1954年 8月13日生
 1982年 2月: 忠南大學校工科學 電子工學科 卒業(工學士)
 1982年 7月~現在: 韓國標準研究所 研究員
 1986年 1月~1986年12月: 獨逸聯邦物理技術廳(PTB)에 연수과견(세슘原子時計 製作에 關한 研究)

1986年 3月~現在: 忠南大學校 電子工學科 碩士過程



鄭樂三(Nak Sam CHUNG) 正會員
 1939年 4月22日生
 1960~1967: 서울大學校 文理大 物理學科 學士
 1968~1973: 美國Purdue大學校 物理學碩士, 博士
 1973年 5月~1976年 7月: Purdue 大學校 研究院
 1976年 7月~現在: 韓國標準研究所責任研究員