◆ 講　　座 ◆

흙의 構成式 解說 (Ⅳ)

朴　炳　基*
鄭　鎭　燮**
李　汶　樹***

3.3 Cap Model

1) 槪　　要

흙의 連續的인 降伏槪念을 基本으로 한 Weidlinger group에 의해 開發된 이 model은 不飽和土나 岩盤의 擧動을 model화 하는데 가장 適合한 可能性을 지닌 것으로 評價되고 있다. 이 model은 Drucker-Prager의 破壞包絡線과 全塑性體積變形率에 따라 달라지고 應力空間에서 膨脹될 수 있는 硬化降伏面으로 構成된다.[3]

2) 固定降伏面

極限强度만을 나타내는 降伏面을 固定降伏面이라고 하며 初期段階 즉 낮은 靜水壓軸應力水準에서는 Drucker Prager[4]의 破壞規準과 一致하지만 높은 應力水準에서는 von-Mises 面으로 漸近하여 이어진다.

이를 數式으로 表現하면 다음과 같다.

$$f_{DP}=\sqrt{J_{2D}}-\alpha J_1-k_1=0 \qquad (3.47)$$

$$f_{VM}=\sqrt{J_{2D}}-k_2=0 \qquad (3.48)$$

여기서 降伏函數 f의 첨자 DP 및 VM은 各各 Drucker-Prager와 von Mises의 破壞規準에 의한 降伏面을 의미한다.

또 J_1은 第一應力不變量이고, J_{2D}는 第二軸差應力不變量이며, 常數, k_1과 k_2는 粘着力의 强度成分이고 α項은 흙의 內部摩擦角과 直接關係되는 係數이며 Drucker-Prager 破壞面의 圓錐角을 나타낸다. 또한 Dimaggio와 Sandler는 固定降伏面을 다음과 같이 表現하였다.

$$f_f=\sqrt{J_{2D}}+re^{-\beta J_1}-\alpha=0 \qquad (3.49)$$

여기서 α, β, γ는 土質實驗을 통하여 決定해야 하는 材料의 parameter이다.

이에 대하여 Desai 等은 J_1이 큰값에서는 von Mises 規準대신 第2의 Drucker-Prager 規準을 使用하여 Fig. 3.4와 같이 修正降伏面에 관한 數學的表現을 다음式으로 提案했다.

$$f_f=\sqrt{J_{2D}}+\gamma\cdot e^{-\beta J_1}-\theta J_1-\alpha=0 \qquad (3.50)$$

여기서 θ는 修正 Drucker-Prager 面의 傾斜角을 나타내는 材料의 parameter이다(Fig. 3.4 參照)

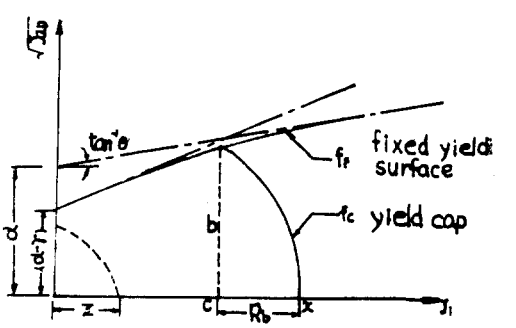

Fig. 3.4 Schematic diagram of cap model

* 正會員, 全南大學校 工科大學 敎授
** 正會員, 圓光大學校 工科大學 副敎授
*** 正會員, 全南大學校 農科大學 副敎授

3) 移動降伏面

移動降伏面(yield cap)은 塑性體積變形率의 狀態點을 連結한 線分으로서 다음과 같이 陰函數로 나타낸다.

$$f_c(J_1, \sqrt{J_{2D}}, k) \qquad (3.51)$$

여기서 k는 變形率履歷을 나타내는 것으로 一般的으로 塑性體積變形率, $\epsilon_v^p = \varepsilon_{ii}^p = \frac{J_1}{3}$으로 대신한다. 한편 Dimaggio와 Sandler는 粘着力이 없는 降伏面을 Fig. 3.4와 같이 表現되는 楕圓形의 cap을 使用하여 다음과 같이 나타냈다.

$$f_c = R^2 J_{2D} + (J_1 - C)^2 - R^2 b^2 = 0 \qquad (3.52)$$

여기서 c는 固定降伏面과 移動降伏面이 交叉하는 點에서의 J_1값이다. R은 楕圓의 長軸에 대한 短軸의 比이며, b는 $J_1 = C$일때의 $\sqrt{J_{2D}}$ 값이다. 等方應力狀態에서의 X와 C는 다음과 같은 관계가 있다. (Fig. 3.4 參照)

$$X = C + R(\alpha + \theta J_1 + re^{-\beta J_1}) \qquad (3.53)$$

等方壓縮을 받고 있는 材料의 體積應力變形率擧動에서 때로 使用하는 硬化法則은 다음과 같다.

$$\epsilon_v^p = W(1 - e^{-DX}) \qquad (3.54)$$

여기서 D와 W는 材料의 parameter이다. W는 어떤 初期條件에 相關되는 等方壓縮試驗에서 求할 수 있는 最大의 體積塑性變形率測度(measure of plastic strain)를 의미한다. X로 表記된 等方壓縮應力이 增加하면 材料가 密實하게 되며 理論的으로 極限狀態는 空隙이 더 以上 存在하지 않는 條件이다.[2]

4) 材料常數의 決定

最小 9個의 常數가 이 model에는 必要하다.[1] 이들 값은 在來의 三軸壓縮, 等方壓縮試驗의 資料를 使用하여 求한다. 一軸變形率試驗이나 K_0-試驗은 반드시 必要한 것은 아니지만 이들 試驗結果를 追加하게 되면 體積係數나 剪斷係數等을 計算하는데 精度를 크게 높일 수 있다.

5) 長點과 短點

이 model을 利用하게 되면 砂質土나 岩石과 같은 不飽和의 경우에는 그 擧動을 잘 豫測할 수 있지만 間線水壓을 計算할 수 없으므로 粘土層의 壓密現象에는 適用할 수 없다는 限界性이 있다.

3.4 Prevost model

1) 槪　要

飽和粘土의 非排水擧動으로 부터 모래의 排水擧動에 이르기까지 흙의 擧動을 잘 說明할 수 있는 一連의 彈塑性等方硬化 model이 Prevost에 의하여 開發되었다. 最近의 硏究는 Biot의 壓密理論과 관련하여 排水條件에서의 應力一變形率强度에 관한 擧動을 豫測하는데까지 이르고 있다. 이 model에서의 降伏面은 크기가 變하는 동안에 應力空間에서 移動이 許用된다. 增分應力狀態와 관련된 變形率速度는 特別한 降伏面의 移動과 크기의 變化에 따라 決定된다. 이 理論은 순간증분에 대한 應力增加는 應力一變形率에서 뿐만 아니라 應力空間에서도 直線을 따른다고 假定하고 있다.

이러한 특성은 電算過程에서 計算遂行과 同時에 理論方程式을 간략화하는 利點이 있다. 즉 一連의 區間線型應力增分이 應力徑路를 이루게 된다.

最近에 발표한 model에서는 塑性係數場(nesting surfaces) 理論을 제안하여 塑性剪斷 및 體積係數 그리고 dilatancy parameter를 使用하여 精度를 높이고 있다. 應力徑路上의 각 단계와 관련된 材料常數를 塑性硬化係數場에 의하여 記述할 수 있다는 점은 注目할만한 제안이다. 이는 應力徑路를 smooth하게 하고 材料變數를 새로 만들기 위해서 充分한 數의 nesting surface를 포함시키면 精巧한 推定이 可能하다는 것을 의미하기 때문이다.[5]

2) 解析的考察

初期 model에서는 載荷가 非排水條件에서 일어나기 때문에 粘土의 降伏은 부과된 八面體垂直全應力(imposed octahedral normal total stress)과는 무관하다. 따라서 軸差應力만이 一般化된 降伏函數에 나타난다. 粘土의 等方排水擧動은 지금까지 von Mises의 規準에 의해서 만족스럽게 model化 되어 왔으므로 이 規準을 이 model의 中心內容으로 삼고 있다. 또한 이 model의 특성인 非等方性과 徑路依存性을 더욱 강조하기 위하여 약간의 修正을 加했다. 展開曲面(evolving surface)의 특정단계(m)에서 이와 관계되

는 降伏條件은 다음과 같은 形態로 나타난다.[3]

$$=\left[\frac{3}{2}(S_{ij}-\alpha_{ij}^{(m)})(S_{ij}-\alpha_{ij}^{(m)})\right]-[k^{(m)}]^2$$
$$=0 \qquad (3.55)$$

여기서 常數 $\alpha_{ij}^{(m)}$은 過去의 載荷 및 除荷結果에 따른 材料履歷의 特性을 나타낸다. 그리고 이는 八面體平面에 투영될 때 圓으로 나타나는 現在의 降伏面 f_m의 中心座標를 나타낸다. $k^{(m)}$은 靜水壓軸에 平行한 軸의 應力空間에서 直交圓筒形으로 나타나는 降伏面의 크기 또는 半徑으로 표현된다.

그런데 이 model은 軸差應力의 項으로 서술되기 때문에 極限强度面(이 面을 넘어서는 應力狀態가 存在하지 않음)의 一部인 가장 外部의 境界降伏面을 導入하는 便이 現實的이다. 이 새로운 model을 數學的으로 表現하는데는 區間別로 展開되는 面을 다음과 같은 式으로 나타낸다.

$$f_m=3/2[S_{ij}-\alpha_{ij}^{(m)}][S_{ij}-\alpha_{ij}^{(m)}]$$
$$+C^2[P-B^{(m)}]^2-[k^{(m)}]^2=0 \qquad (3.56)$$

여기서 P는 平均有效應力이며, $B^{(m)}$은 P軸을 따르는 m번째 降伏面의 中心座標이다. 式(3.56)에서 얻어지는 降伏面은 初期等方性材料에 대한 等方應力軸과 같은 最大主軸을 지닌 回轉楕圓體이다. Fig. 3.5에 이들 降伏面에 대한 一般的인 說明을 나타낸다. 여기에는 三軸引張뿐 아니라 三軸壓縮領域에서의 定義도 함께 나타낸다. 平均有效應力軸에 대하여 새로운 parameter $C\cdot P$를 導入하므로서 model의 表現을 쉽게 할 수 있다. 여기서 C는 降伏面軸比(yield surface axis ratio)인데 이 면적개념을 利用하여 어려운 楕圓形 대신에 圓形으로 나타낸다. (b그림) 載荷時의 初期位置(f_0)로 부터 應力點의 移動은 塑性係數場개념으로 확대되어 간다. 이 塑性係數場은 應力空間에서 降伏面, $f_0, f_1, f_2 \cdots\cdots f_m, f_{m+1} \cdots f_p$의 集合으로 定義되는데 여기서 f_p는 境界面이며 各降伏面의 크기가 $k^{(0)}<k^{(1)}<k^{(2)}\cdots<k^{(p)}$의 順序이며 中心의 位置가 $\alpha_{ij}^{(0)}, \alpha_{ij}^{(1)}, \alpha_{ij}^{(2)} \cdots \alpha_{ij}^{(p)}$이다(Fig. 3.5 및 3.6 參照).

降伏面은 交叉되지 않으며 포옹하고 있다. 따라서 降伏面은 應力點에 의해서 移動하고 一定條件아래서는 共通接線面에서 서로 밀어내고 있는 것처럼 새로운 위치로 옮겨지는데 이러한 條

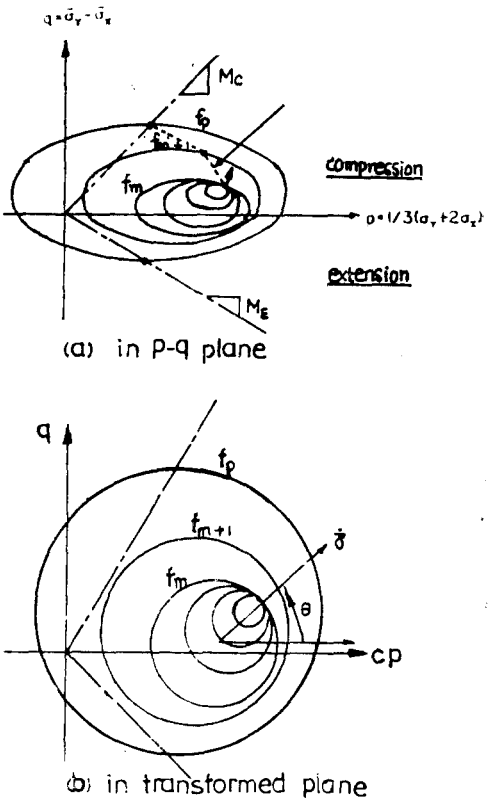

Fig. 3.5 Nesting yield surfaces in Prevost's model generalized to three-dimensional loading.

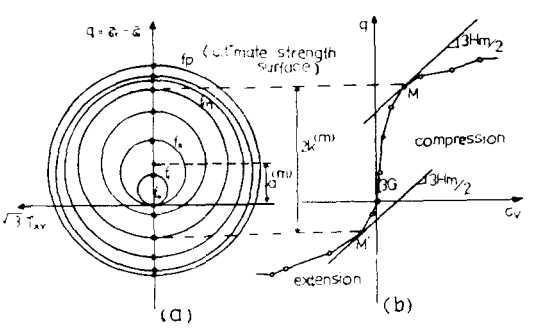

Fig. 3.6 Nesting surfaces in Prevost's model obtained from triaxial testing.

件아래에서의 幾何學的特性을 나타내는 式은 다음과 같다.

$$\frac{S_{ij}-\alpha_{ij}^{(0)}}{k^{(0)}}=\frac{S_{ij}-\alpha_{ij}^{(1)}}{k^{(1)}}=\cdots=\frac{S_{ij}-\alpha_{ij}^{(p)}}{k^{(p)}} \qquad (3.57)$$

載荷中에 軸差應力增分 vector가 現在의 降伏

面, f_m의 外向으로 향하는 경우에는 全體積變形率增分은 다음과 같이 表現된다.

$$de_{ij}=de_{ij}^{e}+de_{ij}^{p} \tag{3.58 a}$$

$$de_{ij}=\frac{ds_{ij}}{2G}+\frac{3}{H_m'}\frac{s_{ij}-\alpha_{ij}^{(m)}}{[k^{(m)}]^2}(s_{kl}-\alpha_{kl}^{(m)})ds_{kl} \tag{3.58 b}$$

式(3.58)은 流動則을 나타낸다. G는 彈性變形率을 規定하는 彈性剪斷係數이며 降伏面 f_m에 대한 塑性變形率係數 H_m'과 關聯流動則이 塑性變形率을 記述하기 위하여 使用된다. 그러므로 降伏面 f_m과 관련된 彈塑性剪斷係數는 다음式으로 表現할 수가 있다.

$$\frac{1}{H_m}=\frac{1}{2G}+\frac{1}{H_m'} \tag{3.59}$$

H_m'는 바깥降伏面에서만 0이거나 陰數가 된다고 한다. 한편, 어떤常數 λ를 定義하여 λ가 $k^{(m)}$과 H_m'의 特性을 記述하기 위하여 使用된다. 이 λ는 除荷時는 물론 載荷中에도 單調增加하게 되며 다음 式과 같이 塑性軸差變形率經路의 길이로 나타낸다.

$$\lambda=\int\{2/3\ de_{ij}^{p}\ de_{ij}^{p}\}^{1/2} \tag{3.60}$$

應力에 예민한 model解析에서도 $k^{(m)}$과 H_m'을 說明하기 위하여 다음과 같은 函數를 使用한다.

$$\varepsilon_{ii}^{p}=\int d\varepsilon_{ii}^{p} \tag{3.61}$$

ε_{ii}^{p}는 直接的으로 體積硬化特性을 反映한다.

한편 除荷의 경우 應力增分 vector는 現在의 降伏面에서 안쪽으로 향한다. 이때 f_m과 관련된 塑性係數 H_m'는 無限大가 되어야 하며, 따라서 除荷의 가장 最初의 段階에서 初期에는 彈性擧動만이 일어나게 된다. 反轉降伏, 즉, 應力增分이 增加했다가 減少되는 상태에서는 塑性增分理論내에서 軸差應力의 增分을 다음과 같이 軸差全變形率增分으로 記述한다.

$$ds_{ij}=[2G-3/2(2G-H_m)\frac{s_{ij}-\alpha_{ij}^{(m)}}{[k^{(m)}]^2}[s_{kl}-\alpha_{kl}^{(m)}]d\varepsilon_{kl} \tag{3.62}$$

윗식은 재료가 硬化하는 경우 그 硬化는 降伏面의 位置座標, $\alpha_{ij}^{(m)}$의 변화로 나타난다. 만일 降伏面 f_m과 관련된 應力點이 降伏面 f_{m+1}로 移動하면 載荷面(nesting yield surface)의 移動은 다음式에 의하여 座標의 增分 또는 變化 $d\alpha_{ij}^{(m)}$으로 나타난다.

$$d\alpha_{ij}^{(m)}=\left[d\mu\left(\frac{k^{(m+1)}-k^{(m)}}{k^{(m)}}\right)s_{ij}-\left(\frac{\alpha_{ij}^{(m)}k^{(m+1)}-\alpha_{ij}^{(m+1)}k^{(m)}}{k^{(m)}}\right)\right] \tag{3.63}$$

여기서 scalar $k^{(m)}$과 $k^{(m+1)}$은 各各 降伏面 f_m과 f_{m+1}의 순간의 크기를 나타낸다.

이와같이 tensor, $\alpha_{ij}^{(m)}$과 $\alpha_{ij}^{(m+1)}$은 軸差應力軸에 따라 움직이는 移動降伏面의 位置를 나타낸다. 이들 常數는 式(3.60) 및 (3.61)에 定義된 λ의 一定한 값과 관련된다. 常數 $d\mu$는 適合條件 $df=0$에서 求한다. 한편 $df=0$은 載荷中에 應力點이 降伏面에서 벗어날 수 없다는 것을 의미하며 다음과 같이 表現된다.

$$d\mu=\frac{\frac{3}{2}H_m(s_{ij}-\alpha_{ij}^{(m)})de_{ij}-k^{(m)}dk^{(m)}}{k^{(m+1)}k^{(m)}-\frac{3}{2}(s_{ij}-\alpha_{ij}^{(m+1)})(s_{ij}-\alpha_{ij}^{(m)})} \tag{3.64}$$

여기서, ds_{ij}는 다음과 같다.

$$ds_{ij}=H_m de_{ij} \tag{3.65}$$

이상과 같은 數學的表現을 통해 Prevost model의 특성은 다음과 같이 요약되고 있다.

i) 等方硬化와 軟化則에 의한 model.

이 경우에는 降伏面은 移動하지 않으며 載荷가 進行함에 따라 降伏面은 共通中心을 유지하면서 크기가 增加한다.

ii) 移動硬化와 軟化則에 의한 model.

이와같은 model에서는 降伏面은 그 크기가 變하지 않으나 應力點의 差異에 따라 應力空間에서 移動한다.

iii) 壓力에 銳敏하지 않은 土質에 있어서의 等方硬化 및 等方軟化의 合成 model.

이 model은 주로 非排水粘性擧動을 再現할 目的으로 이용되고 있으며 降伏面의 크기가 變하고, 同時에 그 應力點에 따라 移動한다.

이 model에 관한 數式이 式 (3.57)~(3.65)이다.

iv) 應力에 銳敏한 土質에 있어서의 等方硬化 및 等方軟化의 合成 model.

이 model은 Prevost model의 가장 普編的인 應用性을 보인다. 降伏面은 式(3.56)이 表現되고 많은 model變數와 常數가 體積變形率 혹은

平均有效應力과 함께 變한다.

3) 長點과 短點

이 model을 利用하여 最近에는 排水擧動을 解析하고 있지만 一般的으로 이 model은 非排水狀態에서 正當하다고 評價되고 있다. 이 model에서는 關聯塑性流動則이 全降伏面에서 일어난다고 假定하고 있으며 이는 가끔 實驗的으로 立證되고 있는 假定이다. 그러나 실은 model의 內部에 包含된 降伏面에서는 非關聯流動則을 利用하고 있으며 極限强度나 境界面上에서 關聯流動則이 導入되고 있다.

이 model은 載荷條件에서도 豫測에 必要한 材料의 情報를 간단한 試驗에서 求하여 해석한다. 이 model은 回轉하고 있는 主應力場의 影響도 說明할 수가 있으며 이와같이 精巧한 model이 在來의 方法에 의한 實驗資料를 入力하여 實效를 거둘수 있을지는 오로지 實驗資料 여하에 달려있다. 이 model을 완벽히 구사하기 위해서는 보다 정밀하고 복잡한 應力徑路試驗이 必要하다. 應力으로 誘導된 非等方性의 說明과 彈塑性非等方性에 관한 간편하고도 가장 완벽한 說明을 이 model을 통해서 可能해질 것으로 기대하는 학자도 많다.

현재 Prevost 교수는 이 문제를 위해 연구에 몰두하고 있다.

3.5 各種構成式의 比較

土質의 應力一變形率關係가 基本이 되는 構成model에 관하여 包括的으로 說明하여 왔다. 물론 여기에는 代表的인 彈性 model中의 하나인 雙曲線應力一變形率 model(Kondner, Duncan, Chang 等이 開發)이나 彈塑性의 Lade model 等을 包含하고자 意圖하였으나 紙面關係上 다음機會로 미루기로 하였다. 또한 endochronic 理論도 70年代 初半부터 Bazant, Cuellar, Ansal[6] 等에 의하여 꾸준히 硏究가 進行中이지만 필자들의 능력밖의 이론으로서 本文에서는 槪要說明에 그친것을 아쉽게 생각한다. 끝으로 注目할만한 事實은 大部分의 model이 實驗實에서 決定한 土質 parameter를 入力資料로 使用하고 있는데 아무리 數學的으로 精巧한 model이라 할지라도 parameter 決定에 있어서 그 精度가 이에 따르지 못하면 좋은 結果를 얻을 수 없다는 점이다. 따라서 實驗室에서의 精巧한 實驗資料의 確保가 다시 한번 强調되어진다. Table 1에서는 主要構成 model과 그 解析能力에 대한 要約을 本文에서 言及하지 않는 model을 包含하여 나타낸다.

* 豫告 : 다음에 이어지는 本講座 5回에서는 Cam-clay model, cap-model 및 Sekiguchi의 彈·粘塑性 model 等을 使用한 數値解析例의 解說이 主內容이 된다.

參 考 文 獻

1. Ko, H.Y. and Sture, S. Laboratory Shear Strength of Soil, American Society for testing and materials, STP 740, pp. 329~385, 1980.
2. Desai, C.S. and Siriwardane, H.J., Constitutive laws for engineering materials, Prentice-Hall, pp. 136~168, 1984.
3. 朴炳基, 鄭鎭燮, 李汶樹, 姜秉宜, 梁炳貫, Cap model을 利用한 基礎地盤의 數値解析(Ⅰ), 大韓土質工學會誌 Vol. 3, No. 1, pp. 65~75, 1987.
4. Drucker, D.C. and Prager, W., Soil Mechanics and Plastic analysis or limit design, Quart. Appl. Math., Vol. 10, No. 2, pp. 157~165, 1652.
5. Prevost, J.H., Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, No. GT 8, Aug., pp. 1075~1090, 1978.
6. Consolidated Clays, Report 77-12164311, Department of Civil Engineering, Northwestern University, Evanston, Ⅲ., Dec. 1977.

Table 1 Summary of constitutive models and their capabilities.

Model	Type	No. of Constants	Minimum Number of Tests Needed for Model Constant Description	Are the Constants Easy to Measure?	Do the Constants Have Physical Significance?	Has the Model Been Implemented or Used in Numerical Analysis Schemes?	Does the Model Account for the Variation of the Intermediate Principal Stress?	Does the Model Include Features Related to Strain-Softening Behavior?	What Type of Flow Rule is Used?	Is Pore-Water Pressure an Inherent Component in the Model	Are "History" Effects Included?
Hyperbolic (Duncan-Chang)	deformation theory	3	3 conventional triaxial compression tests at different σ_3	in general. yes. curve fitting procedures well defined	yes	yes. often quoted in literature	no	no	N.A.[a]	no	no
Drucker-Prager	elastic-perfectly plastic (isotropic)	4	2 conventional triaxial compression tests at different σ_3	yes	yes	yes	no	no	associated	no	no
Cam-Clay	elastic-hardening plastic (isotropic)	6	1 isotropic consolidation and swelling test. i conventional triaxial compression test	yes. location of CSL is involved	yes	yes	no	yes	associated	no	in general. no
Cap (Weidlinger)	elastic-hardening plaslic (isotropic)	8	1 isotropic compression test with at least I unloading-reloading cycle. 3 conventional triaxial compression tests at different σ_3	in general. no	in general. yes	yes. dynamic shock wave propagation	in general. no	in general. no	associated	no	in general. no
Lade	elastic-hardening plastic (isotropic)	14	3 conventional triaxial compression tests at different σ_3	in general. no. although procedures well defined	yes	yes	yes	yes	associated/ nonassociated	no	in general no. no anisotropic hardenng included
Prevost	elastic-hardening plastic (isotropic)	more than 4	1 triaxial compression and 1 triaxial extension test	yes. hardening function difficult to evaluate	in general. yes	yes	no	yes	associated/ nonassociated	no	yes
Endochronic	incremental plasticity without a yield surface	18	requirements go up according to desired accuracy	no	in general. no	yes	in general. no	yes	N.A.	no	yes. anisotropic hardening features partially included

[a]N.A. = not applicable.