

# 杭打應力 推定

Prediction of Driving Stresses in Piles

秦 柄 益\*

Jin, Byung-Ik

黃 正 奎\*\*

Hwang, Jung-Kyu

---

## Abstract

The prediction of driving stresses in piles is necessary for optimum selection of driving hammers, better design of precast piles, exact assessment of drivabilities and complete description of piling specifications.

However, the existing pile-driving formulas based on the theory of Newtonian impact have some defects and shortcomings; the numerical method by the wave equation analysis using electronic computer usually involves various uncertainties and limitations which can yield erroneous outcomes because it employs soil constants of which the nature is unknown as essential parameters and ignores the effect of residual stresses set up in the pile after each hammer blow; and the electronic measuring technique needs extra time and expense.

The method developed herein is presented for the purpose of giving field engineers a reliable and convenient analytical procedure for the prediction of driving stresses along the full length of pile using the most effective parameters without resort to electronic computer. This method is based on the fundamental mechanics of stress waves in elastic rods and takes into account the effect of residual stresses induced by reversed friction in piles.

## 要 旨

杭打應力の推定은 말뚝박기 해머의 選定, 기성말뚝의 設計, 말뚝박기 可能性의 판단 및 말뚝박기 示方書의 작성에 필요 불가결하다.

그러나, 현재 사용되고 있는 Newton의 衝擊理論에 의한 杭打公式들은 土質이나 해머의 용량에 따라 나뉘데로 결함을 갖고 있으며, 波動方程式에 의하여 해석된 數值解析法은 대형컴퓨터를 사용하여야 하고 몇가지의 土質定數를 가정에 의하여 入力하는 것과 말뚝을 打擊할 때마다 누적되는 殘留應力을 고려하지 않는 등의 이유로 即時推定에는 制約이 따르고 誤差가 누적되는 결과를 초래할 수 있으며, 또 한편, 計器에 의하여 杭打應力을 實測하는 것은 많은 費用과 時間이 소요된다.

그러므로, 本 研究에서는 杭打應力을 波動理論 및 말뚝의 殘留應力에 의하여 杭打應力에 가장 크

---

\* 正會員, 漢陽大學校 工科大學 教授

\*\* 正會員, 弘益大學校 工科大學 助教授

계 영향을 미치는 變數들을 고려하여 解析하므로써 대형컴퓨터를 사용할 수 없는 현장에서 말뚝의 全長에 걸쳐 杭打應力을 推定할 수 있는 簡便한 算出式을 제시하고, 이의 信賴性을 考察하였다.

## 1. 序 論

근래, 말뚝基礎가 점차 널리 이용되는 주요한 이유는 構造物의 규모가 대형화 되는 것과 때를 같이하여 PC 말뚝의 대량생산과 鋼材의 공급이 원활하게 됨에 따라 치수가 크고 高强度인 말뚝의 제작이 가능하게 되었고 이러한 대형 말뚝을 굳은 地層에 쉽게 박을 수 있는 말뚝박기 해머가 개발되었다는 데 있다.

이에 따라, 杭打應力의 정확한 추정은 기성 말뚝의 設計, 말뚝박기 해머의 選定, 말뚝박기 可能性의 판단 및 말뚝박기 示方書의 작성에 결정적인 정보를 제공한다. 그러나, 현재 杭打應力을 추정하기 위하여 사용되고 있는 방법은 Glanville 등 (1935)<sup>1)</sup>이 도출한 에너지 平衡式과 Nanninga (1953)<sup>2)</sup>의 波動方程式에 의한 杭打應力式이 있으나 양자 모두 말뚝머리의 應力을 추정할 수 있을 뿐이며, 근래 Smith (1962)<sup>3)</sup>에 의하여 개발된 컴퓨터를 이용한 數值解析方法은 말뚝박기에서 일어나는 현상을 彈性棒에 대한 波動理論으로 解析하므로써 해머—말뚝—흙의 복잡한 상호작용을 잘 설명해 주고 있는 반면 몇 가지의 土質定數를 가정하므로써 오차가 누적되는 경우에는 뜻하지 않는 결과를 가져올 수 있으며, 대형 컴퓨터의 터미널이 없는 현장의 즉시 추정에는 어려움이 있다.

이러한 배경에서 本研究는 杭打應力을 말뚝의 全長에 걸쳐 簡便하게 추정하기 위하여 波動理論과 말뚝의 殘留應力에 의하여 유도된 새로운 杭打應力式을 제안하고 이를 考察하였다.

## 2. 波動方程式의 應用

均質, 等斷面의 彈性棒에 衝擊波가 전파될 때의 波動方程式<sup>10)</sup>은 式 (2.1)과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ c &= \sqrt{\frac{E}{\rho}} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

여기서,  $u$ : 탄성봉의 충격면에서  $x$ 의 거리에 위치한 단면의 軸方向變位,  $t$ : 시간간격,  $c$ : 波의 전파속도,  $E$ : 彈性棒의 彈性係數,  $\rho$ : 탄성봉의 質量密度이다. 그리고 이때에 단면에 작용하는 應力을  $\sigma$ 라고 하면 그 단면의 質點速度  $v$ 는 式 (2.2)와 같다.

$$v = \frac{\sigma}{\sqrt{E \cdot \rho}} \quad (2.2)$$

말뚝박기에서 Fig. 2.1과 같이 램이 타격을 가하면 그 충격은 쿠션을 지나면서 완화되어 말뚝머리에 전달된다. 이 과정에서 먼저, 램 및 쿠션을 각각 균질, 등단면의 탄성체로 가정하고 램이 쿠션을 타격하면 그 충격면에서 壓縮應力波가 서로 반대 방향으로 각자의 전파속도로 진행하며 램과 쿠션은 應力波가 전파되는 동안에는 서로 분리되지 않으므로<sup>10)</sup> 두 요소의 初期의 質點速度는 서로 같으며,  $\Delta t$  시간동안에 일어나는 두 요소의 運動量의 변화는 서로 같아야 하므로 式 (2.3)을 얻을 수 있다. 같은 방법으로 쿠션과 말뚝머리의 충격면에서는 式 (2.4)를 얻는다.

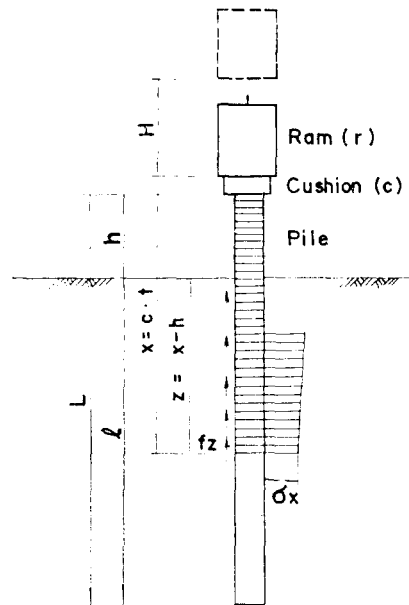


Fig. 2.1. Stress Wave Propagation in a Pile during Driving

$$\rho_r \cdot A_r \cdot c_r \cdot \Delta t (v_r - v_{c0}) = \rho_c \cdot A_c \cdot c_c \cdot \Delta t (v_{c0}) \quad (2.3)$$

$$\rho_c \cdot A_c \cdot c_c \cdot \Delta t (v_{c1} - v_0) = \rho \cdot A \cdot c \cdot \Delta t (v_0) \quad (2.4)$$

여기서,  $\rho_r, A_r, c_r$  : 각각 램의 密度, 斷面積 및 波動傳播速度,  $\rho_c, A_c, c_c$  : 각각 쿠션의 밀도, 단면적 및 파동전파속도,  $\rho, A, c$  : 각각 말뚝의 밀도, 단면적 및 파동 전파속도,  $\Delta t$  : 微小時間간격,  $v_r$  : 램의 타격속도,  $v_{c0}$  : 램이 쿠션머리에 타격을 가하였을 시각의 쿠션머리의 質點速度,  $v_{c1}$  : 應力波의 前端이 쿠션끝을 통과하는 시각의 쿠션끝의 質點速度,  $v_0$  : 쿠션끝이 말뚝머리에 타격을 가하였을 시각의 말뚝머리의 質點速度이다.

한편, 壓縮應力波가 下向으로 전파할 때에 쿠션의 머리와 쿠션끝에서는 運動量保存則이 성립되므로 그 결과 式 (2.5)를 얻을 수 있다.

$$W_r \cdot v_{c0} = (W_r + W_c) \cdot v_{c1} \quad (2.5)$$

여기서,  $W_r$  : 램의 무게,  $W_c$  : 쿠션의 무게이다.

그 다음, 말뚝머리를 통과한 應力波는 계속하여 말뚝끝을 향하여 진행하여 Fig. 2.1에서 보는 바와 같이 말뚝머리에서 應力波前端까지의 모든 단면을 차례로 압축하면서 下向運動을 하고, 말뚝머리에서  $t$ 시간이 경과한 후의 應力波는 말뚝自體의 質量 및 地中に 관입된 부분의 周面摩擦力의 저항등으로 應力이 차츰 감소되므로 式 (2.2)에 따라 그 質點速度는 점차 감소된다. 따라서, 應力波前端이 말뚝머리를 통과한 시각  $t=0$  때의 運動量은 運動量 保存則에 의하여  $t=x/c$  시간후의 운동량 및 그 시간동안의 力積의 합계와 같아야 하므로 式 (2.6)을 얻을 수 있다.

$$\frac{v_0}{g} (W_r + W_c) = \left\{ \frac{1}{g} (W_r + W_c) + \int_0^{x/c} \rho \cdot A \cdot c \cdot dt \right\} v_x + (\text{말뚝周面の 波動減衰抵抗力에 의한 } x/c \text{ 시간동안의 力積}) \quad (2.6)$$

여기서,  $v_x$ 는 말뚝머리에서  $x$ 의 거리에 있는 말뚝단면의 質點速度이며,  $v_0$ 는 式 (2.3)을 式 (2.5)에 대입하고 다시 式 (2.5)를 式 (2.4)에 대입하므로써 式 (2.7)을 얻으며,

$$v_0 = \frac{W_r}{W_r + W_c} \cdot \frac{v_r}{\left(1 + \frac{\rho_c \cdot A_c \cdot c_c}{\rho_r \cdot A_r \cdot c_r}\right) \left(1 + \frac{\rho \cdot A \cdot c}{\rho_c \cdot A_c \cdot c_c}\right)} \quad (2.7)$$

따라서 式 (2.6)은 式 (2.8)로 고쳐 쓸수 있다.

$$\frac{W_r \cdot v_r}{g \cdot \left(1 + \frac{\rho_c \cdot A_c \cdot c_c}{\rho_r \cdot A_r \cdot c_r}\right) \left(1 + \frac{\rho \cdot A \cdot c}{\rho_c \cdot A_c \cdot c_c}\right)} = \left\{ \frac{1}{g} (W_r + W_c) + \int_0^{x/c} \rho \cdot A \cdot c \cdot dt \right\} \cdot v_x + (\text{말뚝周面の 波動減衰抵抗力에 의한 } x/c \text{ 시간동안의 力積}) \quad (2.8)$$

### 3. 殘留應力

말뚝머리에서 하향으로 전파되는 應力波가 말뚝의 각단면을 차례로 압축하면서 下向運動을 일으키면 地中に 관입된 말뚝의 周面은 地반토의 摩擦抵抗力을 받게되며, 일단 압축된 말뚝은 원형대로 上·下方向으로 伸長하려고 한다. 그러나 이때에 또다시 말뚝은 周面摩擦力 및 先端支持力으로 인하여 伸장은 억제되고 말뚝의 내부에는 壓縮應力이 殘留하게 된다. 이것을 말뚝의 殘留應力이라 하며, 말뚝이 타격될때마다 누적된다.

이러한 상태에서, 應力波가 말뚝을 통과하면 누적된 殘留應力은 周面摩擦力과 함께 波動에너지를 減衰시키는 抵抗力으로 작용하므로 동일한 조건에서 말뚝의 殘留應力에 대한 고려여부는 말뚝의 杭打支持力 및 杭打應力の 解析에 주요한 영향을 미친다. 그러나 최근에 이르기까지 말뚝의 殘留應力은 무시되어 왔으나 Holloway(1975)<sup>13)</sup>, Sandhu(1982)<sup>20)</sup>, Briaud(1984)<sup>22)</sup> 등이 그 중요성을 인식하게 되었지만 아직 말뚝의 設計 및 杭打解析에 적용되기에는 미흡한 단계이다.

지금까지 말뚝의 殘留應力은 載荷試驗에서 실측에 의하여 추정하여 왔으며, 아직 그 값을 산출하는 방법은 알려져 있지 않고 있으나 筆者(1986)<sup>23)</sup>가 일차 試圖한 바 있어 이를 요약하면 다음과 같다.

말뚝의 주면에 작용하는 摩擦력을 等分布(粘着性土의 경우) 및 三角分布(非粘着性土의 경우)로 나누고, 先端支持力比를 0, 25, 50, 75, 100%로 區分하여 생각하며, 殘留應力の 크기는 地表面에서 관입깊이가 증가함에 따라 周面摩擦抵抗力과 같이 증가하다가, 下部の 摩擦抵抗力 및 先端支持力の 합계가 上부의 摩擦抵抗力과 평형울

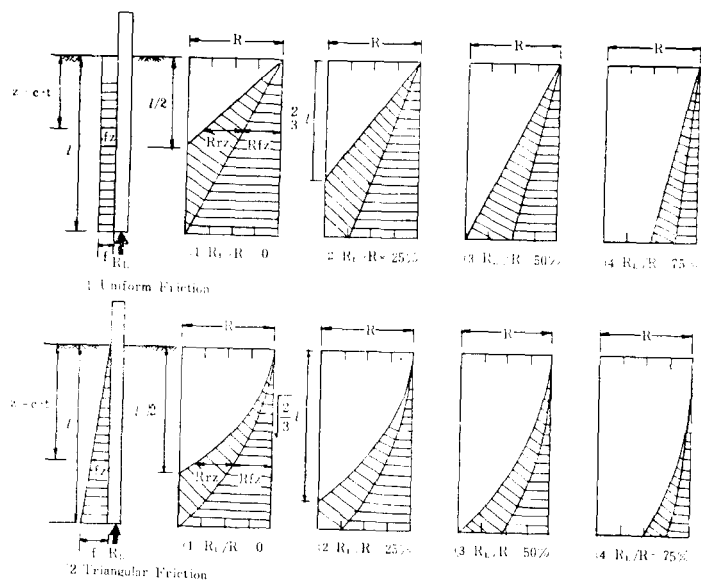


Fig. 3.1. Distribution of Frictional Resistance plus Residual Resistance in a Pile during Driving

Table 3.1. Impulse of Time Interval of  $z/c$

Distribution of Friction	Percentage of Tip Resistance $R_L/R$ (%)	Boundary of $z$	Total Resistance of Skin Damping, $R_{fz} + R_{rz}$	Impulse of Time Interval of $z/c$ , $\phi_z \cdot l \cdot R/c$	
Uniform (Cohesive Soils)	0	$\frac{l}{2} \geq z \geq 0$	$2 \left( \frac{c \cdot t}{l} \right) \cdot R$	$\left( \frac{z^2}{l} \right) \cdot \frac{R}{c}$	
		$l \geq z \geq \frac{l}{2}$	$R$	$\left( z - \frac{l}{4} \right) \cdot \frac{R}{c}$	
	25	$\frac{2}{3}l \geq z \geq 0$	$\frac{3}{2} \left( \frac{c \cdot t}{l} \right) \cdot R$	$\frac{3}{4} \left( \frac{z^2}{l} \right) \cdot \frac{R}{c}$	
		$l \geq z \geq \frac{2}{3}l$	$R$	$\left( z - \frac{l}{3} \right) \cdot \frac{R}{c}$	
	50	$l \geq z \geq 0$	$\left( \frac{c \cdot t}{l} \right) \cdot R$	$\frac{1}{2} \left( \frac{z^2}{l} \right) \cdot \frac{R}{c}$	
	75	$l \geq z \geq 0$	$\frac{1}{2} \left( \frac{c \cdot t}{l} \right) \cdot R$	$\frac{1}{4} \left( \frac{z^2}{l} \right) \cdot \frac{R}{c}$	
	Triangular (Cohesionless Soils)	0	$\frac{l}{\sqrt{2}} \geq z \geq 0$	$2 \left( \frac{c \cdot t}{l} \right)^2 \cdot R$	$\frac{2}{3} \left( \frac{z^3}{l^2} \right) \cdot \frac{R}{c}$
			$l \geq z \geq \frac{l}{\sqrt{2}}$	$R$	$\left( z - \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{R}{c}$
25		$\sqrt{\frac{2}{3}}l \geq z \geq 0$	$\frac{3}{2} \left( \frac{c \cdot t}{l} \right)^2 \cdot R$	$\frac{1}{2} \left( \frac{z^3}{l^2} \right) \cdot \frac{R}{c}$	
		$l \geq z \geq \sqrt{\frac{2}{3}}l$	$R$	$\left( z - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}l \right) \cdot \frac{R}{c}$	
50		$l \geq z \geq 0$	$\left( \frac{c \cdot t}{l} \right)^2 \cdot R$	$\frac{1}{3} \left( \frac{z^3}{l^2} \right) \cdot \frac{R}{c}$	
75		$l \geq z \geq 0$	$\frac{1}{2} \left( \frac{c \cdot t}{l} \right)^2 \cdot R$	$\frac{1}{6} \left( \frac{z^3}{l^2} \right) \cdot \frac{R}{c}$	

이루는 점에서 殘留應力은 최대가 되며, 이 平衡點의 下部에서는 下部摩擦抵抗力 및 先端支持力의 크기에 해당하는 값으로 殘留應力이 감소하고, 말뚝끝에서는 先端支持力의 크기와 일치하는 값을 갖는다.

이상의 과정에서 계산된 말뚝의 地中貫入部分의 周面摩擦抵抗力の 크기와 殘留應力에 의한 저항력의 크기의 합계를 圖示하던 Fig. 3.1과 같다. 여기서, 先端支持力比가 100%인 경우에는 摩擦力 및 이로부터인 殘留應力이 모두 없으므로 생략하였다.

Fig. 3.1에서,  $z$ : 地表面에서의 관입깊이,  $l$ : 말뚝의 관입깊이,  $f$ : 말뚝끝의 단위길이당 摩擦力,  $f_z$ :  $z$ 점의 단위길이당 摩擦力,  $R$ : 말뚝의 極限支持力,  $R_L$ : 말뚝의 先端支持力,  $R_{fz}$ :  $z$ 단면의 周面摩擦抵抗力,  $R_{rz}$ :  $z$ 단면의 殘留應力에 의한 抵抗力이다.

따라서, 式 (2·8)의 右邊 제 2항의 “말뚝주면의 波動減衰抵抗력에 의한  $x/c$  시간동안의 力積”에서 말뚝주면의 波動減衰抵抗력이라 함은  $R_{fz} + R_{rz}$ 에 해당되며, 이는 말뚝의 관입부분에만 작용하므로  $x/c$  시간동안 力積은  $z/c$  시간동안의 이들 合計抵抗力的 力積이 된다. 그러므로 Fig. 3.1에서  $R_{fz} + R_{rz}$ 를 계산하여 이에 따른  $z/c$  시간동안의 力積을 산출하면 Tab. 3.1과 같다.

Tab. 3.1의 計算과정을 예시하기 위하여 三角分布摩擦力的 地表面에 관입된 先端支持力比  $R_L/R=25\%$ 인 말뚝에 대하여  $z/c$  시간동안의 力積을 산출해 보면 다음과 같다.

Fig. 3.1, (2)에서  $f_z=(c \cdot t/l)f$ 이며, 先端支持力比  $R_L/R=25\%$ 에서  $f \cdot l/2=3R/4$ 이므로  $f=3R/2l$ 이고, 區間  $\sqrt{2/3}l \geq z \geq 0$ 의 合計抵抗력  $R_{fz} + R_{rz}$ 는  $\int_0^{z/c} 2f_z \cdot c \cdot dt$ 이므로 式 (3·1)을 얻으며,

$$R_{fz} + R_{rz} = \frac{3}{2} \left( \frac{c \cdot t}{l} \right)^2 \cdot R \quad (3.1)$$

다시 式 (3·1)를  $t=0$ 에서  $t=z/c$ 까지 積分하면 이 시간 동안의 力積이 되므로 式 (3·2)를 얻을 수 있다.

$$\int_0^{z/c} (R_{fz} + R_{rz}) \cdot dt = \frac{1}{2} \left( \frac{z^3}{l^2} \right) \cdot \frac{R}{c} \quad (3.2)$$

또한, 區間  $l \geq z \geq \sqrt{2/3}l$ 에서는, Fig. 3.1,

(2), ②에서 合計抵抗력  $R_{fz} + R_{rz}$ 는  $R$ 이므로<sup>23)</sup>  $z/c$  시간동안의 力積은 式 (3·3)과 같다.

$$\int_0^{\sqrt{2/3}l/c} \frac{3}{2} \left( \frac{c \cdot t}{l} \right)^2 \cdot R \cdot dt + \int_{\sqrt{2/3}l/c}^{z/c} R \cdot dt = \left( z - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} l \right) \cdot \frac{R}{c} \quad (3.3)$$

#### 4. 杭打應力 解析

말뚝박기에서 해머가 타격을 가할때의 運動에너지는 해머의 有效에너지와 같으므로 式 (4·1)을 얻는다.

$$\frac{W_r}{2g} \cdot v_r^2 = e_f \cdot E_n \quad (4.1)$$

여기서,  $e_f$ : 해머의 效率,  $E_n$ : 해머의 定格에너지로서 해머의 機種에 따라 式 (4·2)와 같은 값을 갖는다.

$$\left. \begin{aligned} E_n &= W_r \cdot H && \text{(드롭해머 또는 單動해머)} \\ E_n &= (W_r + p \cdot A_r) \cdot H && \text{(複動 또는 差動해머)} \\ E_n &= 2W_r \cdot H && \text{(디젤 해머)} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

式 (4·2)에서,  $H$ : 램의 낙하높이,  $p$ : 蒸氣 또는 空氣의 壓力,  $A_r$ : 해머실린더의 단면적이다.

해머의 타격으로 발생된 應力波는 쿠션을 거쳐 말뚝을 따라 下向으로 전파되면서 차례로 말뚝단면의 質點을 下向으로 壓縮하고, 이때에 말뚝머리에서  $x$ 의 거리에 있는 말뚝단면의 質點速度는 應力波의 응력이 말뚝자체의 質量, 말뚝의 주면마찰력 및 말뚝의 殘留應力 등으로 減衰되는 결과 式 (2·2)에 의하여 式 (4·3)을 얻을 수 있다.

$$v_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{E \cdot \rho}} \quad (4.3)$$

여기서,  $\sigma_x$ : 말뚝머리에서  $x$ 의 거리에 있는 말뚝단면의 응력,  $E$ : 말뚝의 탄성계수이다.

한편, “말뚝주면의 波動減衰抵抗력에 의한  $x/c$  시간동안의 力積”은 Tab. 3.1에서 보는바와 같이  $R/c$ ,  $l$  및  $z$ 의 함수이며,  $z$ 는  $l$ 의 倍數로 표시될 수 있으므로 式 (4·4)와 같이 표시할 수 있다.

$$\left( \text{말뚝주면의 波動減衰抵抗력에 의한 } x/c \text{ 시간 동안의 力積} \right) = \phi_z \cdot l \cdot \frac{R}{c} \quad (4.4)$$

여기서,  $\phi_z$ : 無次元의 係數이며, 地中깊이  $z$ 에 대하여 Tab. 3.1에서 계산된 값이다.

따라서, 式 (4.1), (4.3), (4.4)를 式 (2.8)에 대입하여 정리하면 式 (4.5)를 얻을 수 있다.

$$\sigma_x = \left\{ \frac{\sqrt{2 e_f \cdot E_n \cdot W_r \cdot E \cdot \gamma}}{\left(1 + \frac{A_c}{A_r} \sqrt{\frac{E_c \cdot \gamma_c}{E_r \cdot \gamma_r}}\right) \left(1 + \frac{A}{A_c} \sqrt{\frac{E \cdot \gamma}{E_c \cdot \gamma_c}}\right)} - \phi_z \cdot l \cdot R \cdot \gamma \right\} \frac{1}{W_r + W \cdot \frac{x}{L}} \quad (4.5)$$

여기서,  $E_r$  및  $E_c$ : 각각 램 및 쿠션의 탄성계수,  $\gamma_r, \gamma_c$  및  $\gamma$ : 각각 램, 쿠션 및 말뚝의 단위 중량,  $W$ : 말뚝의 무게,  $L$ : 말뚝의 길이이며, 쿠션의 무게  $W_c$ 는 램의 무게 또는 말뚝의 무게와 비교할 때 무시할 수 있을 정도의 작은 값이므로 이를 제외하였다.

만약, 쿠션이 없는 경우는 이상과 같은 방법으로 式 (4.6)을 얻을 수 있다.

$$\sigma_x = \left\{ \frac{\sqrt{2 e_f \cdot E_n \cdot W_r \cdot E \cdot \gamma}}{\left(1 + \frac{A}{A_r} \sqrt{\frac{E \cdot \gamma}{E_r \cdot \gamma_r}}\right)} - \phi_z \cdot l \cdot R \cdot \gamma \right\} \frac{1}{W_r + W \cdot \frac{x}{L}} \quad (4.6)$$

계산의 편의를 위하여 實用的인 해머 等級 범 위내에서 말뚝의 재료에 따라  $\sqrt{2 e_f \cdot E_n \cdot W_r \cdot E \cdot \gamma}$ 의 값을 圖示하면 Fig. 4.1과 같고, Tab. 3.1에 따라  $z$ 에 대한  $\phi_z$  係數의 값을 圖示하면 Fig. 4.2와 같다.

그리고, 말뚝머리의 杭打應力  $\sigma_0$ 는 式 (4.5)에서  $x=0$ , Tab. 3.1에서  $z=0$ 이므로 式 (4.7)과 같이 표시되며, 말뚝끝은  $x=L, z=l$ 이므로 式 (4.8)과 같이 표시된다.

$$\sigma_0 = \frac{\sqrt{2 e_f \cdot E_n \cdot W_r \cdot E \cdot \gamma}}{\left(W_r \cdot \left(1 + \frac{A_c}{A_r} \sqrt{\frac{E_c \cdot \gamma_c}{E_r \cdot \gamma_r}}\right) \left(1 + \frac{A}{A_c} \sqrt{\frac{E \cdot \gamma}{E_c \cdot \gamma_c}}\right)\right)} \quad (4.7)$$

$$\sigma_L = \left\{ \frac{\sqrt{2 e_f \cdot E_n \cdot W_r \cdot E \cdot \gamma}}{\left(1 + \frac{A_c}{A_r} \sqrt{\frac{E_c \cdot \gamma_c}{E_r \cdot \gamma_r}}\right) \left(1 + \frac{A}{A_c} \sqrt{\frac{E \cdot \gamma}{E_c \cdot \gamma_c}}\right)} - \phi_{(z=l)} \cdot l \cdot R \cdot \gamma \right\} \frac{1}{W_r + W} \quad (4.8)$$

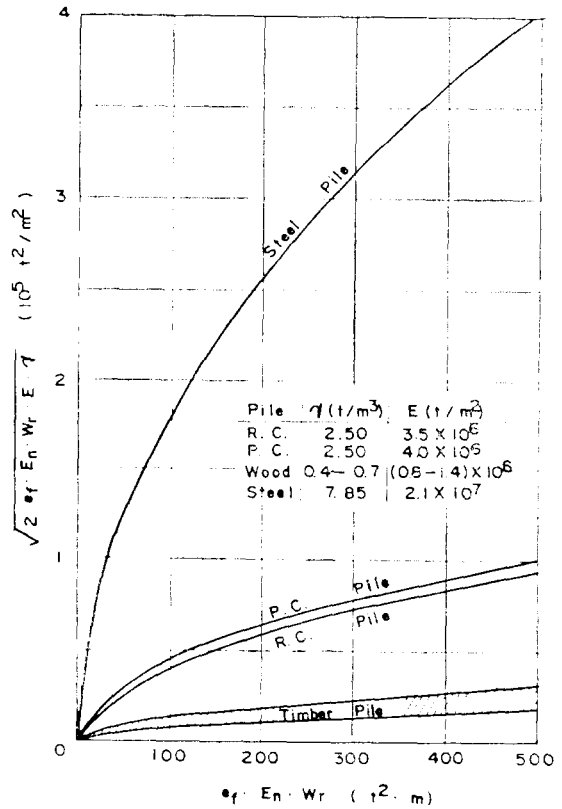


Fig. 4.1. Relationship between  $\sqrt{2 e_f \cdot E_n \cdot W_r \cdot E \cdot \gamma}$  and  $e_f \cdot E_n \cdot W_r$

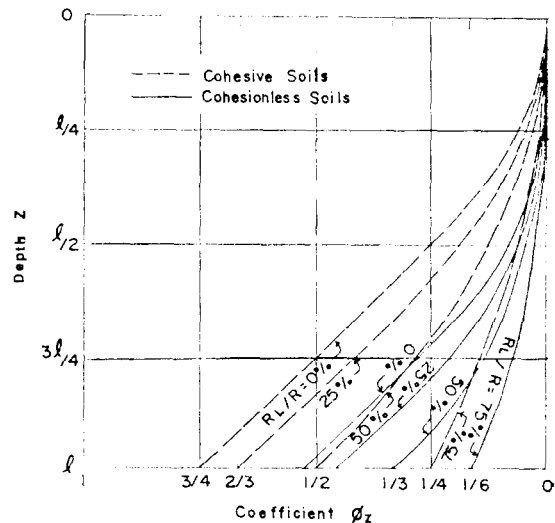


Fig. 4.2. Relationship between  $\phi_z$  and  $z$

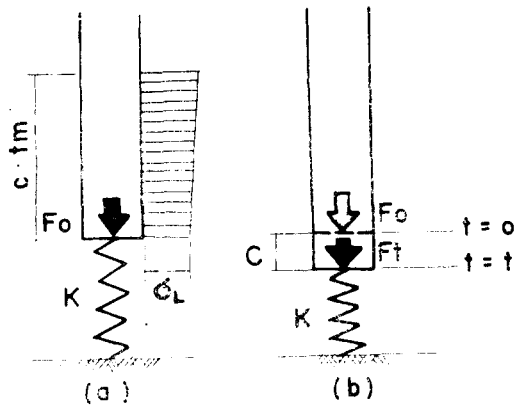


Fig. 5.1. Elastic Displacement of Pile Tip during Driving

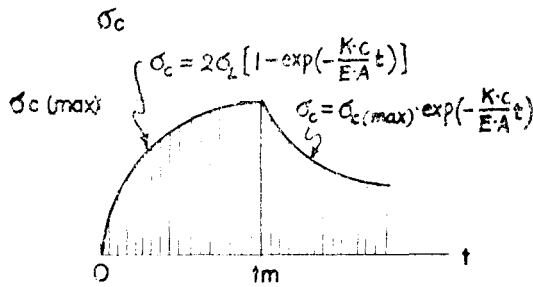


Fig. 5.2. Driving Stress of Pile Tip

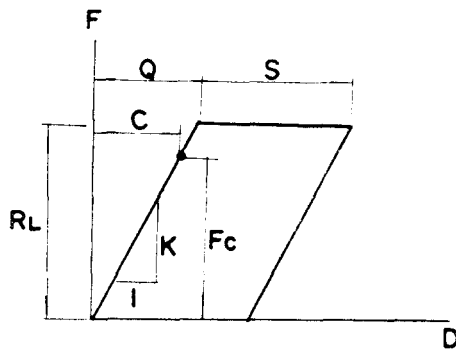


Fig. 5.3. Elasto-plastic Deformation of Soils

## 5. 말뚝끝의 應力

해머의 타격으로 인한 壓縮應力波의 前端이 말뚝끝에 도달하였을 때에 말뚝끝의 質點은 下向

으로 變位를 일으키며, 이때의 말뚝끝의 應力은 式 (4.8)에서 결정되는 값  $\sigma_L$  대신에 地盤土의 抵抗에 따라 應力의 값이 결정된다.

지금, Fig. 5.1에서 보는바와 같이 말뚝끝에 도달한 壓縮應力波로 인하여  $F$ 의 힘으로 말뚝끝이  $dt$  시간동안에 下向으로 變位한 量은 Hook의 法則에 따라  $F \cdot c \cdot dt / E \cdot A$ 이며, 한편 말뚝끝의 變位量은 地盤土의 彈性壓縮變形量  $dC$  만큼만 가능할 것이므로 式 (5.1)과 같이 된다.

$$dC = - \frac{F \cdot c \cdot dt}{E \cdot A} \quad (5.1)$$

그러므로, 地盤土의 스프링常數를  $K$ 라하면, 말뚝끝의 變位로 인하여 地盤土에 작용한 힘은 式 (5.2)로 표시될 수 있으며,

$$dF = K \cdot dC = - \frac{K \cdot F \cdot c}{E \cdot A} \cdot dt \quad (5.2)$$

$t=0$  일때에  $F=F_0$ ,  $t=t$  일때에  $F=F_t$  라면 式 (5.2)로부터 式 (5.3)을 얻으며, 따라서 式 (5.4)로 표시될 수 있다.

$$\int_{F_0}^{F_t} \frac{dF}{F} = - \frac{K \cdot c}{E \cdot A} \int_0^t dt \quad (5.3)$$

$$\therefore \exp\left(-\frac{K \cdot c}{E \cdot A} t\right) = \frac{F_t}{F_0} \quad (5.4)$$

Fig. 5.1에서 보는 바와 같이  $t=0$ 에서는 말뚝끝의 質點의 變位는 없으므로 壓縮應力波는 말뚝끝에서 壓縮波로 反射되어 그 應力은  $2\sigma_L$ 가 되므로  $F_0$ 는 式 (5.5)와 같이 표시되며,  $t=t$ 에서는 말뚝끝의 質點變位가 일어나므로  $F_t$ 는 당초에 작용한 힘  $F_0$ 에서 이때에 말뚝에 작용하는 壓縮力  $F_c$ 를 공제한 힘에 해당하므로 式 (5.6)과 같이 표시될 수 있다.

$$F_0 = 2\sigma_L \cdot A \quad (5.5)$$

$$F_t = F_0 - F_c = (2\sigma_L - \sigma_c) \cdot A \quad (5.6)$$

式 (5.6)에서,  $\sigma_c$ 는  $t=t$ 일때에 말뚝끝에 작용하는 壓縮應力이다. 그러므로, 式 (5.5) 및 (5.6)을 式 (5.4)에 대입하여 정리하면 式 (5.7)을 얻는다.

$$\sigma_c = 2\sigma_L \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{K \cdot c}{E \cdot A} \cdot t\right)\right] \quad (5.7)$$

여기에서, 말뚝끝에 작용하는 應力의 크기는 應力波가 말뚝끝을 통과하는 시간에 따라 커지며, 應力波가 말뚝끝을 통과하는 시간간격은 램의 충격면에서 應力波가 램의 길이  $L_r$ 를 왕복하는 시

간과 같으므로<sup>10)</sup> 말뚝끝에 작용하는 最大壓縮應力  $\sigma_{c(max)}$  및 應力波의 통과시간간격  $t_m$  은 式 (5.8) 및 式 (5.9)와 같이 각각 표시될 수 있으며, 이를 圖示하면 Fig. 5.2와 같다.

$$\sigma_{c(max)} = 2\sigma_L \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{K \cdot c}{E \cdot A} \cdot t_m\right) \right] \quad (5.8)$$

$$t_m = \frac{2L_r}{c_r} \quad (5.9)$$

한편,  $Q$ 를 말뚝끝의 地盤土의 最大彈性壓縮量(Quake)이라 하면, 말뚝끝의 地盤土의 스프링常數  $K$ 는 Fig. 5.3에서 보는바와 같으므로 式 (5.10)과 같이 표시될 수 있고, 따라서 式 (5.8)은 式 (5.11)과 같이 나타낼 수 있으며, 이것이 곧 말뚝끝의 應力이다.

$$K = \frac{R_L}{Q} \quad (5.10)$$

$$\sigma_p = 2\sigma_L \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2L_r \cdot R_L}{E_r \cdot A \cdot Q} \sqrt{\frac{E_r \cdot \gamma_r}{E \cdot \gamma}}\right) \right] \quad (5.11)$$

위의 式 (5.11)은 말뚝끝의 應力을 나타내는 一般式이며, 특수한 경우, 즉, 先端支持力比가  $R_L/R=1$ 과 같은 支持말뚝, 先端支持力比가  $R_L/R=0$ 와 같은 摩擦말뚝, 말뚝끝이 岩盤과 같은 견고한 地層위에 있어  $Q=0$ 인 地盤, 鋼말뚝 등의 각 경우에 있어 말뚝끝의 應力은 式 (5.12)와 같이 표시된다.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_p &= 2\sigma_L \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2L_r \cdot R}{E_r \cdot A \cdot Q} \cdot \sqrt{\frac{E_r \cdot \gamma_r}{E \cdot \gamma}}\right) \right] & \left( \frac{R_L}{R} = 1 \right) \\ \sigma_p &= 0 & \left( \frac{R_L}{R} = 0 \right) \\ \sigma_p &= 2\sigma_L & (Q=0) \\ \sigma_p &= 2\sigma_L \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2L_r \cdot R_L}{E_r \cdot A \cdot Q}\right) \right] & \text{(鋼말뚝)} \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

그리고, 말뚝끝에서 反射되는 應力波가 말뚝끝으로 入射되는 應力波와 중복되는 구간은 應力波길이의 1/2에 해당하므로 Fig. 5.1(a) 및 式 (5.9)로부터 式 (5.13)과 같이 표시될 수 있으며, 鋼말뚝의 경우에는 式 (5.14)로 된다.

$$\frac{1}{2}c \cdot t_m = L_r \cdot \frac{E}{E_r} \sqrt{\frac{E_r \cdot r_r}{E \cdot \gamma}} \quad (5.13)$$

$$\frac{1}{2}c \cdot t_m = L_r \quad \text{(鋼말뚝)} \quad (5.14)$$

## 6. 考 察

### 6.1. 一般의 推定方法

말뚝박기에서 말뚝의 杭打應力을 推定하는 일반적인 방법으로는 Glanville 등 (1935)<sup>1)</sup>이 유도한 에너지平衡式 및 Nanninga (1953)<sup>2)</sup>의 波動方程式에 의한 公式이 있어 말뚝머리의 杭打應力을 산정할 수 있으나, 이들 式에 의한 계산값과 鋼杭에서 杭打應力을 實測한 값의 비교에서 Glanville 式에 비하여 Nanninga 式이 현저히 좋은 일치를 보여주는 報告<sup>3)</sup>가 있다.

이 밖에, Sandhu (1982)<sup>20)</sup>에 의하여 발표된 말뚝의 殘留應力 및 波動方程式에 의한 말뚝머리의 杭打應力 算出式이 있어, 應力波가 말뚝을 따라 전파하는 과정에서 말뚝의 殘留應力이 최대가 되는 단면을 應力波前端이 통과하는 시각에 말뚝머리의 杭打應力이 최대가 되는 것을 입증하고 있다.

또 한편, Smith (1962)<sup>4)</sup>에 의하여 개발되어 Samson (1963)<sup>7)</sup>, Forehand (1964)<sup>8)</sup>, Lowery (1969)<sup>9)</sup>, Bowles (1974)<sup>11)</sup>, Rausche (1978)<sup>16)</sup> 등에 의하여 발전된 波動方程式에 의한 數值解析方法은 해머-말뚝-흙의 상호작용을 나타내는 有限差分法에 의한 모델을 설정하고 이를 컴퓨터 프로그램화한 것이 있어, 말뚝박기의 精密解析에 널리 사용되고 있을뿐 아니라 현재에도 많은 연구가 이루어지고 있으며, 杭打支持力 및 杭打應力 등의 推定에 있어 그 信賴性을 널리 인정받고 있다.

이들 算出方法과 本研究에서 해석된 式 (4.5)를 비교하여 열거하면 Tab. 6.1과 같다.

일반적으로 杭打公式의 信賴性은 그 公式의 算出值를 시험말뚝의 말뚝박기에서 측정한 實測值와 비교하여 統計的으로 分析함으로써 판단<sup>6)</sup>되는데, 말뚝全長에 대한 實測值의 자료가 불충분하여 統計的인 分析을 하는 데는 미흡하므로, 여기에서는 그 信賴性을 널리 인정받고 있는 波動方程式에 의한 數值解析方法과 式 (4.5)의 變數들이 杭打應力에 미치는 영향을 비교검토하고, 기왕에 발표된 實測值중에서 신빙성있는 자료를



이들의 算出値와 비교함으로써 미흡하나마 그 信賴性을 판단하고자 한다.

### 6.2. 變數의 影響

말뚝박기에서 일어나는 해머-말뚝-흙의 복잡한 상호작용에서 여러가지 요인들이 杭打應力의 값에 미치는 영향의 정도를 검토하기 위하여 일정한 말뚝박기모델을 선정하고, 波動方程式에 의한 Bowles(1974)<sup>11)</sup>의 컴퓨터 프로그램의 入力變數를 실제상황에 부합되는 범위에서 변화시켜 杭打應力의 최대값을 산출하여 그 변화를 圖示한바 Fig. 6.1과 같다.

Fig. 6.1에서 보는바와 같이 杭打應力에 가장 크게 영향을 미치는 變數는 ① 램의 낙하고(H), ② 해머의 效率( $e_f$ ), ③ 램의 무게( $W_r$ ), ④ 말뚝의 단위중량( $\gamma$ ), ⑤ 말뚝의 彈性係數(E), ⑥ 쿠션의 두께( $W_c/A \cdot \gamma_c$ ) 등이며, 中位의 영향을

미치는 變數는 ⑦ 말뚝의 단면적 (A), ⑧ 말뚝의 길이(L) 등이고, 매우 작은 영향을 미치는 變數는 ⑨ 先端支持力比( $R_L/R$ ), ⑩ 말뚝의 관입길이( $l$ ), ⑪ 흙의 最大彈性壓縮量(Q), ⑫ 흙의 減衰係數(J) 등이며, 말뚝의 極限支持力(R) 및 쿠션의 反撥係數( $e$ ) 등은 거의 무시할 정도의 영향이므로 Fig. 6.1에서 제외하였다.

한편, Tab. 6.1의 杭打應力公式들에 대하여 Fig. 6.1에서 나타난 주요한 變數의 순으로 열거 비교하면 Tab. 6.2와 같다. 여기에서, ① H 및 ③  $W_r$ 은  $E_n$ 의 성분으로서式 (4.2)와 같으며, ③  $R_r$ 는 말뚝의 殘留應力이고, 公式들의 變數중에서 불충분하게 고려된 것으로 표시된 이유는 Nanninga 式의 ③  $W_r$ 은  $W_r = \gamma_r \cdot A_r \cdot L_r$ 이기 때문이며, Sandhu 式의 ④  $\gamma$  및 ⑧ L은  $W = \gamma \cdot A \cdot L$ 인 까닭이고, ⑥  $W_c/A \cdot \gamma_c$ 는 公式 유도과정에서 쿠션의 존재를 限界조건으로 설정한

Table 6.1. Pile-Driving Stress Formulae and Equation (4.5)

Formula	Driving Stress $\sigma$
(1) Glanville	$\sigma_0 = \sqrt{2 e_f \cdot W_r \cdot H \cdot \frac{E}{A \cdot L}}$
(2) Nanninga	$\sigma_0 = \alpha \cdot \sqrt{2 e_f \cdot H \cdot E \cdot \gamma} \cdot \frac{A_r \sqrt{E_r \cdot \gamma_r}}{A_r \sqrt{E_r \cdot \gamma_r} + A \sqrt{E \cdot \gamma}}$ ( $\alpha=1$ drop hammer $\alpha=2$ diesel hammer)
(3) Sandhu (for pile with cushion driven by drop hammer)	$\sigma_0 = \frac{R}{A} \cdot \frac{W_r}{W} \left[ 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{W}{2W_r}\right)^2} \right]$ (uniform distributed 100% friction pile) $\sigma_0 = \frac{R}{2A} \cdot \frac{W_r}{W} \left[ 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{W}{W_r}\right)^2} \right]$ (uniform distributed 50% friction pile) $\sigma_0 = \frac{R}{A} \cdot \frac{\left(1 + 0.48 \frac{W}{W_r}\right)}{\left(1 + 0.7 \frac{W}{W_r}\right)^2}$ (triangular distributed 100% friction pile) $\sigma_0 = \frac{R}{A} \cdot \frac{\left(1 + 0.67 \frac{W}{W_r}\right)}{\left(1 + \frac{W}{W_r}\right)^2}$ (triangular distributed 50% friction pile)
(4) Numerical Method in the Wave Equation	Computer Program
(5) Equation(4.5)	$\sigma_x = \left\{ \frac{\sqrt{2 e_f \cdot E_n \cdot W_r \cdot E \cdot \gamma}}{\left(1 + \frac{A_c}{A_r} \sqrt{\frac{E_c \cdot \gamma_c}{E_r \cdot \gamma_r}}\right) \left(1 + \frac{A}{A_c} \sqrt{\frac{E \cdot \gamma}{E_c \cdot \gamma_c}}\right)} - \phi_x \cdot l \cdot R \cdot \gamma \right\} \frac{1}{W_r + W \cdot \frac{x}{L}}$ $\sigma_p = 2\sigma_L \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{2L_r \cdot R_L}{E_r \cdot A \cdot Q} \cdot \sqrt{\frac{E_r \cdot \gamma_r}{E \cdot \gamma}}\right) \right\}$ (for pile point)

Table 6.2. Comparison of Parameters

Formula	① $H$	② $e_f$	③ $W_r$	④ $\gamma$	⑤ $E$	⑥ $W_c/A_c\gamma_c$	⑦ $A$	⑧ $L$	⑨ $R_L/R$	⑩ $l$	⑪ $Q$	⑫ $J$	⑬ $R_{rz}$
(1) Glanville	○	○	○		○		○	○					
(2) Nanninga	○	○	△	○	○		○						
(3) Sandhu			○	△		△	○	△					○
(4) Numerical Method	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	
(5) Equation(4.5)	○	○	○	○	○	△	○	○	○	○	△		○

Legend : (○) Parameter accounted for  
 (△) Parameter unsatisfactorily accounted for  
 (Blank Space) Parameter not accounted for

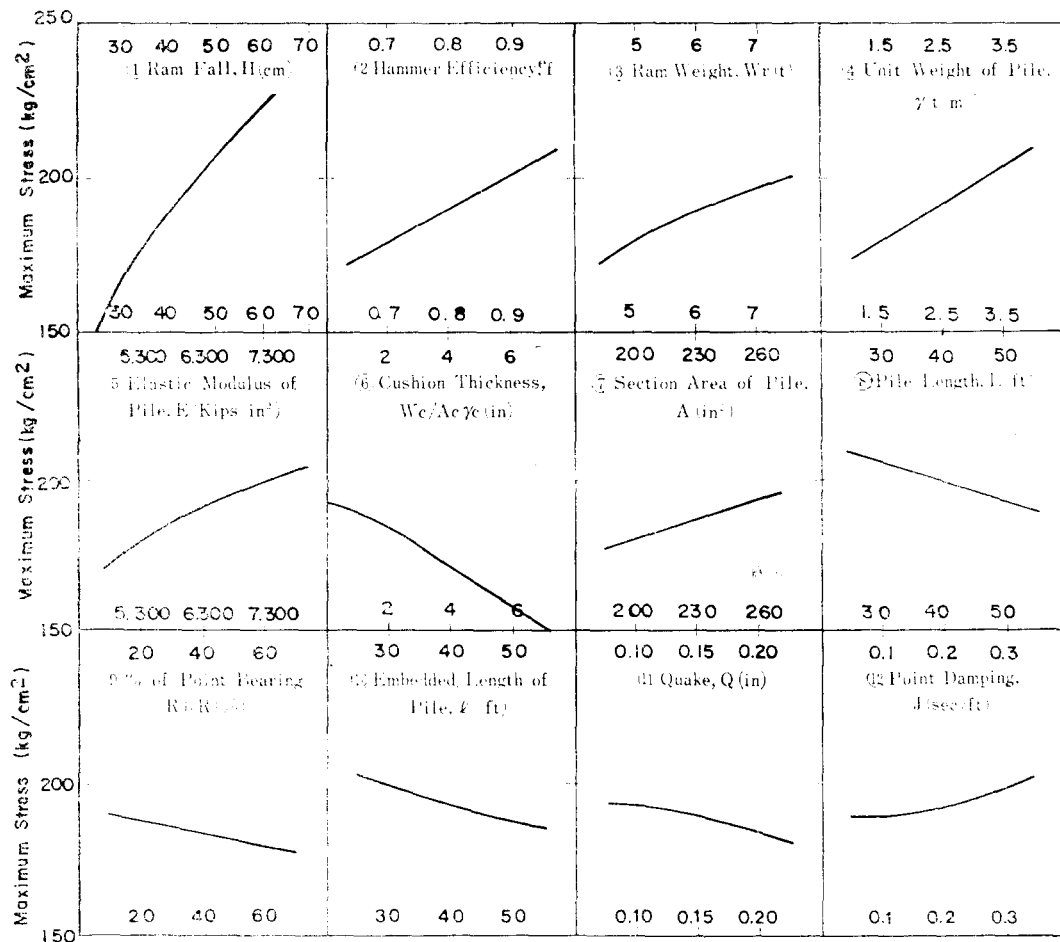


Fig. 6.1. Effects of Input Parameters of the Wave Equation Computer Program on Pile-Driving Stress

결과이며, 식 (4.5)의 ⑤  $W_c/\gamma_c \cdot A_c$ 는  $A_c \sqrt{E_c \cdot \gamma_c}$  방향으로 부터 불충분하게나마 고려되어 있고, ⑩  $Q$ 는 식 (5.11)에 의하여 말뚝끝의 應力에만 고

려되어 있기 때문이다.

Tab. 6.1 및 6.2에서 보는 바와 같이 식 (4.5)는 다른 杭打應力公式들과 같이 그 형태가 간단

하면서도 波動方程式에 의한 컴퓨터 프로그램과 같이 杭打應力에 가장 크게 영향을 미치는 變數들의 대부분이 충분히 고려되어 있으며, 주요한 變數의 구성이 프로그램과 유사하여 杭打應力에 큰 영향을 미치는 요인들의 변화에 대하여 같은 경향의 응답을 나타낼 것으로 추측된다. 따라서 대형 컴퓨터를 사용할 수 없는 현장에서 杭打資料를 이용하여 즉석에서 컴퓨터 프로그램에 준하는 杭打應力을 말뚝머리 뿐 아니라 말뚝全長에 대하여 推定할 수 있을 것으로 기대된다.

### 6.3. 實測値와의 比較

式 (4.5)에 대한 信賴度の 檢정은 그 算出値와 말뚝의 全長에 걸쳐 실측한 다수의 자료로 統計的인 分析을 하는 것이 가장 바람직하지만, 實測資料의 대부분이 말뚝박기 과정에서 다이내믹 스트레인 게이지의 導線의 일부가 박리절단 되던가 또한 絕緣상태가 불량하여 동일단면의 測定値의 평균을 낼 수 없거나 測定値가 불합리한 관계로 신뢰할 수 없는 자료가 허다하여 믿을만한 다수의 자료를 수집하기는 매우 어려우므로, 기왕에 報告된 자료중에서 가장 신빙성있는 文獻<sup>5)</sup>을 선정하여 이들 實測値및 數値解析方法에 의한 算出値를 式 (4.5)의 算出値와 비교하였으며, 이를 圖示한바 Fig. 6.2와 같다.

Fig. 6.2에서 보는바와 같이 杭頭部에서는 實測値에 비하여 Glanville 式에 의한 應力  $\sigma_{0(G)}$ 는 너무 큰 값이며, Nanninga 式에 의한 값  $\sigma_{0(N)}$  및 數値解析方法에 의한 값들은 대체로 잘 부합되므로 기왕의 報告文獻<sup>6)11)</sup>과 일치하며, 式 (4.5)에 의한 값은 Nanninga 式과 같은 값이 되므로 기왕의 文獻<sup>6)</sup>에서 그 信賴性을 미루어 판단할 수 있다. 이러한 결과는 杭頭部에서는 杭打應力을 해석함에 있어 에너지平衡式으로 해석하는 것보다 波動方程式에 의한 해석방법이 더욱 타당하다는 것을 보여준다.

그리고, 말뚝의 全長에 걸쳐 비교해 볼때 實測値에 비하여 式 (4.5)에 의한 算出値는 대체로 잘 부합되지만 數値解析方法은 다소 큰 값을 알 수 있으며, 양자 모두 말뚝의 下半部에서는 實測値보다 대체로 큰 값이고, 下部로 내려감에 따라 점차 그 격차가 커짐을 알 수 있으며,

이러한 경향은 數値解析方法이 더욱 현저함을 알 수 있다.

이상의 결과로 式 (4.5)에 의한 杭打應力의 算出値는 杭頭部에서는 實測値 및 信賴性이 높은 理論値들과 비교할때 그 信賴性이 매우 높으며, 말뚝의 上半部에서는 實測値와 대체적으로 잘 부합되고, 말뚝의 下半部에서는 實測値보다 다소 큰 값을 알 수 있으며, 數値解析方法은 式 (4.5)보다 대체적으로 그 精度가 떨어지는 것으로 판단된다. 그러나 많은 實測資料에 의한 統計的 評價가 장차의 研究課題이다.

### 7. 結 論

本 研究의 결과 다음과 같은 結論을 얻을 수 있다.

(1) 式 (4.5)는 다른 杭打應力公式들과 같이 그 형태가 간단하면서도 말뚝머리 및 말뚝全長에 대하여 杭打應力의 推定이 가능하며, 波動方程式에 의한 數値解析方法과 같이 杭打應力에 가장 크게 영향을 미치는 變數들의 대부분이 충분히 고려되어 있고 그 구성이 유사하므로 杭打應力을 결정하는 주요한 要因의 변화에 대하여 數値解析方法과 같은 경향의 應答을 나타낼 것이 예측되며 따라서 대형 컴퓨터를 사용할 수 없는 현장에서 杭打資料를 이용하여 즉석에서 數値解析方法에 준하는 杭打應力을 推定할 수 있을 것으로 기대된다.

(2) 式 (4.5)에 의한 말뚝머리의 算出應力은 Nanninga 式에 의한 應力과 일치하므로 그 信賴性을 기왕의 報告文獻으로 부터 미루어 판단할 수 있으며, 數値解析方法에 의한 算出値 및 스트레인 게이지에 의한 實測値와의 비교에서도 대체적으로 잘 부합된다.

(3) 式 (4.5)에 의한 말뚝의 上半部의 算出應力은 實測値와 대체적으로 잘 부합되고, 말뚝의 下半部에서는 實測値보다 다소 큰 값이며, 數値解析方法은 式 (4.5)보다 대체적으로 그 精度가 떨어지는 것으로 판단된다. 그러나 많은 實測資料에 의하여 統計的方法으로 그 信賴性을 평가하는 것이 장차의 研究課題이다.

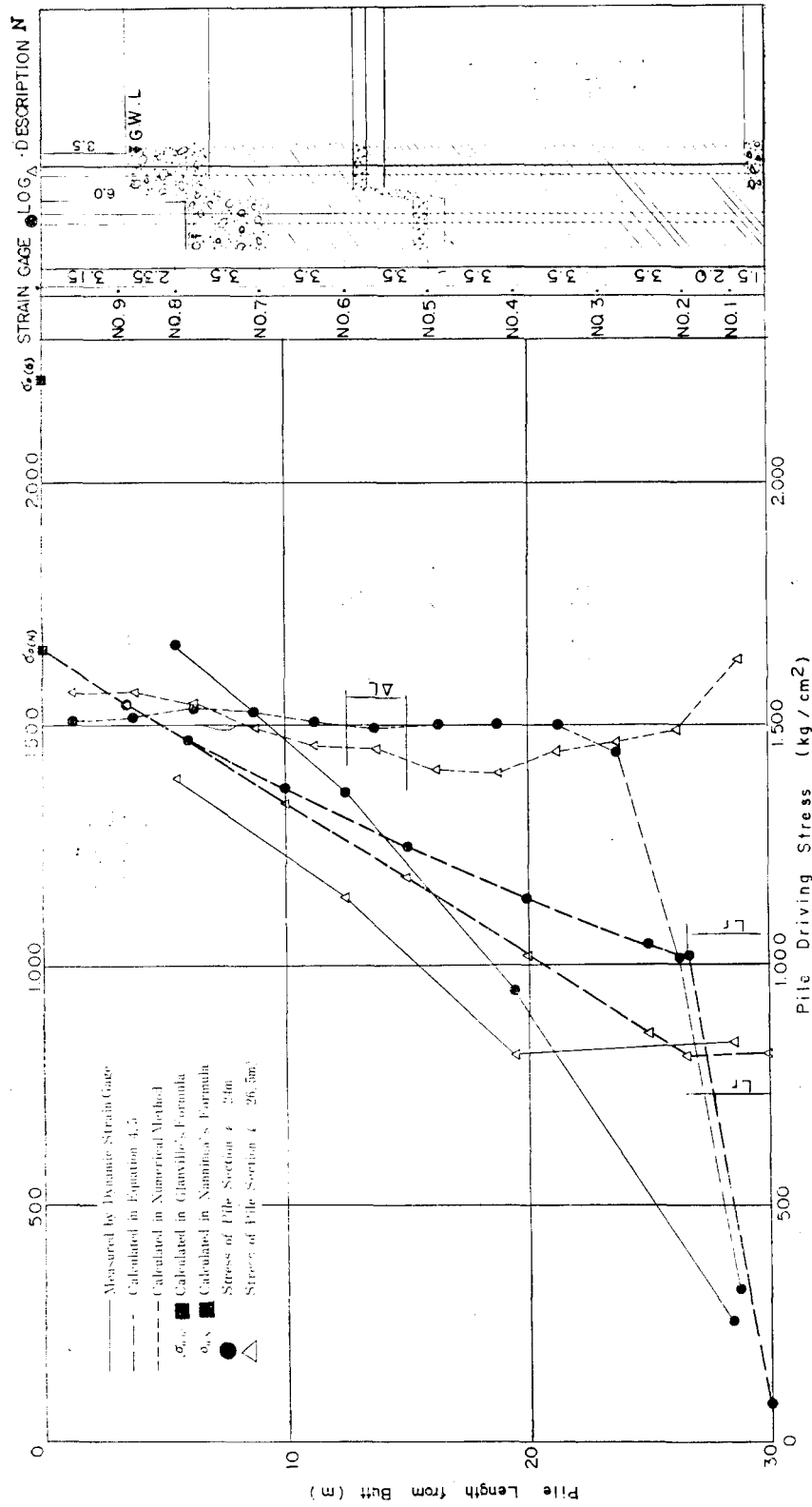


Fig. 6.2. Comparison of Theoretical and Measured Driving Stress in a Pile

参 考 文 献

1. Glanville, W.H., Grime, G. & Davies, W.W.: The Behavior of Reinforced Concrete Piles during Driving, Journal of Institution of Civil Engineers, Vol.1, 1936.
2. Nanninga, N.: The Problem of Pile Driving, Proc. 3rd Int. Conf. on SMFE, 1953.
3. Chellis, R.D.: Pile Foundation, McGraw-Hill, 1961, pp.28~33.
4. Smith, E.A.L.: Pile Driving Analysis by the Wave Equation, Trans. No.3306, Vol.127, Part 1, ASCE, 1962, pp.1145~1193.
5. 横尾, 原田, 山肩, 佐藤: 各種基礎くいの比較実験, 土と基礎, 第9巻, 第49号, 1962, pp.20~40.
6. 大崎, 岸田: 鋼くいの支持力・打撃應力に関する2, 3の問題(その2), 日本建築學會 論文報告集, 第80号, 1962, pp.24~27.
7. Samson, C.H., Hirsch, T.J. & Lowery, L.L.: Computer Study of Dynamic Behavior of Piling, Journal of Structural Div., ASCE, Vol.89, ST4, 1963, pp.413~449.
8. Forehand, P.W. & Leese, J.L.: Prediction of Pile Capacity by the Wave Equation, Journal of SMFD, ASCE, Vol.90, SM2, 1964, pp.1~25.
- 9) Lowery, L.L., Hirsch, T.J., Edward, T.C., Coyle, H.M. & Samson, C.H.: Use of Wave Equation to Predict Soil Resistance on a Pile during Driving, Special Session No.8, 7th ICS MFE, Mexico, 1969.
10. Timoshenko, S.P. & Goodier, J.N.: Theory of Elasticity, McGraw-Hill, 3rd ed., 1970, pp.485~504.
11. Bowles, J.E.: Analytical and Computer Methods in Foundation Engineering, McGraw-Hill, 1974, pp.349~387.
12. Achenbach, J.D.: Wave Propagation in Elastic Solids, North-Holland, 1975, pp.10~30.
13. Holloway, D.M., Clough, G.W. & Vesic A.S.: The Mechanics of Pile-Soil Interaction in Cohesionless Soil, Duke Univ., School of Eng., Soil Mechs, Series No.39, 1975.
14. Bowles, J.E.: Foundation Analysis and Design, McGraw-Hill, 2nd ed., 1977, pp.573~579.
15. Tomlinson, M.J.: Pile Design and Construction Practice, Viewpoint, 1977, pp.69~174.
16. Rausche, F. & Goble, G.G.: A Critical Evaluation of the Wave Equation, Transportation Research Record, No.665, Vol.II, TRB, National Academy of Sciences, Washington, D.C., 1978.
17. Grande, L. & Nordal, S.: Pile-Soil Interaction Analysis on Effective Stress Basis, Recent Developments in the Design & Construction of Piles, Proc. of the Conf. held at the Institution of Electrical Eng., 1979, pp.365~375.
18. Poulos, H.G. & Davis, E.H.: Pile Foundation Analysis and Design, John-Wiley, 1980, pp.52~70.
19. Bredenberg, H.: Application of Stress-Wave Theory on Piles, A.A. Balkema, Rotterdam, 1981, pp.41~50.
20. Sandhu, B.S.: Predicting Driving Stresses in Piles, Journal of Construction Div. ASCE, 108, CO4, 1982, pp.485~503.
21. Fuller, F.M.: Engineering of Pile Installations, McGraw-Hill, 1983.
22. Briaud, J.L. & Tucker, L.M.: Residual Stresses in Piles and the Wave Equation, Analysis & Design of Pile Foundations, Proc. of a Symposium sponsored by the ASCE Geotechnical Eng. Div. San Francisco, 1984, pp.119~137.
23. 黄正奎: 波動方程式 및 残留應力에 의한 杭打支持力 推定, 大韓土質工學會誌, 第2巻 第3号, 1986, pp.15~25.