

# SDINS 의 좌표축 초기 직립에 관한 칼만 필터링 기법의 응용

최근국\*, 이만형\*\*, 김중완\*\*\*

## Application of Kalman Filtering Technique to Initial Axes Erection of SDINS

Keun Kug Choi, Man Hyung Lee, Joong Wan Kim

### ABSTRACT

Determination of navigation variables (latitude, longitude, and altitude) near the earth's surface is termed 'Terrestrial Navigation'. The quantities that are measured inertially are the total acceleration (or the integral of this acceleration over a fixed time interval) and the total angular rate (or the integral of this angular rate over the same time interval).

These measurements when suitably compensated can be manipulated to yield the navigation variables. Hence, it is essential that the initial values of position, orientation and velocity are accurately set up during the initial alignment process.

Initial alignment of gimballed inertial navigation system (GINS) is accomplished by gyro-compassing techniques.

These cannot be used, however, in the case of strapdown inertial navigation system(SDINS), where the inertial instruments are directly strapped down to a vehicle frame.

The basic objective of this paper is the development of digital method for the determination of the initial axes erection of a SDINS from vibration and sway corrupted data on the launch pad.

---

\* 현대중공업(주)로봇 산업부 연구원

\*\* 부산대학교 공과대학 정밀기계공학과 부교수 및 기계기술연구소 책임연구원

\*\*\* 동아대학교 공과대학 기계공학과 조교수

Nomenclature

$\alpha$ : azimuth error angle	$\phi_{ij}$ : component of state transition matrix
$\beta, \gamma$ : erection error angle	$X$ : state vector
$g$ : acceleration due to gravity	$\Phi$ : state transition matrix
[D] : direction cosine matrix	$\Delta t$ : time interval(sampling time)
$w$ : angular velocity	$G$ : input response matrix
$R$ : correlation function	$U$ : input vector
$\Delta$ : time interval	$Q$ : input covariance matrix
$\sigma$ : standard deviation	$q$ : quantization level of accelerometer
$\tau$ : correlation time	$Y$ : measurement state vector
$w_n$ : central angular frequency of velocity power spectrum	$H$ : measurement matrix
$V$ : correlated velocity noise model	$\bar{F}$ : measurement noise vector
$n_i$ : independent random process	$R(t_i)$ : measurement noise covariance matrix
$W$ : white Gaussian noise	$K$ : Kalman gain matrix
$E\{\cdot\}$ : expectation	$P$ : error covariance matrix
$m_j$ : measurement state	

1. 서 론

자유공간을 움직이는 항체의 유도 및 제어를 위하여 기본적으로 필요한 위치, 속도, 자세에 대한 정보를 외부와의 교신없이 연속적으로 제공할 수 있는 관성측정시스템(Inertial Measurement System)은 인공위성, 항공기, 미사일, 잠수함 등에 긴요하게 사용되고 있다.<sup>1)</sup>

관성측정기구(Inertial Measuring Unit, IMU)를 사용하는 관성측정시스템의 좌표축 초기배열(Initial Axes Alignment)에 관한 문제는 그러한 시스템들(관성유도장치, 관성항법장치, 또는 기준좌표계에 대한 자세 측정장치)에 사용되는 센서들이 각변화율(Angular Rate)과 가속도(Acceleration)을 측정하기 때문에 필수적으로 요구되는 조건이다.<sup>9)</sup>

관성유도 또는 관성항법시스템에서 대략적인 방향배열(Coarse Alignment)이 이루어진 후 최초의 측정이 수행될 때, 측정좌표계가 계산상의 기준좌표계(SDINS의 시스템컴퓨터에서 계산의 기준으로 삼는 좌표계)로 된다.

그 다음 측정이 수행될 때의 측정좌표계는 동체의 운동으로 인해 계산기준좌표계로부터 이탈된다. 이 동체운동에 대한 자이로의 정보를 이용하여 측정좌표계와 계산기준좌표계를 연관시키는 좌표변환행렬을 구성할 수 있다.

그 이후 부터는 계속적으로 자이로의 정보를 이용하여 이 좌표변환행렬을 새롭게 대응되는 값으로 바꾸어 가며, 동시에 측정좌표계에서 측정된 가속도계의 출력들을 계산기준좌표계로 변환하여 적분하므로써, 연속적으로 동체의 속도와 위치를 알 수 있게 되며 또한 그 때의 좌

표변환행렬로 부터 자세에 대한 정보도 얻을 수 있게 된다.<sup>2)</sup>

그러면 계산기준좌표계를 최초로 어떤 방향으로 택할 것인가 하는 문제가 생기게 된다. 따라서 우리가 알고 있는 방향을 선택해야 그 다음 일련의 과정을 유용하게 이용할 수 있을 것이다. 이 계산기준좌표계의 초기 방향을 확정하는 문제가 바로 좌표축 초기 배열문제인 것이다.

본 논문에서는 지구고정 발사대에 장착된 미사일의 스트랩다운 관성항법장치(Strapdown Inertial Navigation System)를 대상 시스템으로 하여 실제의 다이내믹 시스템이 받을 수 있는 진동(Vibration) 및 흔들림(Sway) 같은 외란을 주로 고려하고 자이로 편류(Gyro Drift) 등의 오차도 감안한 경우의 좌표축 초기배열문제 중 좌표축 초기직립문제(Initial Axes Erection Process)를 고찰하고자 한다.

## 2. 본 론

본 연구대상시스템의 동체는 흔들림외란(Swaying Disturbance)을 주잡음(Principal Noise)으로 하고 무시할 수 없는 자이로 편류 효과도 고려하기 때문에, 최초의 측정이 수행된 후 부터는 측정좌표계가 계산기준좌표계로 부터 이탈될 것이다. 뿐만아니라, 계산기준좌표계도 지구고정 국지 좌표계에 대해서 일정한 관계를 유지하지 못하게 된다.

따라서 이 경우의 좌표축 초기배열 문제는 지구고정 국지 좌표계에서 알 수 있는 중력 가속도 성분 및 지구자전 각속도 성분과 계산기준좌표계로 변환한 가속도 성분 및 가속도 성분을 필터링하여 그 오차를 비교하므로써 배열 오차각을 추정할 수 있고, 이를 적절히 보상하여 계산기준좌표계를 지구고정 국지 좌표계에 맞추어 주는 문제이다.

그러나 지구자전 각속도는 중력가속도 및 외란에 비해 매우 작은 량이므로 방위각(Azimuth Angle)에 대한 오차는 외부장비(Star Trackers or Other Optical Methods)와 조합하여 결정, 보상해 주는 것이 유리한 것으로

알려져 있다.<sup>3),9),10)</sup> 따라서 본 논문에서는 가속도 적분기의 출력을 이용한 좌표축 초기직립 문제를 고려한다.

### 2.1 시스템 다이내믹스

#### 2.1.1 좌표계의 설정

본 논문에서 스트랩다운 시스템의 좌표계를 다음과 같이 설정한다.

좌표계 (0) : 발사기지의 지구고정 국지 좌표계

좌표계 (1) : SDINS의 시스템 컴퓨터가 계산의 기준으로 삼는 좌표계

좌표계 (2) : 동체에 부착된 측정 좌표계

좌표계 (0)과 좌표계 (1)의 관계는 아래 그림 1과 같다. 좌표계 (0)의 한 축은 발사기지에서 연직방향을 향하고 다른 한 축은 연직방향에 대하여 임의의 직각 방위를 향하도록 한다. 따라서 좌표계 (0)은 지구에 고정되고 정확히 지구의 운동을 따른다. 좌표계 (1)은 그림 1에서와 같이 좌표계 (0)으로 부터 미지의 작은 각  $\alpha, \beta, \gamma$  만큼씩 오차를 가지고 배열되어 있으며 자이로 편류 때문에  $\alpha, \beta, \gamma$ 는 시변(Time Varying)이다.

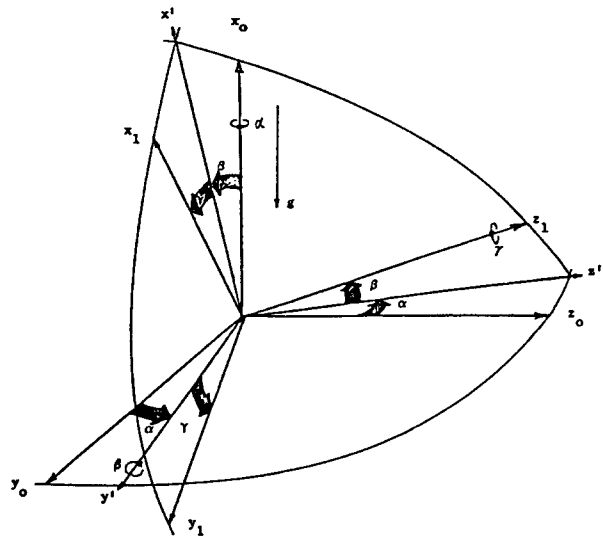


그림 1. 좌표계 (0)과 좌표계 (1)의 관계 :  $\alpha$ : 방위오차각,  $\beta, \gamma$ : 직립오차각,  $g$ : 중력가속도

발사기지의 발사대에 정착된 미사일이 그림 1의  $x_0$ -방향을 중심으로 진동과 흔들림을 받고 있다고 가정한다.

2.1.2 회전좌표계 사이의 방향여현행렬 상대적으로 회전하고 있는 좌표계 사이의 관계는 방향여현행렬로 설명할 수 있다. 어떤 시각에서  $[D_1^1]$ 를 좌표계 (1)에서 좌표계 (2)로의 변환행렬로 두면 이  $[D_1^1]$ 는 직교행렬(Orthogonal Matrix) 이므로 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = [D_1^2] \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = [D_2^1] \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

여기서  $[D_2^1] = [D_1^2]^{-1} = [D_1^2]^T$  이다.

이제 좌표계(1)을 정지좌표계로 가정하고 좌표계(2)가 (1)에 대해서  $w_2$  벡터로 회전할 경우, 방향여현행렬을 지배하는 미분방정식은 다음과 같다.

$$[\dot{D}_2^1] = d/dt [D_2^1] = [D_2^1] [w_2] \dots\dots (2)$$

여기서,

$$w_2 = \begin{pmatrix} w_{x_2} \\ w_{y_2} \\ w_{z_2} \end{pmatrix}, [w_2] = \begin{pmatrix} 0 & -w_{z_2} & w_{y_2} \\ w_{z_2} & 0 & -w_{x_2} \\ -w_{y_2} & w_{x_2} & 0 \end{pmatrix} \dots\dots (3)$$

좌표계(0)을 정지좌표계로 가정하고 좌표계(1) 및 (2)가 좌표계 (0)에 대하여 상대운동을 한다면,

$$[\dot{D}_1^0] = [D_1^0] [w_1] \dots\dots\dots (4)$$

$$[\dot{D}_2^0] = [D_2^0] [w_2] \dots\dots\dots (5)$$

이 성립함을 쉽게 알 수 있으며, 또

$$[D_2^0] = [D_1^0] [D_2^1] \text{ 과 } [D_1^0]^{-1} = [D_1^0]^T$$

로 부터

$$[D_2^1] = [D_1^0]^{-1} \cdot [D_2^0] = [D_1^0]^T \cdot [D_2^0] \dots\dots\dots (6)$$

가 된다.

(6)식을 미분하고 여기에 (4), (5)식을 대입하면,

$$[\dot{D}_2^1] = [D_2^1] [w_2] - [w_1] [D_2^1] \dots\dots (7)$$

이 성립한다.

좌표계(0)과 (1)사이 배열오차각  $\alpha, \beta, \gamma$  의 거동을 나타내는 방정식은 다음과 같이 유도할 수 있다.

좌표계(1)의 거동은 좌표계(2) 및 자이로 편류율에 관계하며  $\alpha, \beta, \gamma$ 가 미지의 각(Unknown Angle) 이기 때문에 좌표계(0)에 대한 좌표계(1)의 상대각운동 벡터  $w_1$ 을 알 수 없으므로 식 (7)을 다음과 같이 근사시킨다.

$$[\dot{D}_2^1] = [D_2^1] [w_2] - [w_0] \cdot [D_2^1] \dots\dots (8)$$

여기서  $[w_2]$ 는 식(5)의  $[w_2]$ 와는 다른, 자이로로 측정된 각속도 행렬이고,  $[w_0]$ 는 좌표계(0)에서의 지구 자전율행렬이다.

자이로 측정치에는 편류율에 의한 오차가 내내하며 따라서,

$$[w_2] = [\dot{\theta}] + [d_2] \dots\dots\dots (9)$$

여기서  $[\dot{\theta}]$ : 좌표계(2)의 실제 각속도 행렬,  $[d_2]$ : 자이로 편류율 행렬이다. 식(8)의 역행렬(Inverse Matrix)은,

$$[\dot{D}_1^2] = [D_1^2] [w_0] - [w_2] [D_1^2]$$

식(9)를 위식의  $[w_2]$ 에 대입하면,

$$[\dot{D}_1^2] = [D_1^2] [w_0] - [\dot{\theta}] [D_1^2] - [d_2] [D_1^2] \dots\dots\dots (10)$$

이번에는 좌표계(1)을 정지좌표계로 가정하고, 좌표계(0) 및 좌표계(2)가 좌표계(1)에 대하여 상대운동을 한다고 가정하여 (8)식을 얻을 때와 똑같은 방법을 적용하고 좌표계(1)이 좌표계(2)에서 측정되는 자이로 편류오차에 의해 연동되고 있음을 감안하여 근사시키며,

$$[\dot{D}_2^0] = [D_2^0][\dot{\theta}] - [w_0][D_2^0] \dots\dots (11)$$

를 얻을 수 있다.

(10)식과 (11)식 및  $[D_1^0] = [D_2^0][D_1^2]$ 의 관계로 부터

$$[\dot{D}_1^0] = [D_1^0][w_0] - [w_0][D_1^0] - [D_2^0][d_2][D_1^2] \dots\dots(12)$$

를 얻는다.

(12)식의 오른쪽 끝항은  $[d_2]$ 가 교대행렬 (Skew-symmetric Matrix) 이므로 ,

$$[D_2^0][d_2][D_1^2] = [D_1^0][D_2^1][d_2][D_1^2] = [D_1^0][d_1] \dots\dots (13)$$

(13)식에서 벡터  $\bar{d}_1$  과  $\bar{d}_2$  의 관계는

$$\bar{d}_1 = [D_2^1]\bar{d}_2$$

이다.

여기서 본 연구대상시스템의 다이내믹스를 간단화하기 위한 몇가지 기본 가정을 한다.

가. 대략적인 방향 배열에 의하여 초기의 배열오차각  $\alpha, \beta, \gamma$ 는 선형화가 가능한 범위내의 값으로 한다.

$$\text{즉, } \sin\alpha \approx \alpha, \cos\alpha \approx 1$$

나. 측정좌표계를 구성하는 관성측정기구는 서로 직교하는 세 축위에 놓여있다.

다. 자이로 토오킹오차 (Torquing Error) 나 가속도계의 측정오차는 고려하지 않는다.

라. 미사일의 흔들림 및 진동은 적절히 상관된 잡음 프로세스로 한다.

배열오차각  $\alpha, \beta, \gamma$ 가 위의 기본가정 '가'를 만족한다면,

$$[D_1^0] = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix} \dots\dots(14)$$

로 근사시킬 수 있고 식(13), (14)를 (12)식에 대입하고 간단히 하면 (3.3)행렬의 미분방정식 (Matrix Differential Equation)이 다음의 세 미분방정식으로 줄어들게 된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -w_{z0} & w_{y0} \\ w_{z0} & 0 & -w_{x0} \\ -w_{y0} & w_{x0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{x1} \\ d_{y1} \\ d_{z1} \end{bmatrix} \dots\dots(15)$$

본 논문에서는 (15)식의 자이로 편류율을 좌표계(1)에서 랜덤상수 (Random Constant)로 가정한 경우와, 랜덤변수를 초기값으로 하는 편위된 Wiener 프로세스로 둔 경우에 대해서 시뮬레이션을 수행할 것이다.

### 2.1.3 잡음입력과 측정상태량

미사일 발사대의 다이내믹스를 감안할 때, 흔들림 속도잡음 모델은 랜덤성분을 가진 조화함수 형태의 지수함수적으로 상관된 정체프로세스 (Exponentially Correlated Stationary Process)로 가정하여 실제계에 접근시킨다.

이 잡음모델은 평균이 영 (Zero) 이고 상관함수 (Correlation Function)가,

$$R_{v1}(\Delta) = \sigma_v^2 \cdot \exp(-|\Delta|/\tau) \cdot \cos(w_n \cdot \Delta) \dots\dots(16)$$

여기서,

$\sigma_v$  : 미사일의 흔들림 속도편차 (RMS Sway Velocity)

$\tau$  : 상관시간 (Correlation Time)

$w_n$  : 흔들림속도와 위 스펙트럼의 중심 각진동수 (Central Angular Frequency of Velocity Power Spectrum)

$\Delta$  :  $t_i - t_j$

인 랜덤정체 프로세스로 둘 수 있다.<sup>6)8)9)</sup>

백색 정규분포잡음 (White Gaussian Noise)으로 이러한 프로세스를 발생시키려면  $v_1(t)$ 는 다음과 같다.

$$v_1(t) = n_1(t) \cdot \cos(w_n \cdot t) + n_2(t) \cdot \sin(w_n \cdot t) \dots\dots(17)$$

여기서  $n_1(t), n_2(t)$ 는 자기상관함수 (Autocorrelation Function)가,

$$R_{n_i}(\Delta) = R_{n_2}(\Delta) = \sigma_v^2 \cdot \exp(-|\Delta|/\tau) \quad (18)$$

인 서로 독립적인 랜덤 프로세스이며, 다음의 추계학적 미분방정식에 의해 발생된다.

$$\dot{n}_1(t) = (-1/\tau)n_1(t) + w_1(t) \quad (19)$$

$$\dot{n}_2(t) = (-1/\tau)n_2(t) + w_2(t) \quad (20)$$

여기서  $w_1(t), w_2(t)$  는 상관함수가

$$E\{w_1(t_1)w_1(t_2)\} = E\{w_2(t_1)w_2(t_2)\} \\ = 2 \cdot \sigma_v^2 / \tau \cdot \delta(t_1 - t_2) \quad (21)$$

인 백색 정규 분포 잡음이다.

(21)식에서  $\delta(\cdot)$ 는  $\delta$ -함수(Dirac Delta Function)이다.

(17)식의  $v_1(t)$ 를 좌표계(1)의  $z_1$  축 방향의 잡음속도성분이라 두고,  $y_1$  축에 대해서는 같은 형태의  $v_2(t)$ 를 인가한다.

$$v_2(t) = n_3(t) \cdot \cos(w_n \cdot t) + n_4(t) \cdot \sin(w_n \cdot t) \quad (22)$$

$$\dot{n}_3(t) = (-1/\tau)n_3(t) + w_3(t) \quad (23)$$

$$\dot{n}_4(t) = (-1/\tau)n_4(t) + w_4(t) \quad (24)$$

여기서  $n_3(t), n_4(t)$  및  $w_3(t), w_4(t)$ 의 상관함수(18)식 및 (21)식과 같다.

가속도 적분기의 출력에 대한 모델링을 생각해 볼 때, 그림 1에서 배열오차각에 의한 중력 가속도  $g$ 의 오차성분이

$$A_{z_1} = g \cdot \beta \quad (25-1)$$

$$A_{y_1} = -g \cdot \gamma \quad (25-2)$$

로 주어지고 관성측정기의 가속도측정 센서가 어떤 시간간격을 가진 적분기라 할 때 그 출력은 다음과 같이 모델링 할 수 있다.

$$m_1(t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} g \cdot \beta(\tau) d\tau + v_1(t_i) - v_1(t_{i-1}) \\ + m_1(t_{i-1}) \quad (26)$$

$$m_2(t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} -g \cdot \gamma(\tau) d\tau + v_2(t_i) - v_2(t_{i-1}) \\ + m_2(t_{i-1}) \quad (27)$$

여기서,

$m_1(t_i)$ 는 시간  $t_i$ 에서 적분기 출력의  $z_1$  축 성분이고,

$m_2(t_i)$ 는 시간  $t_i$ 에서 적분기 출력의  $y_1$  축 성분이다.

#### 2.1.4 모델시스템의 상태방정식

시스템을 기술하는 미분방정식은 식(15), (19), (20), (23), (24) 및 자이로 편류율에 대한 가정으로 표시되며, 이들을 등가인 차분방정식으로 고치고(System Discretization), 식(26), (27)을 조합하면 전체 시스템의 상태방정식을 구성할 수 있다.

먼저 자이로 편류율을 좌표계(1)에서 랜덤 상수로 가정한 경우,

$$\begin{bmatrix} \alpha(t_i) \\ \beta(t_i) \\ \gamma(t_i) \\ d_x(t_i) \\ d_y(t_i) \\ d_z(t_i) \\ m_1(t_i) \\ m_2(t_i) \\ n_1(t_i) \\ n_2(t_i) \\ n_3(t_i) \\ n_4(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & 0 & 0 \\ (3,3) & (3,3) & (3,2) & (3,4) \\ 0 & I & 0 & 0 \\ (3,3) & (3,3) & (3,2) & (3,4) \\ \phi_{31} & \phi_{32} & I & \phi_{34} \\ (2,3) & (2,3) & (2,2) & (2,4) \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{44} \\ (4,3) & (4,3) & (4,2) & (4,4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(t_{i-1}) \\ \beta(t_{i-1}) \\ \gamma(t_{i-1}) \\ d_x(t_{i-1}) \\ d_y(t_{i-1}) \\ d_z(t_{i-1}) \\ m_1(t_{i-1}) \\ m_2(t_{i-1}) \\ n_1(t_{i-1}) \\ n_2(t_{i-1}) \\ n_3(t_{i-1}) \\ n_4(t_{i-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (3,4) \\ 0 \\ (3,4) \\ (2,4) \\ I \\ (4,4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t_{i-1}) \\ u_2(t_{i-1}) \\ u_3(t_{i-1}) \\ u_4(t_{i-1}) \end{bmatrix} \quad (28)$$

여기서 (m, n)은 m×n 행렬을 의미하며 이를 간단히 쓰면,

$$x(t_i) = \Phi(t_i, t_{i-1}) \cdot x(t_{i-1}) + g(t_i, t_{i-1}) \cdot u(t_{i-1}) \dots \dots \dots (29)$$

여기서,

$$\phi_{11} = I - \frac{\sin(w \cdot \Delta t_i)}{w} [w_0] + \frac{1 - \cos(w \cdot \Delta t_i)}{w^2} [w_0]^2 \dots \dots \dots (30)$$

$$w = (w_{x0}^2 + w_{y0}^2 + w_{z0}^2)^{1/2}$$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

[w<sub>0</sub>] : (15) 식의 [w<sub>0</sub>] 행렬

$$\phi_{12} = -\Delta t_i \cdot I + \frac{1 - \cos(w \cdot \Delta t_i)}{w^2} [w_0] - \left\{ \frac{\Delta t_i}{w^2} - \frac{\sin(w \cdot \Delta t_i)}{w^3} \right\} [w_0]^2 \dots \dots \dots (31)$$

$$\phi_{31} = - \begin{pmatrix} 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & -g \end{pmatrix} \phi_{12} \dots \dots \dots (32)$$

$$\phi_{32} = \begin{pmatrix} 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & -g \end{pmatrix} \left[ -\frac{\Delta t_i^2}{2} \cdot I + \frac{\sin(w \cdot \Delta t_i)}{w^3} [w_0] - \left\{ \frac{\Delta t_i^2}{2 \cdot w^2} - \frac{1 - \cos(w \cdot \Delta t_i)}{w^4} \right\} [w_0]^2 \right] \dots \dots \dots (33)$$

$$\phi_{34} = C(t_i) \cdot \phi_{44} - C(t_{i-1}) \dots \dots \dots (34)$$

$$\phi_{44} = \exp(-\Delta t_i / \tau) \cdot I \dots \dots \dots (35)$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} \cos(w_n \cdot t) & \sin(w_n \cdot t) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cos(w_n \cdot t) & \sin(w_n \cdot t) \end{pmatrix} \dots \dots \dots (36)$$

$$u(t_{i-1}) = \begin{pmatrix} u_1(t_{i-1}) \\ u_2(t_{i-1}) \\ u_3(t_{i-1}) \\ u_4(t_{i-1}) \end{pmatrix}$$

$$= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi_{44}(t_i, \tau) \cdot \begin{pmatrix} w_1(\tau) \\ w_2(\tau) \\ w_3(\tau) \\ w_4(\tau) \end{pmatrix} d\tau$$

$$= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi_{44}(t_i, \tau) d\tau \cdot \begin{pmatrix} w_1(t_{i-1}) \\ w_2(t_{i-1}) \\ w_3(t_{i-1}) \\ w_4(t_{i-1}) \end{pmatrix} \dots (37)$$

로 표시된다. 따라서 입력 벡터 u(t<sub>i-1</sub>)의 상호 분산행렬 (Input Covariance Matrix) q(t<sub>i-1</sub>)은 w<sub>1</sub>, w<sub>2</sub>, w<sub>3</sub>, w<sub>4</sub>가 상호 독립인 백색 정규분포 잡음이므로 다음과 같이 주어진다.

$$Q(t_{i-1}) = E\{u(t_{i-1}) u^T(t_{i-1})\} = \sigma_v^2 \cdot [1 - \exp(-2 \cdot \Delta t_i / \tau)] \cdot I \dots \dots \dots (38)$$

여기서 I는 단위행렬이다.

이번에는 자이로 편위율을 랜덤변수를 초기값으로 하는 편위된 Wiener 프로세스로 둔 경우,

(29) 식의 상태천이행렬 (State Transition Matrix) Φ(t<sub>i</sub>, t<sub>i-1</sub>)은 (28) 식과 동일하나 입력응답행렬 (Input Responce Matrix) G(t<sub>i</sub>, t<sub>i-1</sub>) 및 입력벡터 u(t<sub>i-1</sub>)은 다음과 같다.

$$G(t_i, t_{i-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (3,3) & (3,4) \\ \Delta t_i \cdot I & 0 \\ (3,3) & (3,4) \\ 0 & C(t_i) \\ (2,3) & (2,4) \\ 0 & I \\ (4,3) & (4,4) \end{pmatrix} \dots (39)$$

$$u^T(t_{i-1}) = [w_x, w_y, w_z, u_1, u_2, u_3, u_4] \dots \dots \dots (40)$$

여기서  $u_1, u_2, u_3, u_4$  는 (37) 식과 같고  $w_x, w_y, w_z$  는 서로 독립하고 상관함수가

$$\begin{aligned}
 E\{w_x(t_1) w_x(t_2)\} &= E\{w_y(t_1) w_y(t_2)\} \\
 &= E\{w_z(t_1) w_z(t_2)\} \\
 &= (\sigma_d^2/100) \cdot \sigma(t_1-t_2) \\
 &\dots\dots\dots (41)
 \end{aligned}$$

인 백색 정규분포 잡음이다. 따라서 입력벡터  $u(t_{i-1})$  의 상호분산행렬  $Q(t_{i-1})$  은 다음과 같다.

$$Q(t_{i-1}) = \begin{pmatrix} \sigma_d^2/100 \cdot I & 0 \\ (3,3) & (3,4) \\ 0 & \sigma_d^2 \cdot [1 - \exp(-2 \cdot \Delta t_i) / \tau] \cdot I \\ (4,3) & (4,4) \end{pmatrix} \dots\dots\dots (42)$$

2.1.5 측정방정식의 결정

측정치 (Measurements) 는 본래 실제시스템의 거동을 측정기구를 통해 받아 들이는 정보이나, 실제시스템을 구성할 수 없기 때문에 상태방정식에 포함된 가속도 적분기의 출력모델  $m_1(t_i)$  및  $m_2(t_i)$  를 측정하는 것으로 가정한다.

실제 측정기구인 가속도계의 분해도 (Magnitude Quantization Level)  $q$  를 감안한 잡음  $\bar{r}(t_i)$  를 고려하여 측정방정식을 구성한다.

$$Y(t_i) = H \cdot X(t_i) + \bar{r}(t_i) \dots\dots\dots (43)$$

여기서,

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{r}(t_i) = \begin{bmatrix} r_1(t_i) \\ r_2(t_i) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (44)$$

시퀀스 (Sequence)  $r_1(t_i)$  와  $r_2(t_i)$  는 아래와 같이 결정되며 서로 상관되지 않고 (Uncorrelated) 각각은 평균이 영 (Zero) 이고 분

산 (Variance) 이  $q^2/12$  인 균일분포랜덤 시퀀스이다.

(가)  $m_j(t_i) \geq 0$  이면,

$$r_j(t_i) = \text{MOD}[\{m_j(t_i) + q/2\}/q] - q/2 \dots\dots\dots (45)$$

(나)  $m_j(t_i) < 0$  이면,

$$r_j(t_i) = \text{MOD}[\{m_j(t_i) - q/2\}/q] + q/2 \dots\dots\dots (46)$$

따라서 측정잡음벡터  $\bar{r}(t_i)$  의 상호분산행렬  $R(t_i)$  는 다음과 같다.

$$R(t_i) = E\{\bar{r}(t_i)\bar{r}^T(t_i)\} = (q^2/12) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (47)$$

2.2 칼만필터

상태방정식 (29) 와 측정방정식 (43) 및 입력 상호분산행렬 (38), (42) 식과 측정잡음상호분산행렬 (47) 식을 적용할 이산형표준칼만필터방정식<sup>8)9)</sup> (Standard Kalman Filter Equations of Discrete Type) 을 구성해 보면, 추정의 예측 (Predictor Estimation) 과 필터의 추정은 각각 다음과 같고,

$$\hat{X}(t_i, t_{i-1}) = \Phi(t_i, t_{i-1}) \cdot \hat{X}(t_{i-1}) \dots\dots\dots (48)$$

$$\hat{X}(t_i) = \hat{X}(t_i, t_{i-1}) + K(t_i) \cdot [Y(t_i) - H \cdot \hat{X}(t_i, t_{i-1})] \dots\dots\dots (49)$$

오차상호분산예측행렬과 칼만이득행렬 및 오차분산행렬은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 P(t_i, t_{i-1}) &= \Phi(t_i, t_{i-1}) \cdot P(t_{i-1}) \cdot \Phi^T(t_i, t_{i-1}) \\
 &\quad + G(t_i, t_{i-1}) \cdot Q(t_{i-1}) \\
 &\quad \cdot G^T(t_i, t_{i-1}) \dots\dots\dots (50)
 \end{aligned}$$

$$K(t_i) = P(t_i, t_{i-1}) \cdot H^T \cdot [H \cdot P(t_i, t_{i-1}) \cdot H^T + R(t_i)]^{-1} \dots\dots\dots (51)$$



$$P(t_i) = [I - K(t_i) \cdot H] \cdot P(t_i, t_{i-1}) \dots (52)$$

- 지구자전 각속도  
:  $w = 7.2918 \times 10^{-5}$  rad./sec
- 중력 가속도 :  $g = 9.806 \text{m/sec}^2$

### 3. 시뮬레이션

시스템의 상태에 주어진 랜덤변수 및 계수들을 적절히 가정하여 좌표측 초기 직립문제를 컴퓨터에 의해 시뮬레이션 했다. 이에 사용된 초기 데이터들은 각각 다음과 같다.

#### 3.1 랜덤변수의 편차 및 계수의 가정

- 초기배열 오차각의 편차  
:  $\sigma_\theta = 0.5^\circ = 1800 \text{ arc sec.}$
- 자이로 편류절차 :  $\sigma_d = 0.1 \text{ meru.}$
- 흔들림 속도편차 :  $\sigma_v = 0.5 \text{ m/sec.}$
- 가속도 적분기의 분해도  
:  $q = 0.02 \text{ m/sec.}$
- 발사대 및 미사일의 고유 진동수  
:  $f_n = 0.25 \text{ Hz.}$
- 상관시간 (흔들림 속도와 위 스펙트럼 밴드폭의 역수)  
:  $\tau = 200 \text{ sec.}$
- 샘플링 주기  
:  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} = 1 \text{ sec}$
- 좌표계(O)의 방향  
:  $x_0$  -연직,  $y_0$  -정동,  $z_0$  -정북
- 위도 :  $\mu = 36.5^\circ$

#### 3.2 시뮬레이션 결과 및 고찰

그림 2는 (37) 식의  $w_1$  시퀀스이며,  $w_2, w_3, w_4$  및 (40) 식의  $w_x, w_y, w_z$  도 이와 유사한 형태의 서로 독립인 (Mutually Independent) 백색정규분포잡음이다. 이 잡음들은 임의적으로 선정되었으며, 이를 바탕으로 만든 (26) 식의 상관된 속도잡음모델 (Correlated Velocity Noise Model)  $w_1(t_i)$  는 그림 3에 점선으로 나타나 있다. (실선은 랜덤성분이 없는 경우이며, (27) 식의  $v_2(t_i)$  도 이와 유사한 형태임)

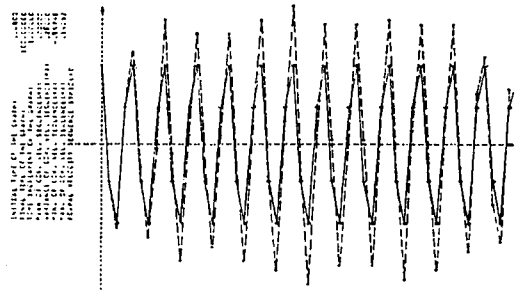


그림 3. 조화함수 (0)와 속도잡음모델 (\*)의 비교

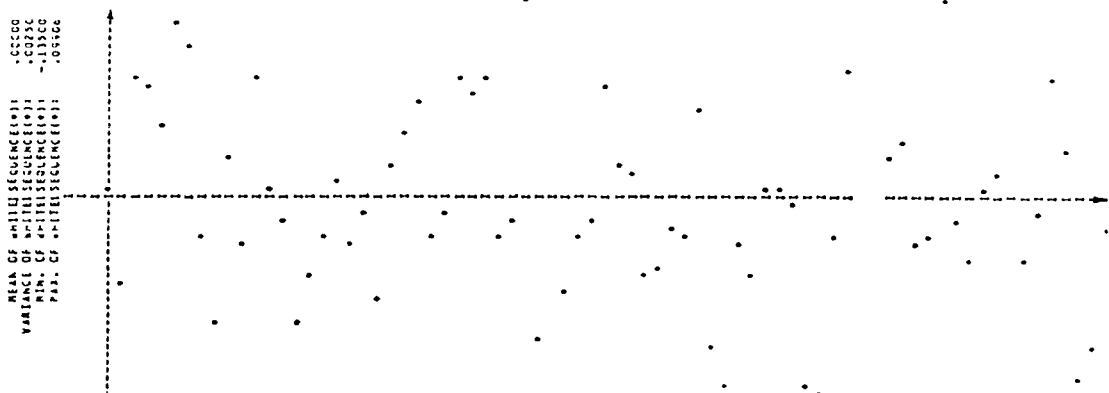


그림 2. 백색 정규분포잡음

아래 그림 4는  $r(t_0)$ 에  $0.5^\circ$ 를 인가하고, (22), (23), (24) 식에 의해 발생하는 상관된 속도잡음모델  $v_2(t)$ 를 주었을 때,  $y_1$  축 방향 가속도 적분기의 출력 (27) 식을 나타내고 있다.

이 그래프에서 진폭이 일정하지 않는 진동은 미사일의 흔들림 및 진동에 의한 것이며, 전체적으로 감소상태에 있는 것은 배열오차각  $r(t)$ 에 기인된 것이다.

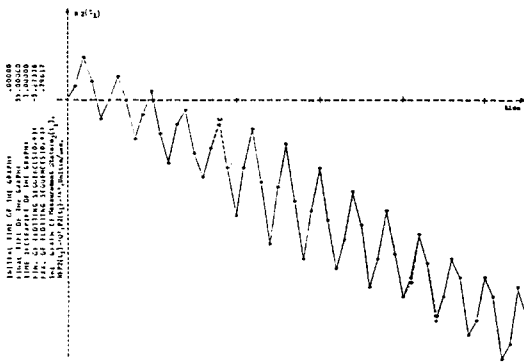


그림 4. 가속도 적분기의 출력

또 그 때의 측정잡음은 (45) 식 또는 (46) 식으로 표시되는데 그 모양은 그림 5와 같다. 이 잡음은 가속도 적분기의 분해도  $q$ 에 의해 결정되며  $-q/2 \leq r(t_i) < q/2$ 의 범위에서 균일하게 분포하고 있음을 볼 수 있다.

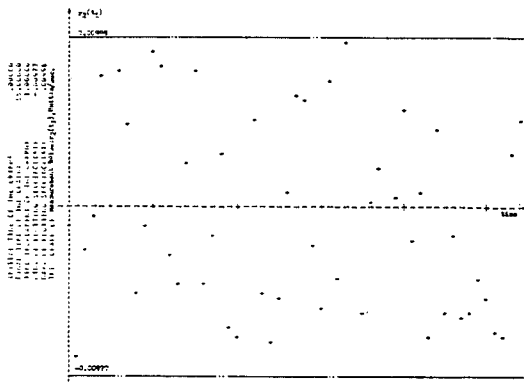
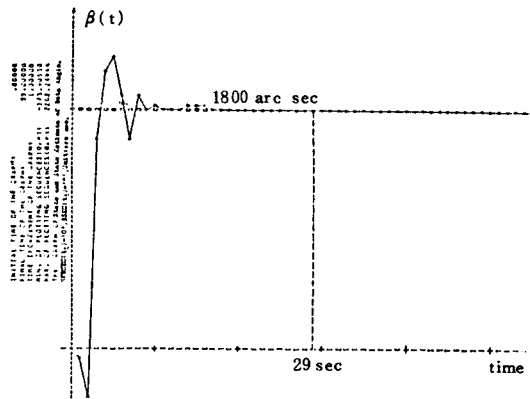


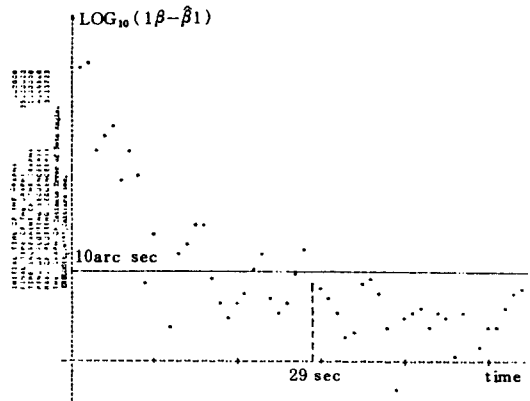
그림 5. 측정잡음모델

그림 6, 7은 미지의 적립오차각  $\beta, r$ 의 초기값으로  $0.5^\circ$ 를 인가했을 때의 필터의 추정 [(a) 그림]과 그 추정오차각의 거동 [(b) 그림]을 나타낸다.

특히 (b) 그림은 추정오차각의 절대값을 반로 그 용지에 그린 것으로서 필터 가동후,  $\beta$ 는 29초 [sec.],  $r$ 는 37초가 지나서는 추정오차각의 범위가 10 arc sec. 이내에 있음을 보여준다.

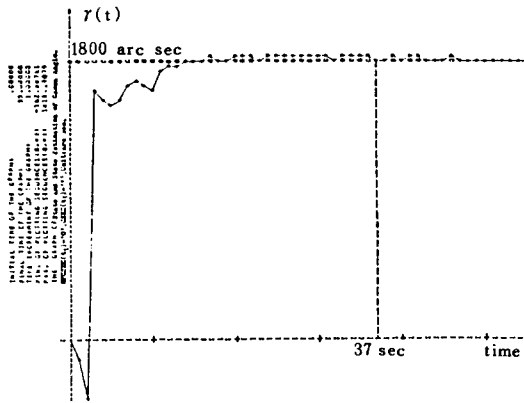


(a)

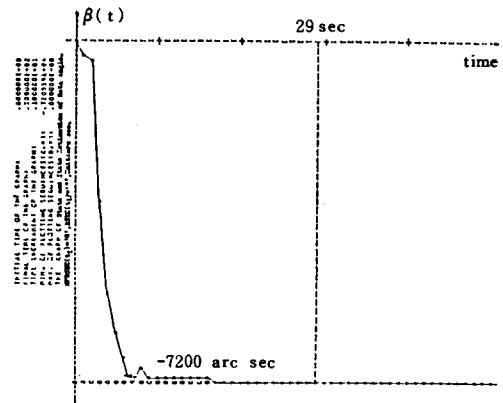


(b)

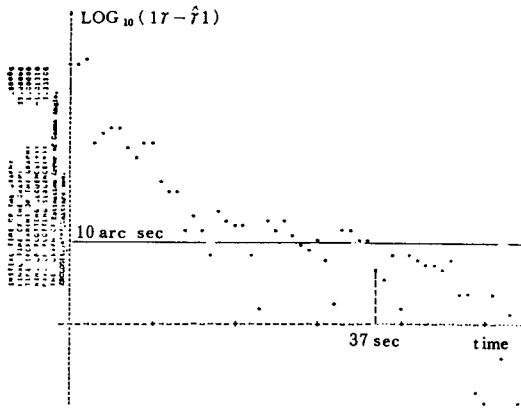
그림 6.  $\beta$ 각의 추정과 그 추정오차각의 거동



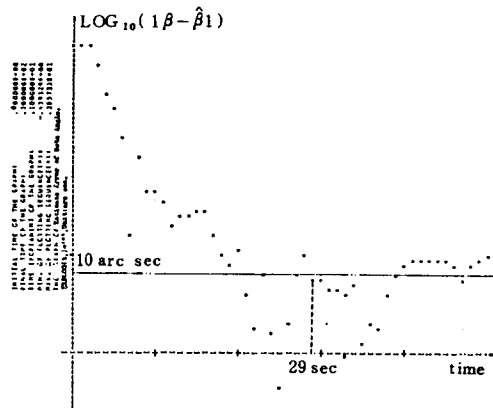
(a)



(a)



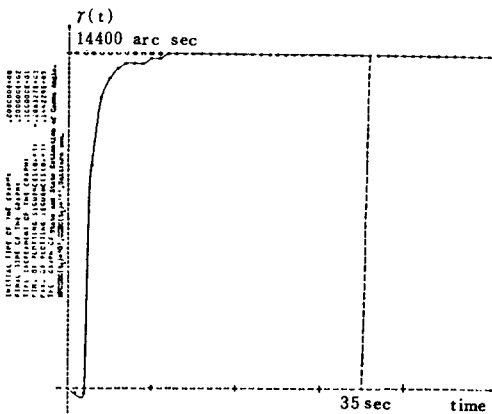
(b)



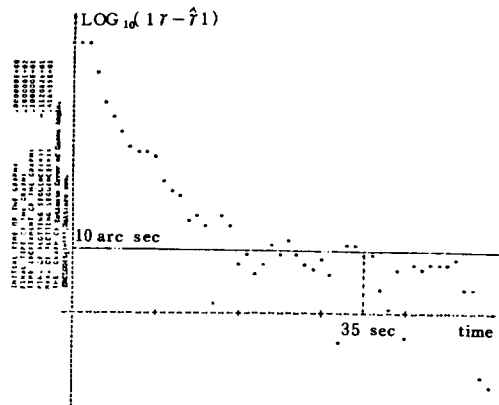
(b)

그림 7.  $r$ 각의 추정과 그 추정오차각의 거동

그림 8.  $\beta$ 각의 추정과 그 추정오차각의 거동



(a)



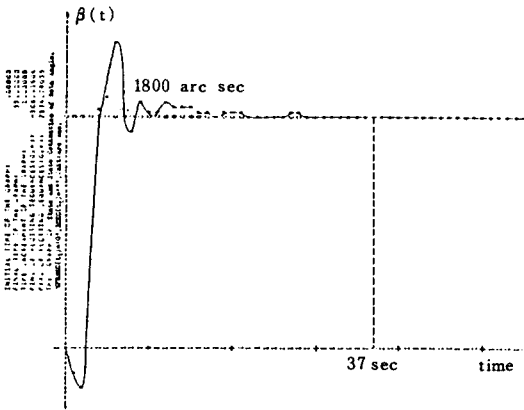
(b)

그림 9.  $r$ 각의 추정과 그 추정오차각의 거동

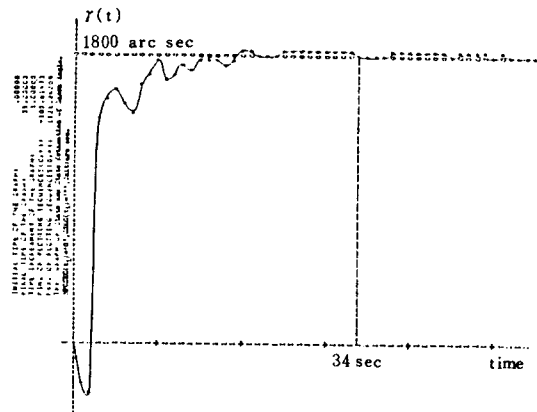
그림 8, 9의 (a), (b)는  $\beta(t_0)$  에  $-2^\circ$ ,  $\gamma(t_0)$  에  $4^\circ$ 를 인가한 경우인데, 이 경우는 필터의 모델에서 가정한 통계량 보다 훨씬 큰 초기값으로서 앞의 그래프와 비교해 볼 때  $\gamma$ 에는 변화가 거의 없고  $\beta$ 에는 추정오차각의 정상상태오차 (Steady State Error)가 다소 증가하고 있음을 볼 수 있다. 그 원인은 필터가 가속도 적분기의 출력을 이용하여 좌표계 (1)의 직립오차각을 추정하는 관계로 방위오차각  $\alpha$ 를 추정하지 못하고, 그림 1에서 알 수 있는 바와 같이  $\gamma$ 값이 오차를 가질 때만  $\beta$ 와 상

관된  $\alpha$ 값을 인식하게 되므로써  $\alpha$ 의 추정치의 실제값과 관계없이  $\hat{\gamma}$ 과 유사하게 된다는 사실 때문에,  $\hat{\alpha}$ 과 간접 관련된  $\hat{\beta}$ 이 직접적으로 관련된  $\hat{\gamma}$ 보다 정상상태 오차가 커진 것이다.

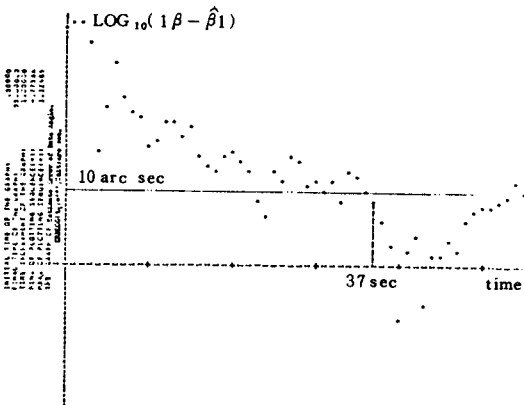
다음은 시스템 고유변수의 변화에 대해서 필터의 성능변화를 살펴보겠다. 그림 10, 11은 발사대 및 미사일 조합체의 고유진동수를 변화시킨 경우인데, 그림 6, 7에 비해 수렴시간이 조금 더 지연되고, 정상상태오차가 약간 더 커진 것을 볼 수 있다. 이와 같은 필터의 성능



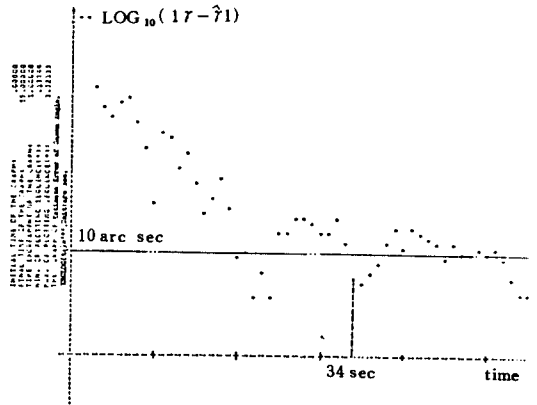
(a)



(a)



(b)



(b)

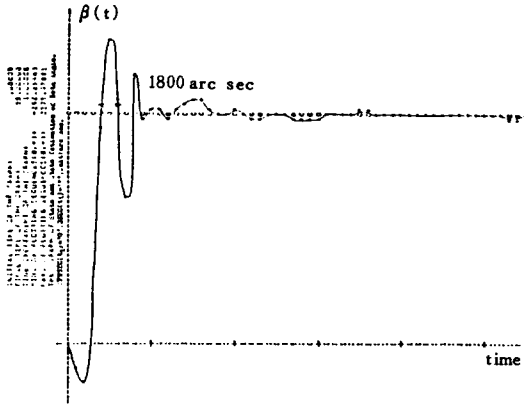
그림 10.  $f_n=0.2\text{Hz}$ 인 경우  $\beta$ 각의 추정과 그 추정오차각의 거동

그림 11.  $f_n=0.2\text{Hz}$ 인 경우  $\gamma$ 각의 추정과 그 추정오차각의 거동

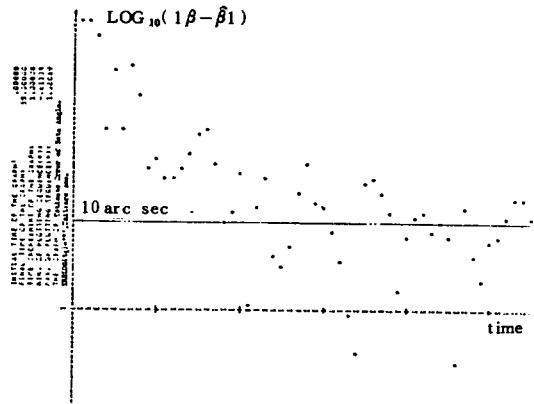
저하는 샘플링 주기를 조절하므로써 개선할 수 있을 것이다.

그림 12, 13은 상관시간  $\tau$ 를 20 초[sec.]로 했을 때의 결과이다.  $\tau$ 가 짧아지면 상대적으로 잡음의 밴드폭 (Band Width)이 넓어져

서 속도잡음의 모양이 상당히 불규칙하게 될 것이므로 그 때의 가속도 적분기의 출력 또한 매우 불규칙하게 되기 때문에 필터가 오차를 추정하는데 시간이 걸리게 된다.

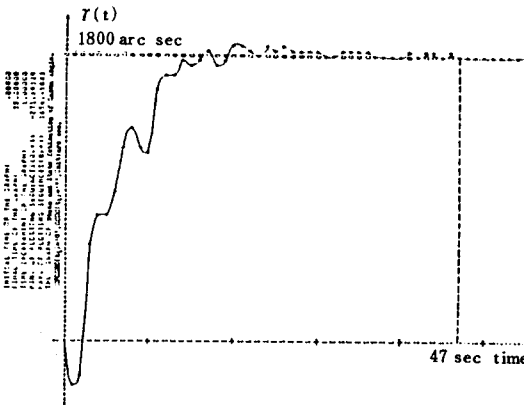


(a)

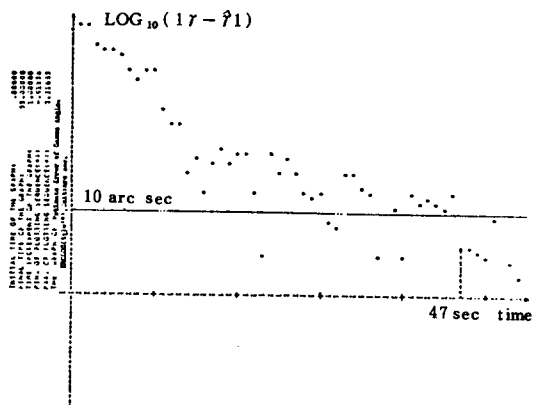


(b)

그림 12.  $\beta$ 각의 추정과 그 추정오차각의 거동



(a)



(b)

그림 13.  $\gamma$ 각의 추정과 그 추정오차각의 거동

이번에는 모델방정식 식(15)에서 자이로 편류율을 랜덤변수를 초기값으로 하는 편위된 Wiener 프로세스로 둔 경우에 대해서 고찰하겠다.

그림 14는 자이로 편류율을 랜덤변수를 초기

값으로 하는 편위된 Wiener 프로세스로 가정 한 경우의 변화모양이다. 그림 15, 16는  $\beta(t_0) = \gamma(t_0) = 0.5^\circ$ 를 인가했을 때의 필터의 추정과 그 추정오차각의 거동을 나타내는데, 그림 6, 7과 비교해 봐도 필터의 성능에 큰 변화

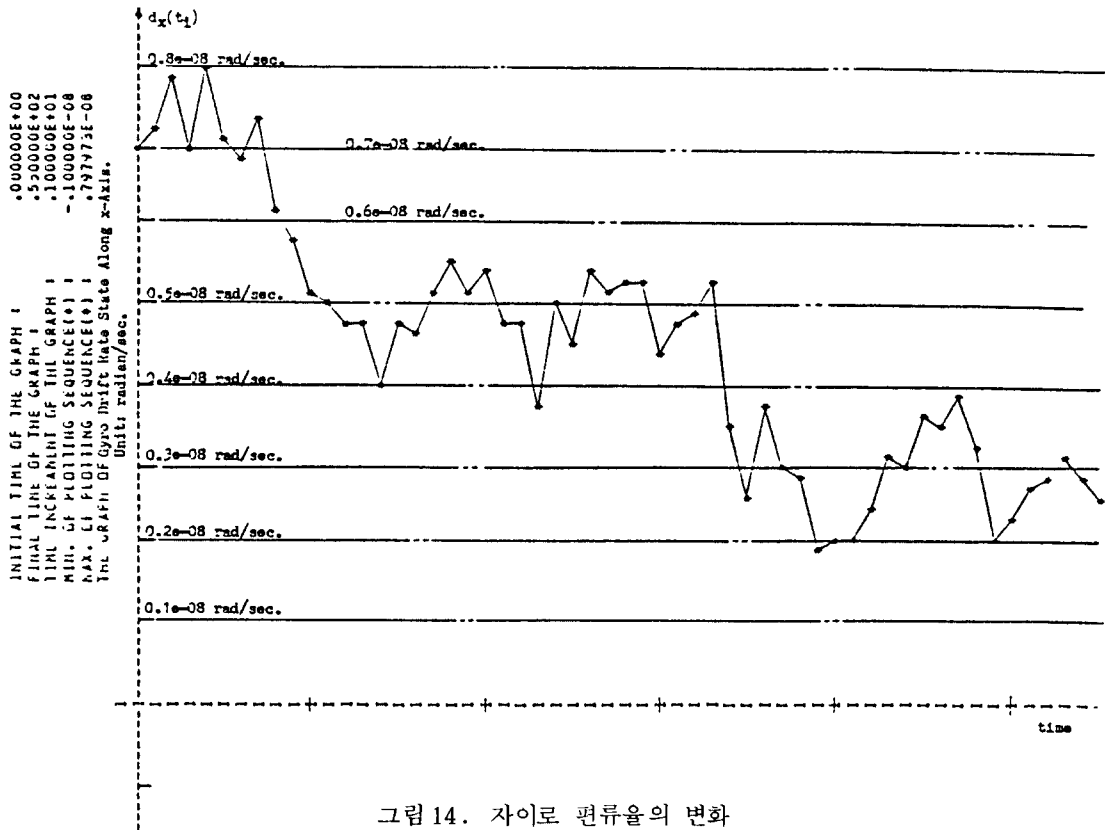


그림 14. 자이로 편류율의 변화

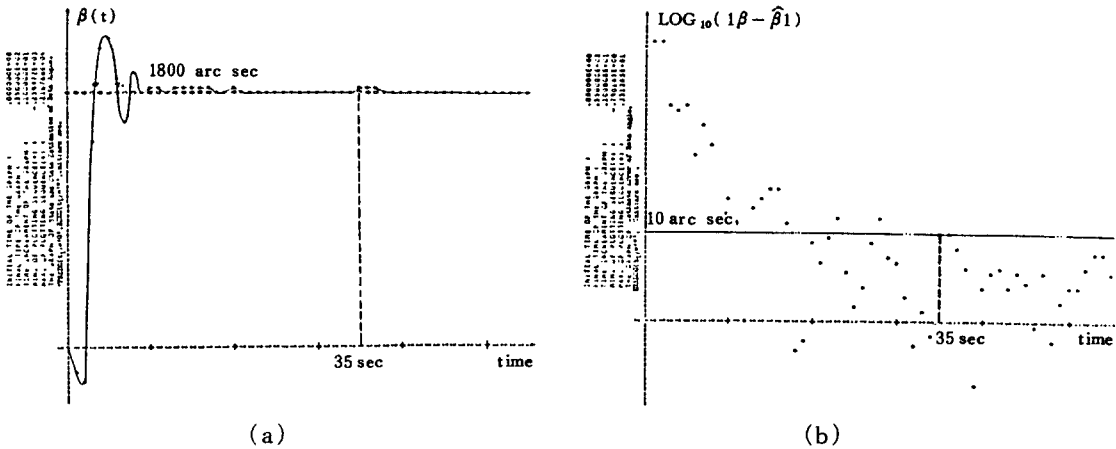
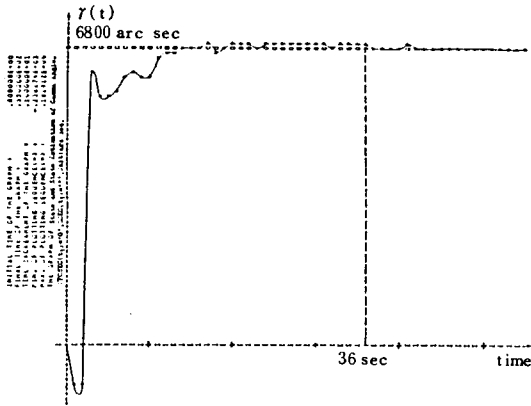


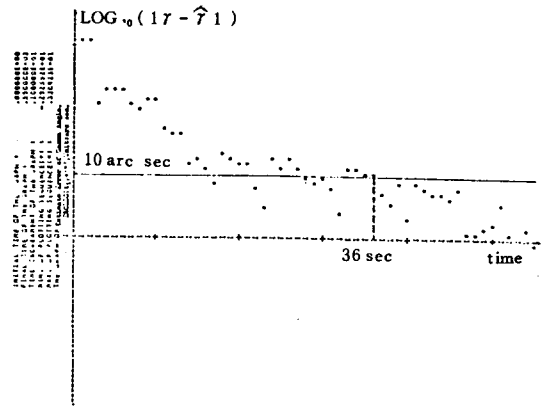
그림 15.  $\beta$ 각의 추정과 그 추정오차각의 거동

가 없음을 알 수 있다. 따라서 발사대와 미사일 조합체의 흔들림 및 진동을 주 잡음(Pr-

ncipal Noise)으로 할 경우, 자이로 편류율을 랜덤상수로 모델링하더라도 무방함을 알 수



(a)



(b)

그림 16.  $r$  각의 추정과 그 추정오차각의 거동

있다. 이상의 시뮬레이션 결과들을 컴퓨터가 프로그램을 수행하는데 소요되는 시간과 실제의 샘플링 시간을 비교해 볼때 실시간 응용이 가능하며, 모델자체가 시변(Time Varying)이기 때문에 Wiener Filter의 사용은 불가하다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 시스템모델의 단순화를 위한 네가지의 기본 가정과 자이로 편류율에 대한 모델링 및 가정된 랜덤 프로세스의 통계량을 근거로 미사일의 스트랩다운 관성항법장치(S-DINS)의 좌표축 초기직립 문제를 고찰한 결과 다음의 결론을 얻었다.

1. 배열오차각을 여러 값으로 인가했을 경우에도, 필터는 우수한 추정성능(Estimation Performance)을 나타냈다.
2. 자이로 편류율을 실제계에 더 유사하도록, 편위된 Wiener 프로세스로 모델링했을 때에도 필터의 성능은 여전히 우수함을 입증했다.
3. 시뮬레이션 과정에서 추천할 수 있는 사항은 SDINS의 시스템 컴퓨터에  $\beta, r$ 의 보정시간으로서 필터가동후 35~40초가 적당하며, 이 경우 직립오차각은 10 arc sec. 내·외가 된다.

4. 연구대상에 따라 모델시스템의 고유변수는 변하며, 사용되는 관성측정기구의 성능에 따라 모델시스템의 매개변수(Parameter)도 변하기 때문에, 이러한 변화에 따른 필터의 성능 분석과 그 개선 방향의 제시는 매우 중요하다.

본 연구는 '86년도 과학기술처의 특정연구 개발사업중 “정밀계측장치 제작에 따른 해석기법개발”의 지원을 받아 수행되었음에 감사드립니다.

#### < 참고 문헌 >

1. O'Donnell C.F., *Inertial Navigation Analysis and Design*, pp.10-12, McGraw-Hill, 1961, New York.
2. R.P.G. Collinson, “Strapdown Inertial Navigation System,” *Journal of Navigation*, Vol.26, pp.1-6, July 1973.
3. V. Krishnan, Kurt Grobert, “Initial Alignment of a Gimballess Inertial Navigation System,” *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol.15, pp.667-671, Dec. 1970.
4. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, pp.129-132, Addison-Wesley, 1980.

5. L. Meirovitch, *Methods of Analytical Dynamics*, pp.104-108, McGraw-Hill, 1970.
  6. A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, 1984.
  7. A.H. Jazwinski, *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, 1970.
  8. Arthur Gelb, *Applied Optimal Estimation*, The MIT Press, 1974.
  9. E.B. Crocker, Leonard Rabins, "Application of Kalman Filtering Techniques to Strap-down System Initial Alignment," AGARD CP-112, pp.493-512, 1975.
  10. S.C. Garg, L.D. Morrow, R. Mamen, "Strap-down Navigation Technology: A Literature Survey," *Journal of Guidance and Control*, Vol.1, No.3, pp.161-172, May-June 1978.
  11. Byron S. Gottfried, *Elements of Stochastic Process Simulation*, pp.25-26 & 96-97, Prentice Hall INC., Englewood Cliffs, 1984.
-