

回轉慣性 效果를 고려한 車輪의 動特性

Dynamic Characteristics of Train Wheel with Considering
the Effects of Rotatory Inertia

金 光 植*, 朴 玟 泰**
K. S. Kim, M. T. Park

ABSTRACT

This study is a part of the research on the coupled vibration of train wheel with stepped thickness and rail. The research was conducted for the purpose of examining the dynamic characteristics of train wheel which considered the effect of rotatory inertia and preventing the vibrations of the high speed railway.

The In-plane compressive stresses were computed by the rotation of train wheel and the reaction depending on the condition of rolling. The equation of transverse vibration of the train wheel was obtained by Lagrange's equation.

As a result of study, it is known that the effect of rotatory inertia and the increment of thickness ratio, \bar{h} , decrease frequency but the increment of radius ratio, \bar{r} , increase frequency.

記 號 說 明

- | | |
|--|---|
| <p>a : 환형원판의 내원주 반경</p> <p>b_1 : 환형원판의 외원주 반경</p> <p>b : 접촉면의 단반경</p> <p>c : 웨브의 립의 경계면까지 반경</p> <p>d : 차륜의 지름</p> <p>D_w : 웨브와 굽힘 강성 ($D_w = \frac{E_1 h_1^3}{12(1-\nu^2)}$)</p> <p>$E_1, E_2$: 웨브의 립의 탄성계수</p> <p>h_1, h_2 : 웨브와 립의 두께</p> <p>i, j : 하첨자</p> <p>I, J : 립에 고정된 주축의 질량관성 모멘트</p> | <p>n : 결절(結節)의 직경수(nodal diameter)</p> <p>N : 철로로부터의 반력에 의한 In-plane 압축응력</p> <p>r : 반 경</p> <p>R : 차륜과 철로의 접촉점에서의 반력</p> <p>s : 결절(結節)의 원주수(nodal circle)</p> <p>t : 시 간</p> <p>T_w, T_r : 웨브와 립의 운동에너지</p> <p>V_w : 웨브의 포텐셜에너지</p> <p>w : 환형원판의 작은 처짐</p> <p>$W(r)$: 고유진동형</p> <p>ν_1, ν_2 : 웨브와 립의 포와송 비</p> |
|--|---|

* 정회원, 한양대학교 정밀기계공학과

** 정회원, 한양대학교 대학원 정밀기계공학과

- ρ_1, ρ_2 : 웨브와 림의 밀도
- σ_{r1} : 반경방향의 응력
- $\sigma_{\theta 1}$: 원주방향의 응력
- α_1 : OX 축에 대한 각변위
- α_2 : OY 축에 대한 각변위
- ω_j : 차륜의 고유진동수
- Ω : 차륜의 회전수
- θ_1 : OX_1 축에 대한 각변위
- θ_2 : OY_2 축에 대한 각변위

1. 緒 論

고속차량의 정상주행시에 소음이 가장 크게 발생하는 부분이 車輪과 鐵路로 이루어진 구름장치이고 이 중에서 소음의 주원인은 車輪의 橫振動임이 널리 알려져 있으나^{1,2,3)} 복잡한 조건하에서 발생하는 이 운동을 정확히 해석하기에는 어려움이 많아 세계적으로 계속해서 연구가 진행되고 있다.

A. W. Leissa^{4,5,6)}는 1969년 이후로 여러 가지 형상의 板振動에 대한 개요를 단계적으로 수집, 정리하고 있으며 R. V. Southwell⁷⁾, P. N. Raju⁸⁾ 그리고 S. M. Vogel and D. W. Skinner⁹⁾ 등은 균일한 두께의 환형원판에 대한 振動 해석을 하였다. J. Prescott¹⁰⁾는 원판의 회전에 의한 Inplane 압축응력을 받으며 횡방향으로 작은 처짐을 갖는 환형원판의 운동방정식을 세워 에너지 방정식으로 유도하였으며 H. C. Loh and J. F. Carney III¹¹⁾ 등은 이에 대한 진동수 해석을 여러가지 경계조건하에서 Frobenius 방법을 사용하여 시도하였다. A. Losen and A. Libai¹²⁾와 G. K. Ramaiah^{13,14)}는 내원주와 외원주에 일정한 In-plane 압축응력을 받는 균일한 두께의 환형원판에 대한 좌굴과 고유진동수에 대한 연구를 하였다. R. I. Sann¹⁵⁾과 W. E. Red¹⁶⁾는 외원주상에 폭이 좁은 곡선보가 보강된 gyroscope 回轉子の 振動 응답을 조사하였으며 J. S. Burdess¹⁷⁾와 C. H. J. Fox and J. S. Burdess¹⁸⁾는 계단진 두께를 갖는 환형원판의 동특성을 Lagrange 방정식을 세워 해석하였다.

본 논문에서는 車輪을 동방성, 균질재료라고

가정하였으며 웨브(web)와 림(rim)의 두께가 서로 다른 환형원판으로써 내원주는 차축에 의하여 고정되고 외원주는 자유라고 가정하였다. 외원주상의 한 점에서 鐵路와의 구름조건에 따라 변하는 반경방향의 반력에 의한 In-plane 압축응력과 車輪의 回轉에 의한 In-plane 압축응력을 유도하고 回轉慣性 效果를 고려한 두꺼운 환형원판의 橫振動 방정식을 Lagrange 방정식으로 세워서 In-plane 압축응력의 영향과 웨브와 림의 두께비와 반경비가 車輪의 固有振動數에 미치는 영향을 분석하고자 한다.

2. 理論 解析

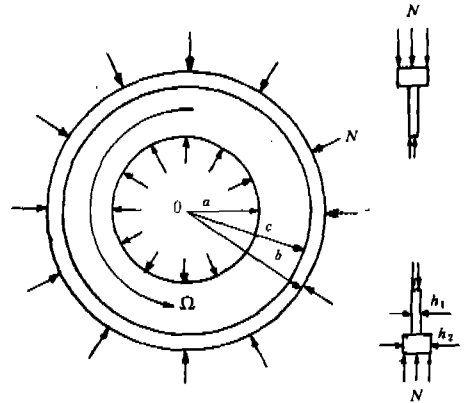


Fig. 1 Annular plate with stepped thickness under In-plane compressive stresses

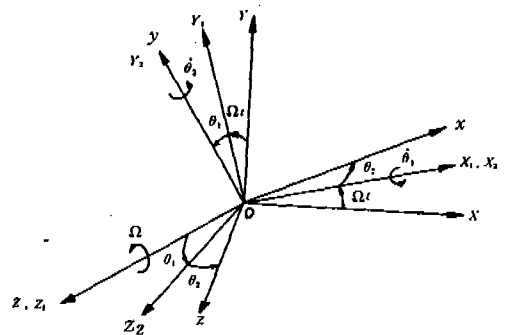


Fig. 2 System axes

Fig. 2에서 $OXYZ$ 는 고정좌표계로 가정하고 원점 O 는 환형원판의 질량중심에 고정시키며 OX, OY, OZ 축들은 초기의 主軸이 되

도록 하였다. 回轉좌표계를 이용하여 Z축이 Ω 로, X_1 축이 $\dot{\theta}_1$ 로 그리고 Y_2 축이 $\dot{\theta}_2$ 로 회전하도록 하여 $oxyz$ 좌표계의 각축들이 립상에 고정된 主軸이 되도록 하였다. 또 OX_1Y_1 평면에 극좌표(r, θ)를 잡았으며 Z_1 축 방향의 작은 처짐을 w 라고 하였다. Fig. 2로부터 립상의 主軸들에 대한 角速度 성분은

$$\omega_x = \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 - \Omega \cos \theta_1 \sin \theta_2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\omega_y = \dot{\theta}_2 + \Omega \sin \theta_1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\omega_z = \Omega \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

이 된다. 윗 식들에서 미소 각변위 θ_1, θ_2 에 대하여 $\sin \theta_1 \approx \theta_1, \sin \theta_2 \approx \theta_2, \cos \theta_1 \approx 1 - \frac{\theta_1^2}{2}$ 그리고 $\cos \theta_2 \approx 1 - \frac{\theta_2^2}{2}$ 이라고 가정하면 립의 운동에너지는¹⁹⁾

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{1}{2} I \omega_x^2 + \frac{1}{2} I \omega_y^2 + \frac{1}{2} J \omega_z^2 \\ &= \frac{1}{2} [I(\dot{\theta}_1 - \Omega \theta_2)^2 + I(\dot{\theta}_2 + \Omega \theta_1)^2 + \\ &\quad I(\Omega^2 - \Omega^2 \theta_1^2 - \Omega^2 \theta_2^2 + 2\Omega \dot{\theta}_1 \theta_2)] \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

가 되고 웨브의 운동에너지는

$$\begin{aligned} T_w &= \frac{1}{2} \rho h_1 \int_0^{2\pi} \int_a^c \{ (r \Omega \sin \theta)^2 + (r \Omega \cos \theta)^2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \} r dr d\theta \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

가 된다. 그리고 환형원판의 변형률에너지는 포함하는 포텐셜에너지는 다음과 같다.¹⁰⁾

$$\begin{aligned} V_w &= \frac{h_1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^c \left[\sigma_{r1} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \sigma_{\theta 1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\ &\quad r dr d\theta \\ &\quad + \frac{D_w}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^c \left[\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right. \\ &\quad + 2\nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + 2(1-\nu_1) \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] r dr d\theta \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

여기서 반경방향의 In-plane 압축응력, σ_{r1} 과 원주방향의 In-plane 압축응력, $\sigma_{\theta 1}$ 은 웨브와 립 경계면에서의 연속조건을 이용하여 구하면 다음과 같다²⁰⁾ 이 때 σ_c 는 경계면응력이다.

$$\sigma_{r1} = \frac{\sigma_c \cdot c^2}{(c^2 - a^2)} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\rho_1 \Omega^2 (3 + \nu_1)}{8}$$

$$(c^2 + a^2 - r^2 - \frac{a^2 \cdot c^2}{r^2}) \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta 1} &= \frac{\sigma_c \cdot c^2}{(c^2 - a^2)} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\rho_1 \Omega^2 (1 + 3\nu_1)}{8} r^2 \\ &\quad + \frac{\rho_1 \Omega^2 (3 + \nu_1)}{8} (c^2 + a^2 + \frac{a^2 \cdot c^2}{r^2}) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$\sigma_c = \frac{A}{B} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\bar{h} (c^2 - a^2)}{8} \{ \rho_2 \Omega^2 E_1 (b^2 - c^2) [(3 + \nu_2) \\ &\quad (1 - \nu_2^2)(b^2 + c^2) - (1 - \nu_2^2)c^2 + (3 + \nu_2) \\ &\quad (1 + \nu_2) \cdot b^2] - 16 \cdot N \cdot b^2 \cdot E_1 + \rho_1 \Omega^2 E_2 \\ &\quad (b^2 - c^2) [(1 - \nu_1^2) \cdot c^2 - (3 + \nu_1)(1 - \nu_1) \\ &\quad (c^2 - a^2) + (3 + \nu_1)(1 + \nu_1) a^2] \} \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= E_2 \cdot \bar{h} (b^2 - c^2) [(1 - \nu_1) \cdot c^2 + (1 + \nu_1) a^2] \\ &\quad + E_1 (c^2 - a^2) [(1 - \nu_2) \cdot c^2 + (1 + \nu_2) \cdot b^2] \\ &\quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

경계조건은 내원주에서 차축에 의하여 고정되고 웨브와 립의 경계면에서 웨브의 처짐과 기울기가 립의 운동에 의하여 구속되므로 다음과 같이 가정한다.

i) $r = a$ 일 때
 $w = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

ii) $r = c$ 일 때
 $w = c \cdot (\theta_1 \sin \theta - \theta_2 \cos \theta) \quad \dots\dots\dots (14)$

$$c \cdot \frac{\partial w}{\partial r} = w \quad \dots\dots\dots (15)$$

위의 조건들을 만족하는 처짐 w 를

$$w = W(r) (\theta_1 \sin \theta - \theta_2 \cos \theta) \quad \dots\dots\dots (16)$$

이라 하여 식(12)~(15)에 대입한 후 환형원판이 OX_1 축에 대하여 단위회전할 때의 정적처짐의 식으로 가정하면²¹⁾ $W(r)$ 는 $n=1, S=1$ 에 대하여 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W(r) &= \frac{2(c^2 + a^2) \cdot r \cdot \ln \left(\frac{r}{a} \right) - \frac{1}{r} (r^2 + c^2)(r^2 - a^2)}{2[a^2 \{ 1 + \ln \left(\frac{c}{a} \right) \} + c^2 \{ \ln \left(\frac{c}{a} \right) - 1 \}]} \\ &\quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

각변위 θ_1, θ_2 를 고정좌표 $OXYZ$ 의 OX, OY 축에 대한 각변위 α_1, α_2 의 식으로 변환시키면

$$\alpha_1 = \theta_1 \cos \Omega t - \theta_2 \sin \Omega t \dots\dots\dots (18)$$

$$\alpha_2 = \theta_1 \sin \Omega t + \theta_2 \cos \Omega t \dots\dots\dots (19)$$

이 되고 식(18)과 (19)를 식(4), (5), (6)에 각각 대입하여 정리하면

$$T_r = \frac{1}{2} [I(\dot{\alpha}_1 \cos \Omega t + \dot{\alpha}_2 \sin \Omega t)^2 + I(-\dot{\alpha}_1 \sin \Omega t + \dot{\alpha}_2 \cos \Omega t)^2 + J\{\Omega^2 - \Omega^2(\alpha_1 \cos \Omega t + \alpha_2 \sin \Omega t)^2 - \Omega^2(-\alpha_1 \sin \Omega t + \alpha_2 \cos \Omega t)^2 + 2\Omega(\dot{\alpha}_1 \cos \Omega t - \Omega\alpha_1 \sin \Omega t + \dot{\alpha}_2 \sin \Omega t + \Omega\alpha_2 \cos \Omega t)(-\alpha_1 \sin \Omega t + \alpha_2 \cos \Omega t)\}] \dots\dots\dots (20)$$

$$T_w = \frac{\pi \rho_1 h_1}{2} \int_a^c \{ 2r^2 \Omega^2 + W^2(\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2 + \alpha_1^2 \Omega^2 + \alpha_2^2 \Omega^2 + 2\dot{\alpha}_1 \alpha_2 \Omega - 2\alpha_1 \dot{\alpha}_2 \Omega) \} r dr \dots (21)$$

$$V_w = \frac{D_w}{2} \pi (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \int_a^c \{ r \left(\frac{d^2 W}{dr^2} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{dW}{dr} - \frac{W}{r} \right)^2 + 2\nu_1 \frac{d^2 W}{dr^2} \left(\frac{dW}{dr} - \frac{W}{r} \right) + \frac{2}{r} (1 - \nu_1) \left(\frac{dW}{dr} - \frac{W}{r} \right)^2 \} dr + \frac{\pi h_1}{2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \int_a^c [\sigma_{r1} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2 + \sigma_{\theta 1} \left(\frac{W}{r} \right)^2] r dr \dots\dots\dots (22)$$

이 된다. 식(19)~(22)로부터 Lagrangian $L = T_r + T_w - V_w$ 를 구하여, Lagrange 방정식

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = 0 \dots\dots\dots (23)$$

에 대입하면 고정좌표계 $OXYZ$ 에 대한 운동방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$(I + I_1) \ddot{\alpha}_1 + \Omega(J + 2I_1) \dot{\alpha}_2 + (I_2 - \Omega^2 I_1 + I_3) \alpha_1 = 0 \dots\dots\dots (24)$$

$$(I + I_1) \ddot{\alpha}_2 - \Omega(J + 2I_1) \dot{\alpha}_1 + (I_2 - \Omega^2 I_1 + I_3) \alpha_2 = 0 \dots\dots\dots (25)$$

$$I_1 = \pi \rho_1 h_1 \int_a^c r W^2 dr \dots\dots\dots (26)$$

$$I_2 = \pi D_w \int_a^c \left[r \left(\frac{d^2 W}{dr^2} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{dW}{dr} - \frac{W}{r} \right)^2 + 2\nu_1 \frac{d^2 W}{dr^2} \left(\frac{dW}{dr} - \frac{W}{r} \right) + 2 \frac{(1 - \nu_1)}{r} \left(\frac{dW}{dr} - \frac{W}{r} \right)^2 \right] dr \dots\dots\dots (27)$$

$$I_3 = \pi h_1 \int_a^c [\sigma_{r1} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2 + \sigma_{\theta 1} \left(\frac{W}{r} \right)^2] r dr \dots\dots (28)$$

식(24)와 (25)의 연립미분방정식을 풀기 위해서

$$\alpha_1 = \sum_{j=1}^2 \alpha_{oj} \sin(\omega_j t + \eta_j) \dots\dots\dots (29)$$

$$\alpha_2 = \sum_{j=1}^2 \lambda_j \alpha_{oj} \cos(\omega_j t + \eta_j) \dots\dots\dots (30)$$

라고 가정하여 식(24)와 (25)에 대입한 후 진동수 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\omega_j = \frac{\Omega(J + 2I_1)}{2(I + I_1)} \left[1 \pm \left\{ 1 + \frac{4(I + I_1)(I_2 - \Omega^2 I_1 + I_3)}{\Omega^2 (J + 2I_1)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \dots (31)$$

3. 數 值 解 析 및 考 察

실제 車輪의 1/6 크기로 형상화한 계단진 두께를 갖는 환형원판의 림두께가 외원주 반경의 1/10 보다 상당히 큰 값을 가지므로 림의 回轉慣性 效果를 고려하여 진동수 해석을 하고자 한다. 해석에 사용한 수치는 다음과 같다.

$$E_1 = E_2 = 2.1 \times 10^{10} \text{ kgf/m}^2$$

$$\rho_1 = \rho_2 = 7800 \text{ kgf/m}^3$$

$$\nu_1 = \nu_2 = 0.3$$

$$h_2 = 0.02 \text{ m}$$

$$a = 0.025 \text{ m}$$

$$b = 0.075 \text{ m}$$

계산은 IBM PC/370 XT를 이용하였으며 식(26)~(28)을 Simpson법칙을 사용하여 적분한 후 식(31)에 대입하여 진동수를 구하였다. 이 때 얻어지는 2개의 진동수 중에서 차륜의 회전속

도가 1600 rpm 정도의 저속회전이므로 回轉과 旋回의 方向이 같을 때 나타나는 높은 값 (higher frequency)만 고려하였다.²²⁾ 식(10)에 주어진 In-plane 압축응력 N 은 車輪과 鐵路의 접촉에 의하여 발생하는 반력 R 을 Hertz의 접촉이론과 점 하중으로 인한 원주상의 분포응력이론을 이용하여 $N = \frac{2R}{\pi^2 b_1 d}$ 로 계산하였다.²⁰⁾ 차량속도에 비례하는 車輪의 回轉速度가 1600 rpm (실제 차량속도 271 km/hr)까지 변화시켰으며 鐵路로부터의 반력 R 은 구름 조건에 따라 변화하는 動的荷重을 고려하여 330 kgf까지 변화시켰다. 웨브두께에 대한 림의 두께비는 $h = \frac{h_2}{h_1}$ 라 하였고, 외원주 반경에 대한 경계면까지의 반경비는 $\bar{r} = \frac{b-c}{b}$ 라고 하여 h_1 과 c 의 값을 변화시켰다.

Fig. 3은 $R=0$ kgf일 때 \bar{h} 의 변화에 대한 진동수 분포인데, $\Omega = 1600$ rpm까지 증가시킴에 의하여 각 \bar{h} 에 대한 진동수 증가는 약 27 Hz 정도로 균일하게 변화하였으며 \bar{h} 가 증가할수록 진동수 감소율이 낮아졌다. Fig. 4는 $\Omega = 0$ rpm일 때 \bar{h} 에 대한 진동수 분포인데 $R=330$ kgf까지 증가시킴에 따라 각 \bar{h} 에서

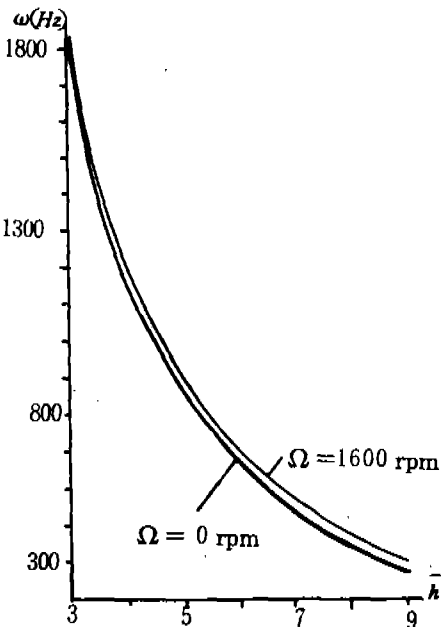


Fig. 3 Variation of frequency with \bar{h} , Ω when $R=0$, $\bar{r}=0.2$

진동수 감소는 약 7~21 Hz 정도이며 \bar{h} 가 클수록 하중에 의한 진동수 감소폭이 커졌다.

Fig. 5는 $R=0$ kgf일 때 \bar{r} 에 대한 진동수 분포인데, $\Omega = 1600$ rpm까지 증가시킴에 따라 각 \bar{r} 에서 진동수 증가는 약 27 Hz 정도로 균일하게 변화하였으며 \bar{r} 가 증가할수록 진동

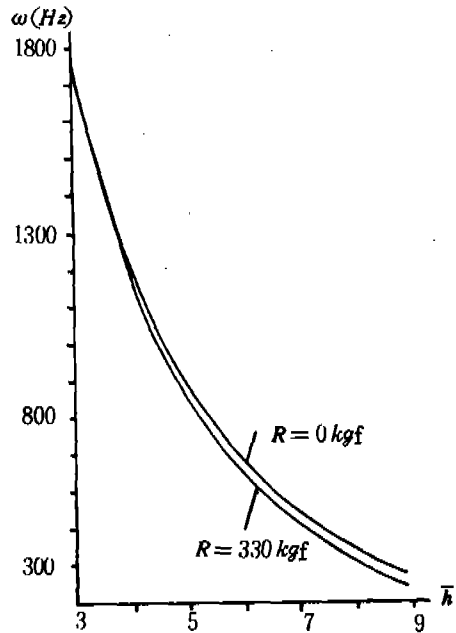


Fig. 4 Variation of frequency with \bar{h} , R when $\Omega=0$, $\bar{r}=0.2$

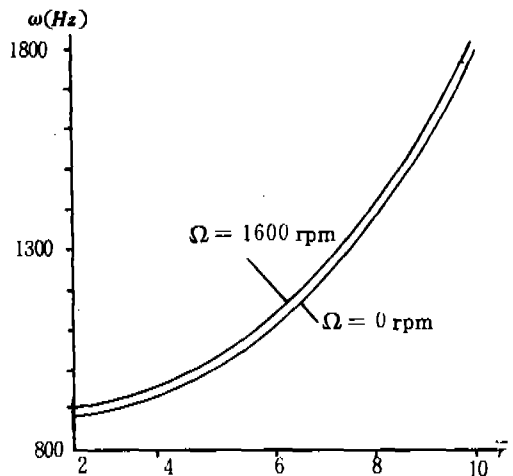


Fig. 5 Variation of frequency with \bar{r} , Ω when $R=0$, $\bar{h}=2.0$

수 증가율이 높아졌다. Fig. 6 은 $\Omega = \text{rpm}$ 일 때 \bar{r} 에 대한 진동수 분포인데 $R = 330 \text{ kgf}$ 까지 증가시킴에 따라 각 \bar{r} 에서 진동수 감소는 약 1 ~ 10 Hz 정도이며 \bar{r} 가 클수록 반력에 의한 진동수 감소폭이 적어졌다. Table 1 은 실

제 크기의 1/6로 형상화한 차륜에서 $n = 1$ 일 때의 진동수 분포인데 $R = 330 \text{ kgf}$ 까지 증가시킴에 따라 진동수가 약 6 Hz 정도 감소하고, $\Omega = 1600 \text{ rpm}$ 까지 증가시킴에 따라 진동수는 약 20 Hz 정도 증가함을 알 수 있다. Fig. 7 은

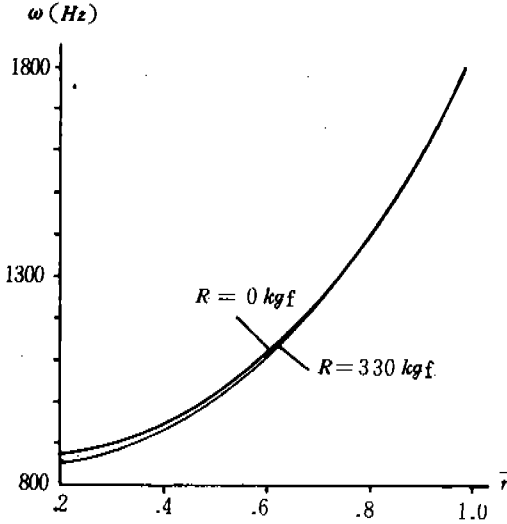


Fig. 6 Variation of frequency with \bar{r} , R when $\Omega = 0$, $\bar{h} = 2.0$

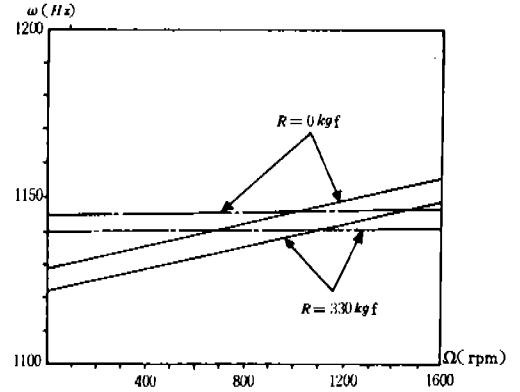


Fig. 7 Variation of frequency with Ω , R when $n = 1$

— ; annular plate which considered the effect of rotary inertia
 - - - ; annular plate which neglected the effect of rotary inertia

Table 1 Natural frequencies of annular plate which

$R \backslash \Omega$	0	400	800	1200	1600
0	1128.59	1135.19	1141.85	1148.56	1155.32
30	1127.29	1133.90	1140.56	1147.27	1154.03
60	1126.54	1133.14	1139.80	1146.51	1153.27
90	1125.90	1132.51	1139.16	1145.88	1152.64
120	1125.33	1131.94	1138.59	1145.31	1152.07
150	1124.81	1131.41	1138.07	1144.78	1151.55
180	1124.32	1130.93	1137.59	1144.29	1151.06
210	1123.86	1130.46	1137.12	1143.84	1150.60
240	1123.42	1130.03	1136.68	1143.39	1150.16
270	1122.99	1129.60	1136.26	1142.97	1149.74
300	1122.58	1129.19	1135.85	1142.56	1149.33
330	1122.19	1127.80	1135.45	1142.17	1148.94

회전관성을 고려한 경우와 고려하지 않은 경우²⁰⁾의 진동수 변화를 나타낸 것인데 회전관성을 고려하지 않은 경우는 반력에 의한 진동수 변화가 크게 나타나지만 회전관성을 고려한 경우는 반력보다는 오히려 회전속도의 영향이 더 크게 작용함을 알 수 있다.

4. 結 論

실제 차륜에서 림의 두께가 외원주 반경에 비하여 1/10보다 상당히 큰 값을 가지므로 회전관성 효과를 고려한 진동수 방정식을 세워 차륜의 회전속도와 접촉반력에 의한 In-plane 압축응력이 차륜의 진동수에 미치는 영향을 고찰해 본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 두께비(\bar{h})를 증가시키에 따라 진동수는 감소하였으며 차륜의 회전속도 Ω 의 변화에 대한 진동수 증가율은 일정하였으나 반력, R 에 의한 진동수 감소율은 \bar{h} 가 증가할수록 높아졌다.

2) 반경비(\bar{r})를 증가시키에 따라 진동수는 증가하였으며 차륜의 회전속도의 변화에 대한 진동수 증가율은 일정하였으나 반력에 의한 진동수 감소율은 \bar{r} 가 증가할수록 낮아졌다.

3) 실제 크기의 1/6로 형상화한 차륜에 있어서 회전관성 효과는 고유진동수를 감소시키는 요인이 되었으며 회전속도에 의한 고유진동수의 변화율이 회전관성 효과를 고려하지 않은 경우보다 크게 높아졌다.

REFERENCE

- 1) P.J. Remington, "Wheel/Rail Noise-Part I: Characterization of the Wheel/Rail Dynamic System", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 46, No. 3, pp. 359-379, 1976.
- 2) M.J. Rudd, "Wheel/Rail Noise-Part II: Wheel Squeal", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 46, No. 3, pp. 381-394, 1976.

- 3) P.J. Remington, "Wheel/Rail Noise-Part IV: Rolling Noise", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 46, No. 3, pp. 419-436, 1976.
- 4) A.W. Leissa, "Vibration Plates", NASA SP-160, 1960.
- 5) A.W. Leissa, "Recent Research in Plate Vibrations, 1973-1976: Classical Theory", *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 9, pp. 13-34, 1977.
- 6) A.W. Leissa, "Plate Vibration Research, 1976-1980: Complicated Effects" *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 13, pp. 19-36, 1981.
- 7) R.V. Southwell, "On the Free Transverse Vibrations of a Uniform Circular Disc Clamped at its Center", *Proceedings of the Royal Society*, Vol. 101, pp. 133, 1922.
- 8) P.N. Raju, "Vibrations of Annular Plates", *Journal of the Aeronautical Society of India*, Vol. 14, pp. 37, 1962.
- 9) S.M. Vogel and D.W. Skinner, "Natural Frequencies of Transversely Vibrating Uniform Annular Plates", *Trans. of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32, pp. 926-932, 1965.
- 10) J. Prescott, "Applied Elasticity", Dover Publications, Inc., 1961.
- 11) H.C. Loh and J.F. Carney III, "Vibrations and Stability of Spinning Annular Plates Reinforced with Edge Beams", *Trans. of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 44, pp. 499-501, 1979.
- 12) A. Losen and A. Libai, "Transverse Vibrations of compressed Annular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 40, pp. 149-153, 1975.
- 13) G.K. Ramaiah, "Flexural Vibration of Annular Plates under Uniform In-plane Compressive Stress", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 70, pp. 117-131, 1980.

- 14) G.K. Ramaiah, "Flexular Vibrations and Elastic Stability of Annular Plates under Uniform In-Plane Tensile Forces along the Inner Edge", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 72, pp. 11-23, 1980.
- 15) Sann, R.I., "Dynamic Bending Stress in a Disk-Type Gyroscope Rotor under Steady Precession", *Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, Series B*, Vol. 92, No. 1, pp. 219-225, 1970.
- 16) W.E. Red, "Examination of the Response of a Flexible Circular Rotor Subjected to Specified Gyroscopic Rates", *Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME*, pp. 1296-1306, November, 1974.
- 17) J.S. Burdess, "The Dynamics of a Gyroscope Supported by a Flexible Circular Plate", *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 49, pp. 601-605, 1982.
- 18) C.H.J. Fox and J.S. Burdess, "The Dynamical Characteristics of a Gyroscope with a Tuned Elastic Suspension", *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 47, pp. 161-166, 1980.
- 19) S.W. McCuskey, "An Introduction to Advanced Dynamics", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1959.
- 20) 金光植, 朴玟泰, "車輪과 鐵路의 連成振動에 關한 研究: 계단진 두께를 갖는 車輪의 動特性", *大韓機械學會 論文集*, Vol. 11, No. 1, 1987.
- 21) Timoshenko and Woinsky-Kreiger, "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill, Inc., 2nd Edition, 1970.
- 22) J.P. Den Hartog, "Mechanical Vibrations", McGraw-Hill, Inc., 4th edition, 1956.