

유한 요소법을 이용한 Bellows Joint의 응력해석

The Stress Analysis of the Bellows Joint by the Finite Element Method

이 완 익*, 김 태 완**
Lee Wan-ik , Kim Tae-wan

Abstract

The Bellows Joint which was used as a absorber or safety equipment to prevent the deformation or fracture of a structure, have been analyzed by the F.E.M using axi-symmetric conical frustum element. Using the F.E.M the general behavior of Bellows Joint corrugation can be investigated easily, and the stability of the analysis be guaranteed. In annular type corrugation, the F.E.M results were agreed with those of other theoretical analyses, but in the U type corrugation, the F.E.M results were more acceptable than those of others.

기 호 설 명

[*D*] : 탄성 계수 행렬
E : 탄성 계수
 {*F*} : 외력 Vector
 [*K*] : 전체 강성 행렬
 [*K^e*] : 요소 강성 행렬
L : 원추형 요소의 자오선 방향 길이
u_i, w_i : 변 위
β_i : 회전 변위
 \bar{u}_i, \bar{w}_i : 변위 성분
φ : 원추대 요소의 자오선 방향과 회전축
 이 이루는 각
t : 원추형 요소의 두께
 [*T*] : 좌표 변환 행렬 (Coordinate Trans-
 formation Matrix)
N_s, N_θ : 합 응력 (Stress Resultant)

M_s, M_θ : 합 모우멘트 (Moment Resultant)
a : 회전축으로부터 Corrugation이 시작
 되는 점까지의 회전 반경
r_o : Corrugation의 반경
u, w : 변위 함수
r : 회전축으로부터 원추대 요소 표면까
 지의 반경
 {*δ^e*} : 요소의 절점 변위 벡터 (국부 좌표계)
 { $\bar{\delta}^e$ } : 요소의 절점 변위 벡터 (기준 좌표계)
σ_{is} : 자오선 방향의 막응력 (Meridional
 Membrane stress)
σ_{lθ} : 원주 방향 막응력 (Longitudinal
 Bending stress)
σ_{bs} : 자오선 방향 굽힘응력 (Meridional
 Bending stress)
σ_{lθ} : 원주 방향 굽힘응력 (Longitudinal
 Bending stress)

* 한양 대학교 기계설계학과

** 한양 대학원

- ϕ, s, θ : 자오선 및 원주 방향 첨자
- $[N]$: 형상 함수 (Shape function)
- r_h : 원형 평판 길이의 1/2
- n : 요소수
- P_l : 원형 평판 길이
- $\epsilon_s, \epsilon_\theta$: 변형률
- x_s, x_θ : 곡률반경
- ν : poisson's ratio

1. 서 론

Toroidal Shell의 연속체로 이루어진 Bellows Joint는, 축 방향의 하중 (Axial load) 이나, 진동 혹은 고온 고압의 유체가 흐르면서 발생하는 변형량을 흡수하여, 구조물의 변형 및 파손을 방지하는 안전장치로 널리 사용되고 있다.

Bellows Joint에 관한 연구는, Shell의 지배 방정식을 이용하여 Bellows Joint에 발생하는 응력 및 변형량을 구하는 이론 [1], [2], [3]과, 다수의 간편식이 제안되었다.

Hamada [3]는 Laupa [1], Clark [2] 등이 사용한 Shell의 지배 방정식을 Bellows Joint Corrugation에 적용하여 근사해를 구한 해석 이론을 제안 하였다. 이것은 각각의 Corrugation의 변형 상태를 동일하게 가정함으로써, 점근법 (Asymptotic Method)과 같은 복잡한 계산과정을 피할 수 있는 장점이 있다. 그러나, 근사해의 특성에 따른 해석상의 안정 영역 문제 [4]가 나타났다.

Shell의 지배 방정식을 이용하는 경우, Corrugation의 형상을 정확하게 표현할 수 있는 장점은 있으나, 복잡한 계산 과정을 수행해야 하고, Bellows Joint Corrugation을 연속적으로 해석을 할 수 없는 단점이 있다.

본 연구에서는 기존 해석에서 나타난 문제점들을 보완하기 위하여, 유한 요소법을 이용 하였다. Bellows Joint의 해석에 유한요소법을 사용하면, 계산 과정이 비교적 간단하고, 해석 Corrugation의 갯수와 해석 조건을 실

질적으로 고려할 수 있기 때문에, Bellows Joint Corrugation의 거동을 전체적으로 해석할 수 있는 장점이 있다. 또한, Bellows Joint의 거동에 영향을 미치는 제반 조건을 쉽게 고찰할 수 있고, 해석의 안정성도 기대할 수 있다.

2. 해석이론

2-1 기본 가정

본 연구에서 가정한 사항은 다음과 같다.

- 1) 재료는 등방성 탄성체이다.
- 2) Bellows Joint Corrugation은 Shellallow Shell의 이론은 적용할 수 있다.
- 3) Bellows Joint는 축 대칭으로 변형한다.

2-2 축 대칭 원추대 요소 (Conical Frustum Element)

본 연구에서는 원추대 요소를 사용하여 Bellows Joint를 해석하였다. 가정 3)으로부터 원추대 요소를 사용하면, 3절점 요소나, 4절점 요소를 사용하는 경우보다 계산 시간 및 해석의 정도를 개선할 수 있다. Fig.1은 축 대칭 원추대 요소를 표시한 것이다.

2-3 응력 및 변형률 관계식

본 연구에서 사용한, 원추대 요소의 응력 및 변형률 관계식은 (1), (2)식과 같다. [6] [8]

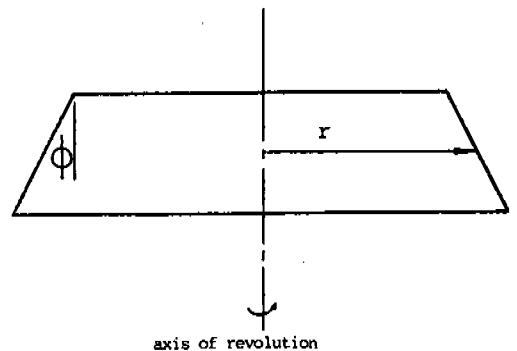


Fig.1 A axis-symmetrical conical frustum element.

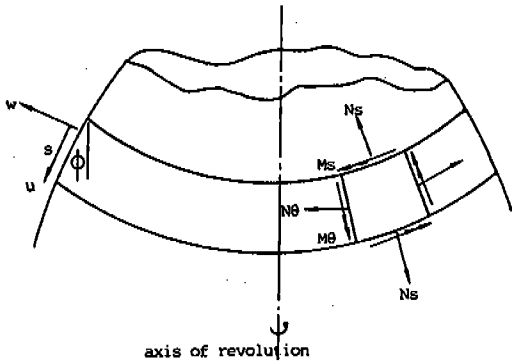


Fig.2 Stress and Moment resultants occurring on the Shells of revolution.

Fig.2에는 요소에 발생하는 응력과 모우멘트를 표시하였다. 원추대 요소에 대한 응력-변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ x_s \\ x_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} du/ds \\ (w \cos \phi + u \sin \phi)/r \\ -d^2w/ds^2 \\ -\sin \phi/r \cdot dw/ds \end{Bmatrix}$$

$$= [L] \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} Ns \\ M\theta \\ Ms \\ M\theta \end{Bmatrix} = [D] \{\epsilon\} \dots\dots\dots (2)$$

위의 식에서

$$[D] = Et/(1-\nu^2) \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2/12 & \nu t^2/12 \\ 0 & 0 & \nu t^2/12 & t^2/12 \end{pmatrix}$$

$$[L] = \begin{Bmatrix} d/ds & 0 \\ \sin \phi/r & \cos \phi/r \\ 0 & -d^2/ds^2 \\ 0 & -\sin \phi/r \cdot d/ds \end{Bmatrix}$$

이다.

2-4 변위 및 변위함수

Fig.3은 원추대 요소에 발생하는 변위와 요소를 표시하였다. 여기서 L은 원추대 요소의 자오선 방향의 길이, s는 L에 대한 변수, r은 회전축으로부터의 반경, φ는 회전축과 요소의 자오선 방향이 이루는 각이다. Bellows

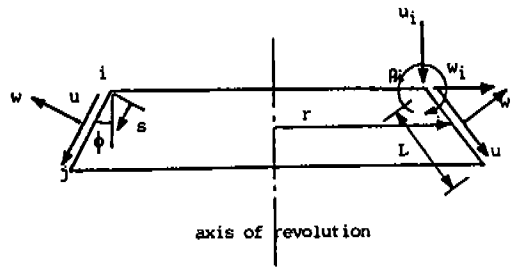


Fig.3 Displacement and geometry of Conical element.

Joint의 거동을 축대칭 변형상태로 가정하였으므로, 요소의 각 절선(Nodal Line)에는 u_i, w_i, β_i 의 세가지 변위가 나타난다. 그러므로 각 요소의 자유도(Degree of freedom)는 6이다.

이것을 이용하여 변위 함수를 다음과 같이 가정한다.

$$u = a_1 + a_2 s \dots\dots\dots (3)$$

$$w = a_3 + a_4 s + a_5 s^2 + a_6 s^3 \dots\dots\dots (4)$$

식(3), (4)를 요소 내의 절선에서의 변위로 표시하면 식(5)와 같이된다.

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-s & 0 \\ 0 & 1-3s^2+2s^3 \\ 0 & s^3 \\ 0 & 3s^2-2s^3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \beta_i \\ u_j \\ w_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (5)$$

$$= [N] \{\delta^e\} \dots\dots\dots (6)$$

여기서, $s' = s/L$ 이다.

요소내의 변위를 회전축과 평행한 방향과, 수직인 방향의 변위 $\bar{u}_i, \bar{w}_i, \beta_i$ 로 표시하면, 좌표 변환 행렬(Coordinate Transformation Matrix)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

$$\text{그러므로, } \{\delta^e\} = [T] \{\bar{\delta}^e\} \dots\dots\dots (8)$$

2-5 강성 행렬(Stiffness Matrix)

계 전체의 가상일의 원리는 가상 변위 백

터 $\{\Delta \bar{\delta}\}$ 에 대하여

$$\{\Delta \bar{\delta}\}^T \{F\} = \int_v \{\Delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dv \dots \dots \dots (9)$$

로 표시되고 원추대 요소의 두께 t 를 일정하게 생각하고 각 요소에 대하여 식(9)의 우변을 변환하면,

$$\{\Delta \bar{\delta}\}^T \{F\} = \sum_e (2\pi L t \int_0^1 r \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} ds') \dots \dots \dots (10)$$

이 성립한다. (10)식에 식(1)~(8)의 관계를 대입하면,

$$\{\Delta \bar{\delta}\}^T \{F\} = 2\pi \sum L t ((\Delta \bar{\delta}^e)^T) \int_0^1 r [T]^T ([L][N])^T [D] ([L][N])[T] ds' \{\bar{\delta}^e\} \dots \dots \dots (11)$$

가 되고 $\{\Delta \bar{\delta}\} = \sum_e \{\Delta \bar{\delta}^e\}$ 임을 고려하면,

$$\{F\} = [K] \{\bar{\delta}\} \dots \dots \dots (12)$$

가 성립한다. 단, $[K] = \sum_e [K]^e$, $\{\bar{\delta}\} = \sum_e \{\bar{\delta}^e\}$ 이고,

$$[K]^e = 2\pi t L \int_0^1 r [T]^T ([L][N])^T [D] ([L][N])[T] ds' \dots \dots \dots (13)$$

로서 요소의 강성행렬을 구할 수 있다.

본 연구에서는 식(13)를 Simpson 공식에 의해 적분하여 강성 행렬을 구하였다. Fig.4에는 본 연구에서 사용한 유한 요소법 Program의 구성을 표시하였다.

3. 해석결과 및 고찰

3-1 해석 모델

본 연구에서는 Annular 형과 U형의 Corrugation에 대하여 해석을 하였고, Fig.5에는 각각의 Corrugation 형상을, Fig.6에는 각각의 Corrugation 형상에 대한 유한 요소 분해 형태를 표시하였다. Fig.5에 표시한 것과 같이 유한 요소법을 이용하면 Corrugation의 형상을 정확하게 표현할 수 없는 단점이 있으나, 유한 요소의 갯수를 증가시킴으로서 이 단점을 해결할 수 있다. 본 연구에서는 Annular 형은 150개 U형은 180개의 유한 요소를 기준으로 하였다.

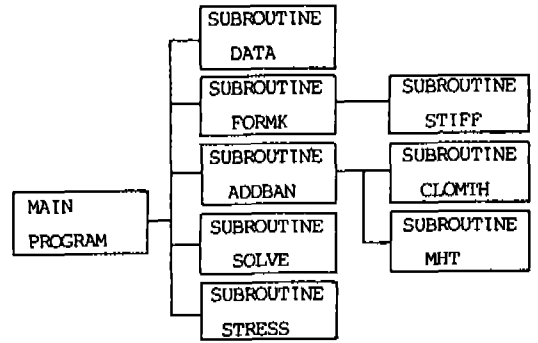


Fig.4 Flow Chart of F. E. M. program.

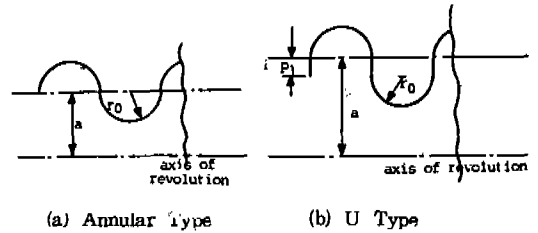


Fig.5 Configuration of Bellows Joint Corrugation.

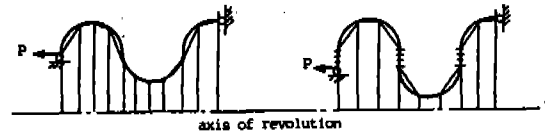


Fig.6 Mesh Generation.

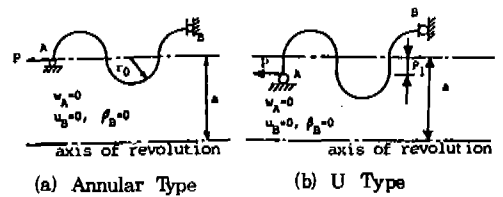


Fig.7 Boundary Condition.

3-2 경계 조건

Bellows Joint의 거동을 축 대칭으로 생각하면, 해석 형상의 경계 조건은 식(14), (15)와 같이 나타나며, Fig.7에 이것을 표시하였다. U형에서는 원추대 요소의 ϕ 값을 90° 로 하면 원형 평판 부분을 해석할 수 있다.

Table 1. Stress Distribution (Annular Type)

stress	Longitudinal membrane stress		Meridional membrane stress		Longitudinal bending stress		Meridional bending stress	
	present	Hamada	present	Hamada	present	Hamada	present	Hamada
angle (θ)								
0°	-0.036	-0.004	0.034	0.013	-0.047	0.001	-0.122	-0.10
10°	-0.015	0.02	0.047	0.031	0.596	0.576	0.075	0.018
20°	0.098	0.10	0.056	0.041	1.192	1.027	0.265	0.224
30°	0.273	0.227	0.064	0.049	1.699	1.423	0.432	0.357
40°	0.477	0.378	0.068	0.053	2.089	1.780	0.568	0.475
50°	0.678	0.538	0.071	0.055	2.357	2.041	0.667	0.575
60°	0.854	0.687	0.071	0.055	2.514	2.280	0.730	0.733
70°	0.989	0.811	0.070	0.053	2.591	2.480	0.766	0.793
80°	1.073	0.893	0.070	0.047	2.620	2.650	0.783	0.793
90°	1.102	0.935	0.069	0.046	2.627	2.710	0.788	0.812

$a = 250\text{mm}$, $r_0 = 10\text{mm}$, $E = 2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$, $\nu = 0.3$, $t = 1\text{mm}$, $p = 100 \text{ kg}$

1) Annular 형

$w = 0$, at point A
 $u = 0, \beta = 0$, at point B (14)

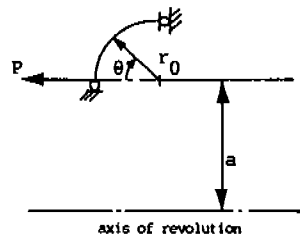
2) U 형

$w = 0$, at point A
 $u = 0, \beta = 0$, at point B (15)

3-3 해석 결과 및 고찰

3-3-1 해석의 정도

Table 1에는 Hamada [3]가 해석한 형상과 동일한 규격을 갖는 Annular 형의 Corrugation 형상에 대하여 본 연구에서 해석한 결과를 수록하였다. Table 1에서 표시한 것과 같



이 해석 결과가 일치하는 경향을 나타내고 있다. 따라서, 해석 형상의 분할 갯수를 증가시켜가면 본 연구의 해석 결과는 정해에 접근하리라 믿는다.

3-3-2 고찰

Hamada는 전체 Corrugation의 변형 상태를 원형 평판의 중간 지점과 각 Corrugation의 정점 (Apex)에 대하여 대칭적으로 가정하고, Fig.8과 같은 단일 Corrugation을 이용하여 전체 Corrugation의 거동을 해석하였다. 그러나, 본 연구에서는 Fig.9와 같은 연

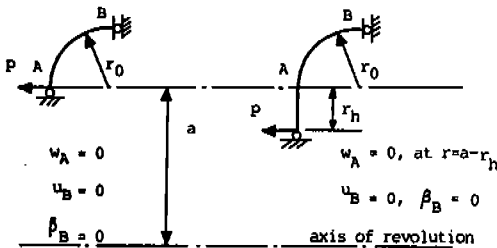


Fig.8 Hamada's Model

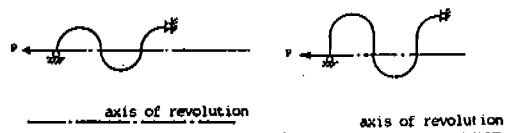


Fig.9 Present Model.

속적인 모델을 사용하였다. Fig.10~Fig.17에는 Hamada의 해석 결과와 본 연구의 해석 결과를 동시에 나타내었다. Table 1에 표시한 것과 같이 실제 설계상의 문제가 되는 것은 원주 방향의 막 응력 $\sigma_{t\theta}$ 와 자오선 방향의 굽힘 응력 σ_{bs} 이므로, Fig.10~Fig.17에는 $\sigma_{t\theta}$ 와 σ_{bs} 만을 표시하였다.

a) Annular 형

Annular 형의 Corrugation에 대한 해석 결과는 Fig.10~Fig.12에서 나타난 것과 같이, Hamada의 해석 결과와 유한 요소법에 의한 결과가 대체로 일치하고 있다. 특히, 응력 분포가 Corrugation의 정점(Apex) 부근에서 대칭적으로 나타나는 현상도 잘 일치하였다. 따라서, Annular 형의 경우는 하나의 Corrugation에 대한 해석으로 전체 Corrugation의 거동을 고찰할 수 있었다.

b) U 형

U형의 경우는 Hamada의 해석 결과와 본 연구의 해석 결과와 다소 다른 경향을 나타내고 있다. Fig.13~Fig.17에서 표시한 것과 같이 U형의 Corrugation에 나타나는 응력은 원형 평판의 영향으로 그 변화가 복잡하며, Corrugation에 대한 응력의 대칭성도 뚜렷하지 않다. 따라서, 단일 Corrugation에 대한 해석으로 U형 Bellows Joint의 전체 거동을 예측하기에 부적합한 것으로 이해된다.

U형은 Corrugation의 회전 반경 a 에 대

한 Corrugation의 반경 r_0 의 비가 작으면 최대 응력이 하중이 작용하는 Corrugation에 나타나고, 발생 응력의 대칭성도 뚜렷하지 않다. 그러나, r_0/a 의 값이 커지면 최대 응력은 내

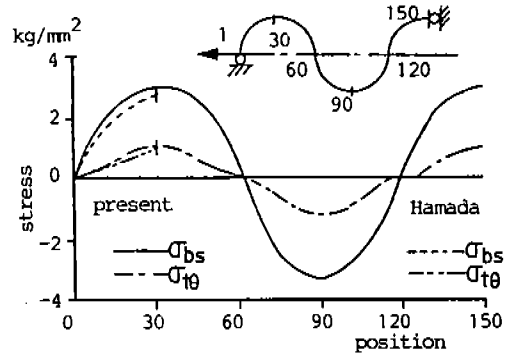


Fig.11 Stress Distribution of Bellows Joint. ($a=250mm, r_0=10mm$)

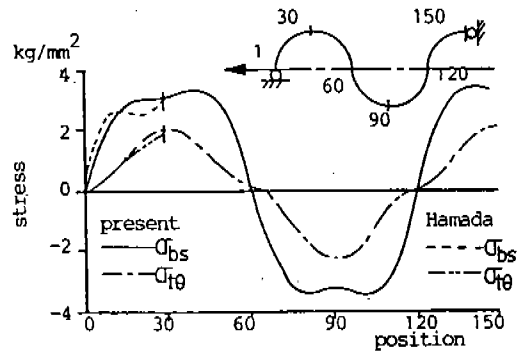


Fig.12 Stress Distribution of Bellows Joint. ($a=150mm, r_0=10mm$)

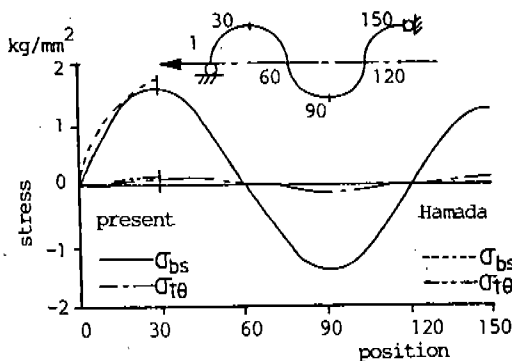


Fig.10 Stress Distribution of Bellows Joint. ($a=250mm, r_0=5mm$)

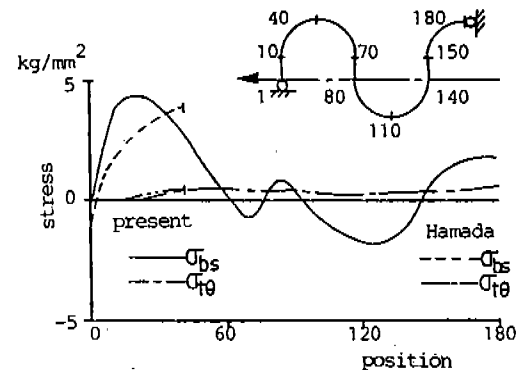


Fig.13 Stress Distribution of Bellows Joint. ($a=250mm, p_1=10mm, r_0=5mm$)

부에서 발생하며, 대칭성도 뚜렷해진다. 동일한 r_0/a 의 값에 대해서, 원형 평판의 길이가 커지면 발생 응력도 증가한다. 따라서, U형의 경우에는 전체 Corrugation에 발생하는 응력을 반드시 검토하여야 한다.

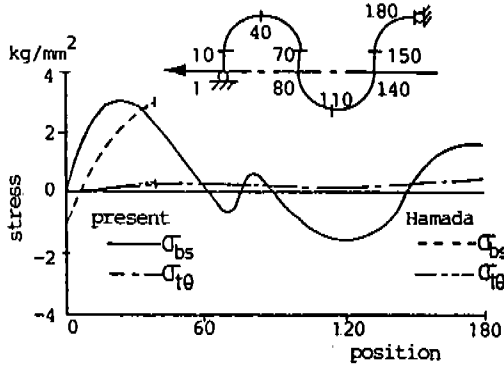


Fig. 14 Stress Distribution of Bellows Joint. ($a = 250mm, p_1 = 6mm, r_0 = 5mm$)

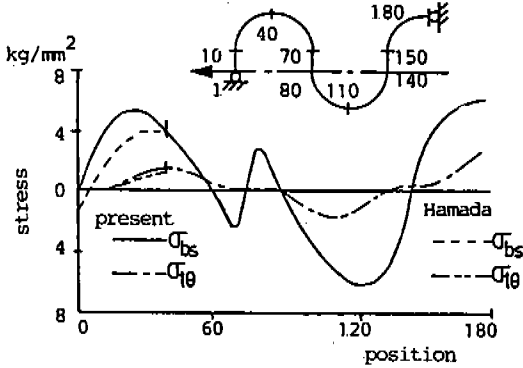


Fig. 15 Stress Distribution of Bellows Joint. ($a = 250mm, p_1 = 10mm, r_0 = 10mm$)

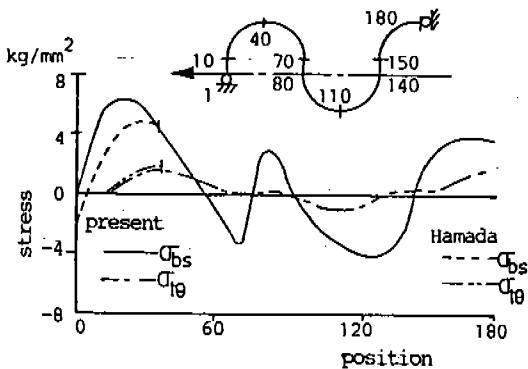


Fig. 16 Stress Distribution of Bellows Joint. ($a = 250mm, p_1 = 14mm, r_0 = 10mm$)

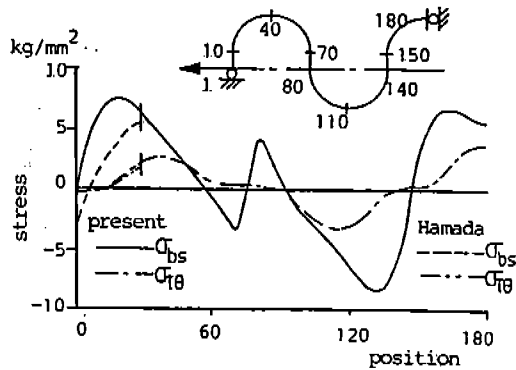


Fig. 17 Stress Distribution of Bellows Joint. ($a = 150mm, p_1 = 10mm, r_0 = 10mm$)

4. 결 론

축대칭 원추대 유한 요소를 사용하여 Bellows Joint를 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

Annular 형은 기존 해석 결과와 잘 일치하였다.

U형은,

1) 기존 해석 결과와 일치하지 않았으며, 전체 Corrugation의 응력 분포가 불규칙하게 나타났다.

2) U형의 경우는 유한 요소법 등과 같은 전체 Corrugation을 해석할 수 있는 방법을 이용하는 것이 타당하다.

참 고 문 헌

- 1) Laupa, A., 'Analysis of U-shaped Expansion Joint', J. Applied Mech., Vol. 29, Trans. ASME, Vol. 84, series E, 1962, pp. 115-123.
- 2) Clark, R.A., 'An expansion bellows problem', J. Applied Mech., pp. 61, 1970.
- 3) M. Hamada, 'On the strength of toriodal shells', 일본 기계학회 논문집, 29권 197호, pp.142, 1963.
- 4) 이원익, 'Bellows Joint의 최적 형상에 관한 연구', 한양대학교 산업과학연구소 논문집, 23호, pp.153, 1986.

- 5) M. Hamada, S. Takezono, 'Analysis of expansion joint of pressure vessel', Bull. of JSME, Vol. 13, No. 55, 1970.
- 6) Calladine, 'Theory of shell structures', Cambridge, 1983.
- 7) Zienkiewicz, 'The finite element method', Mc-Graw Hill, 1977.
- 8) S.P. Timoshenko, 'Theory of plates and shells', Mc-Graw Hill, 1959.
- 9) E. Reissner, 'A new derivation of the equation for the deformation of elastic shell', American J. of Math., Vol. 63, pp. 177, 1941.
- 10) Noboru Kikuchi, 'Finite element method in Mechanics', Cambridge, 1986.